Complexité du voyageur de commerce multi-containers, kSTSP

Sophie Toulouse, Roberto Wolfler Calvo

sophie.toulouse@lipn.univ-paris13.fr, wolfler@lipn.univ-paris13.fr

LIPN - UMR CNRS 7030

Institut Galilée - Université Paris 13

Plan

Introduction

- Définition du problème
- Remarques préliminaires

Étude de complexité

- . . . quand les tours sont fixés
- . . . quand les piles sont fixées
- Retombées

Optimisation à partir de TSP

- . . . en fixant un tour
- . . . logique compensatoire

Conclusion ?

Plan

Introduction

- Définition du problème
- Remarques préliminaires

Étude de complexité

- . . . quand les tours sont fixés
- . . . quand les piles sont fixées
- Retombées

Optimisation à partir de TSP

- . . . en fixant un tour
- . . . logique compensatoire

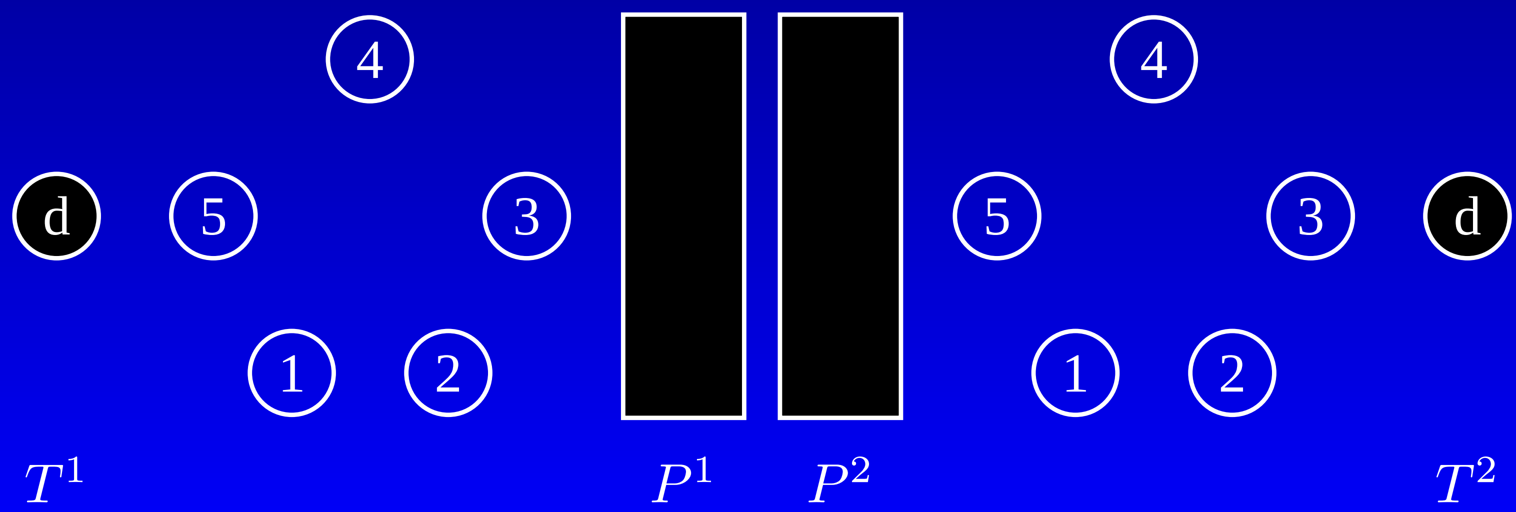
Conclusion ?

- Il reste beaucoup à faire !

1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

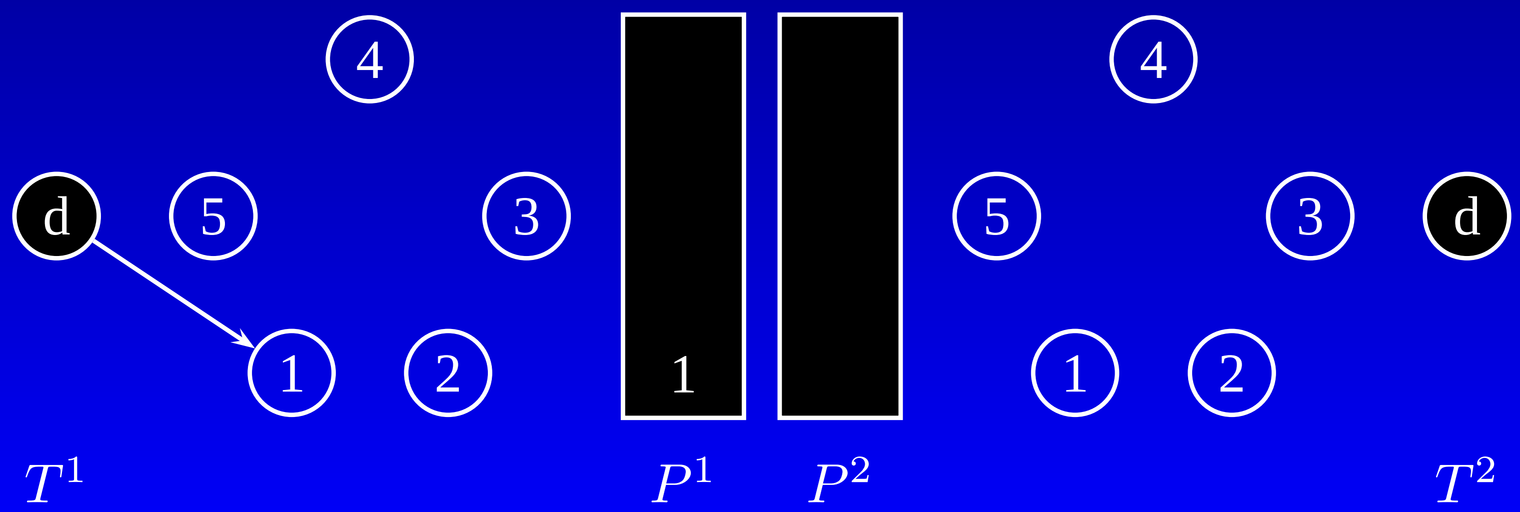
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 :\ \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

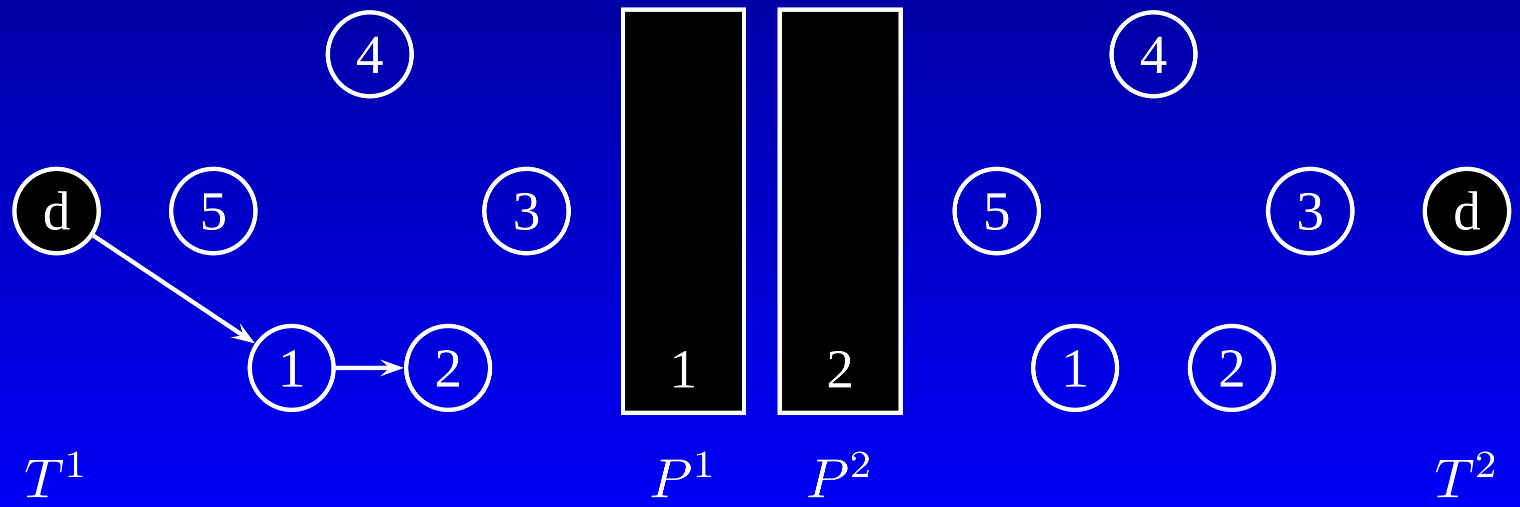
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2\ :\ \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

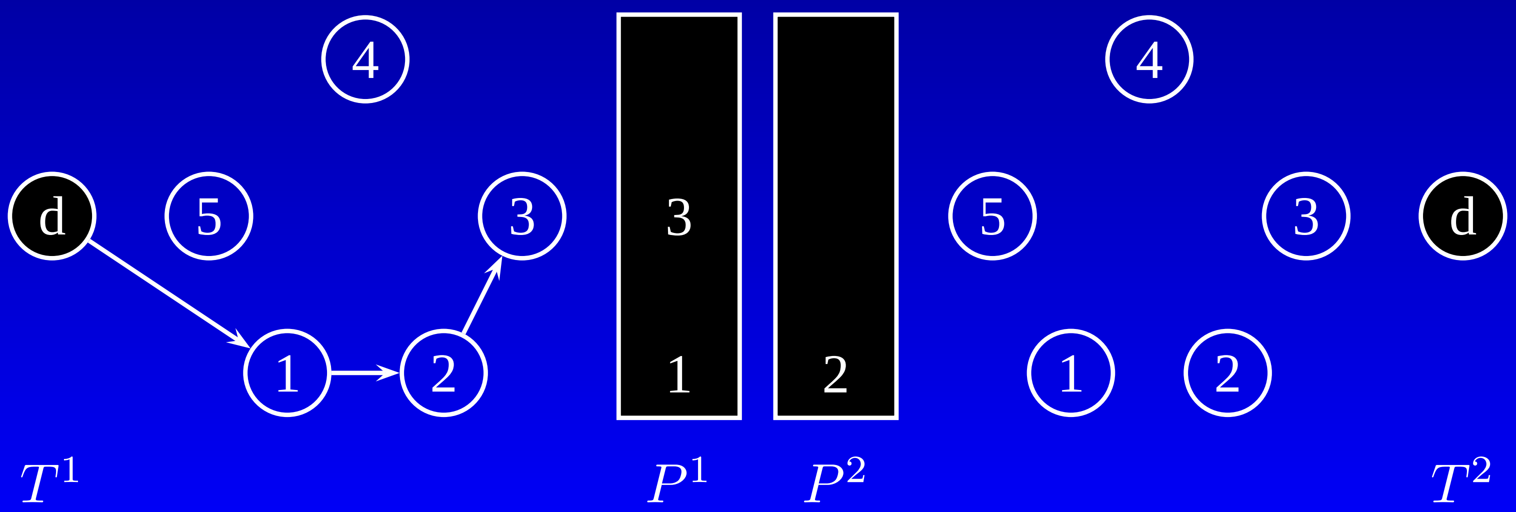
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 :\ \{0\} \cup [n] \to \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

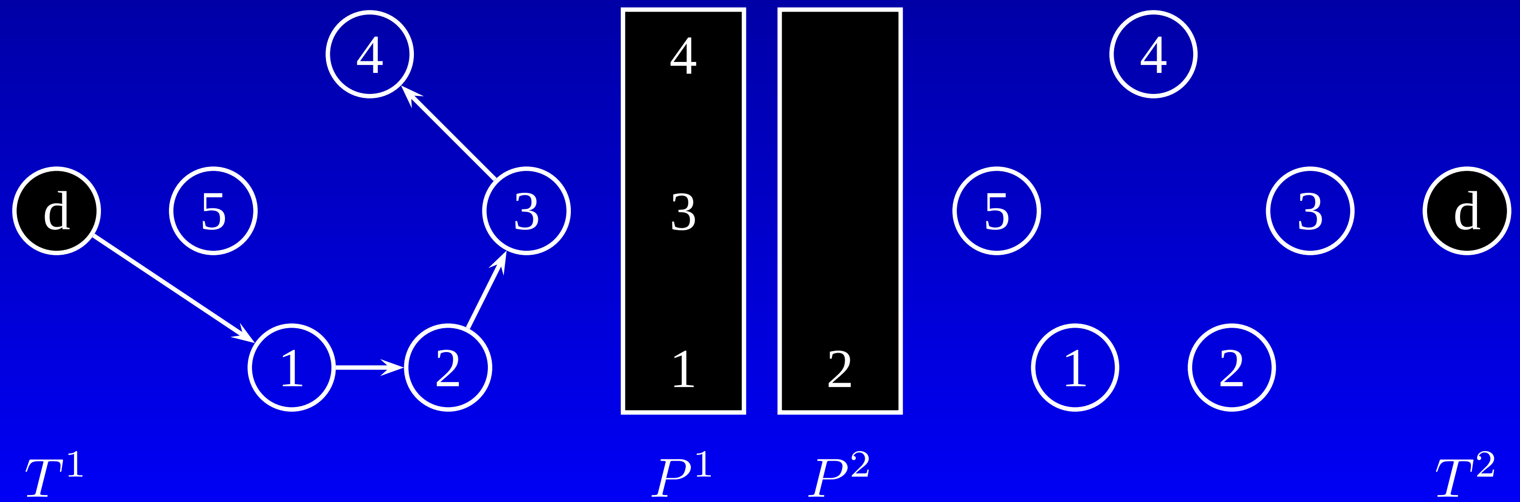
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 : \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

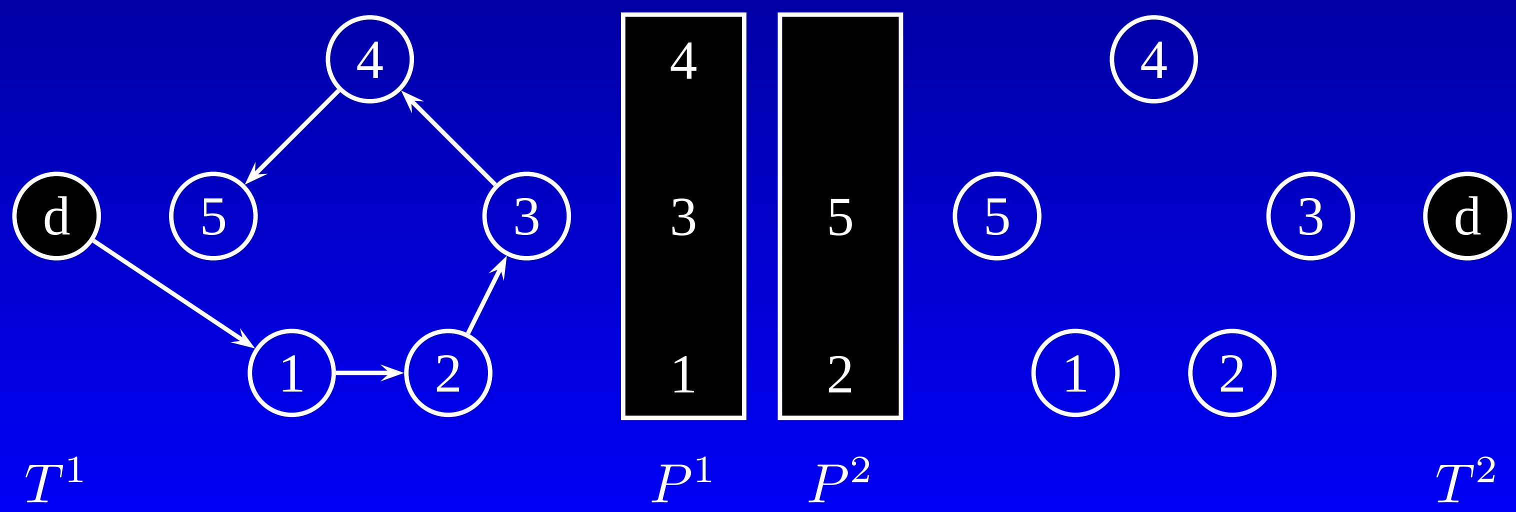
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 :\ \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

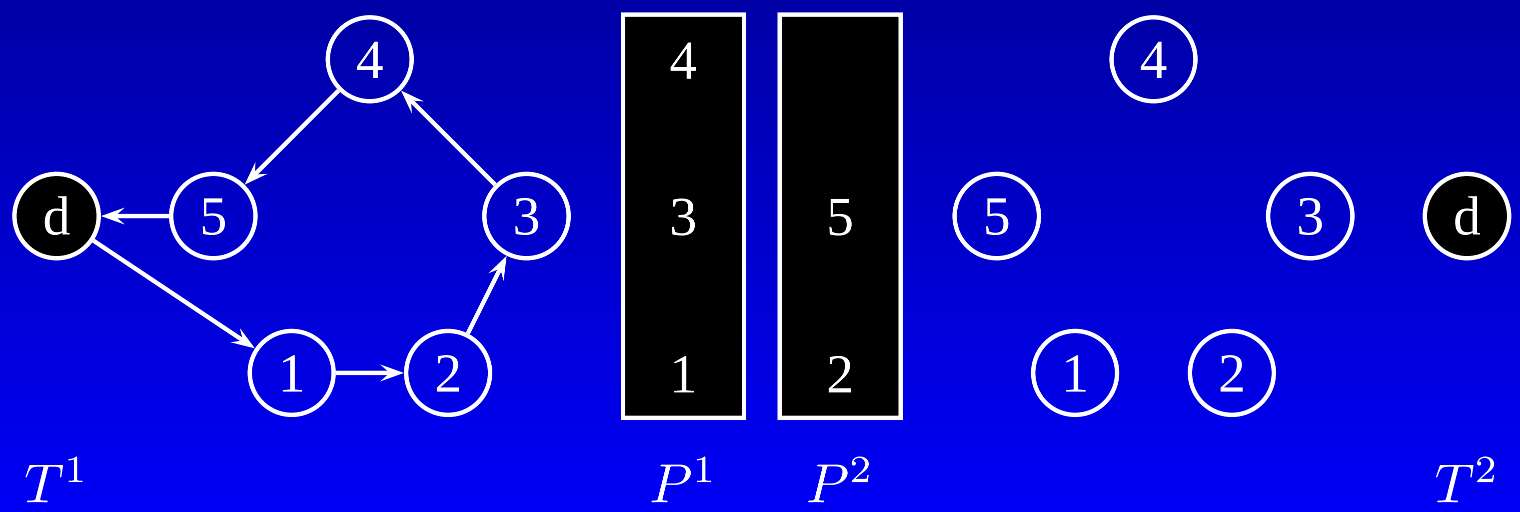
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 : \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

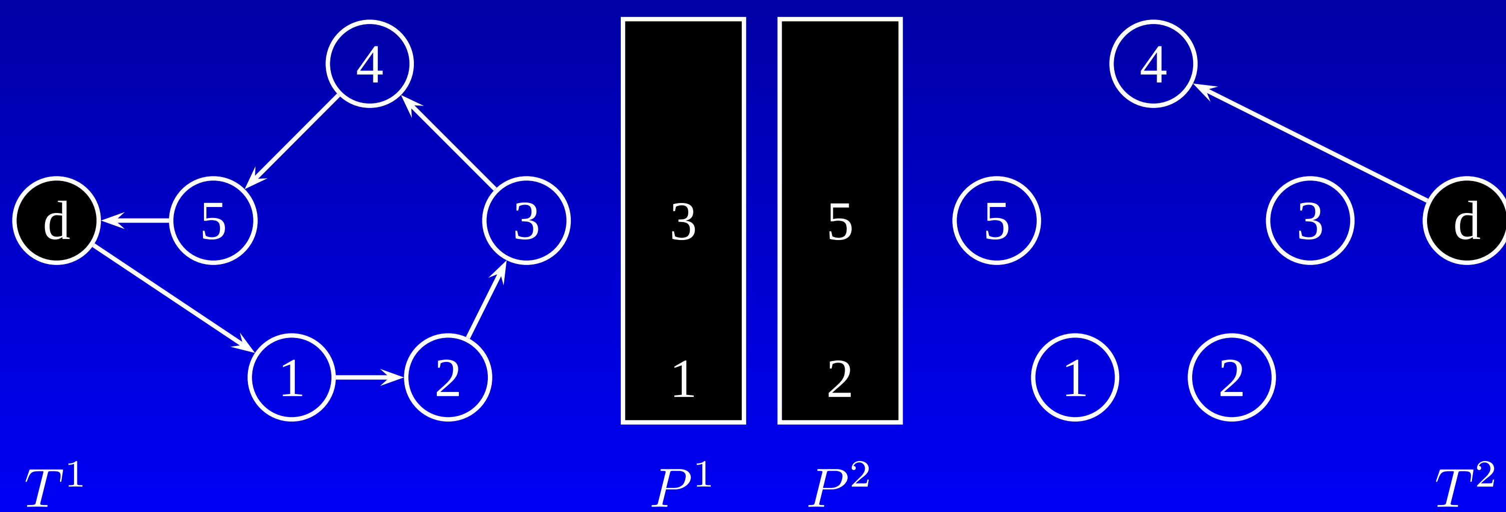
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2\ :\ \{0\} \cup [n] \longrightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

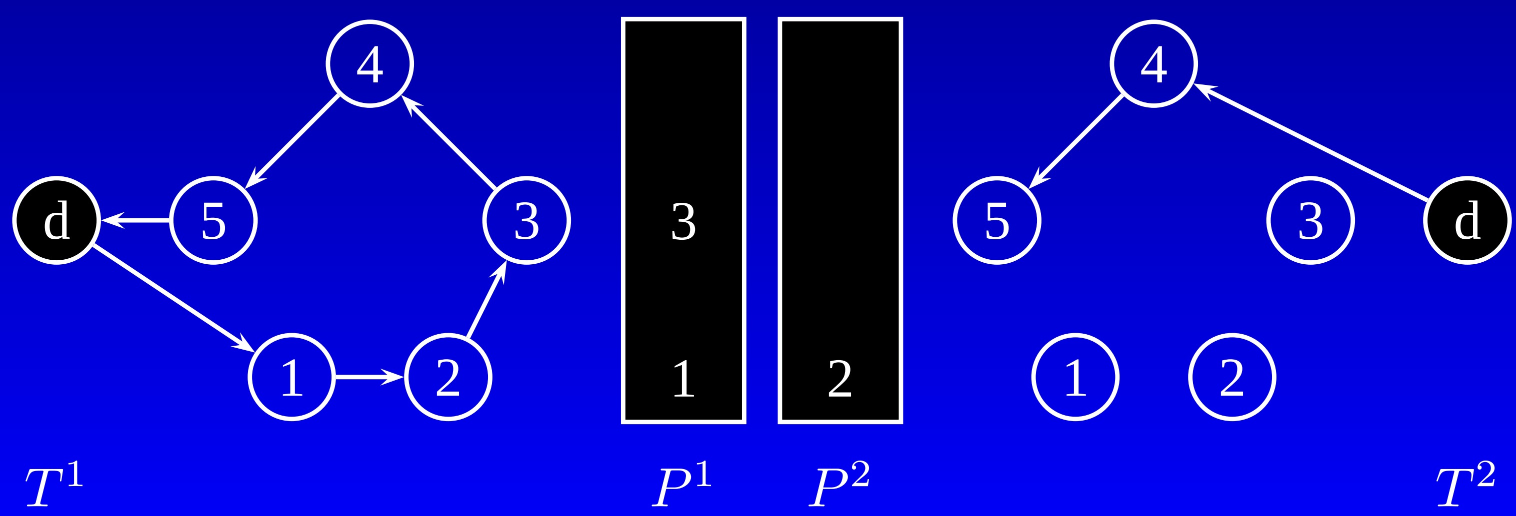
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 : \{0\} \cup [n] \longrightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

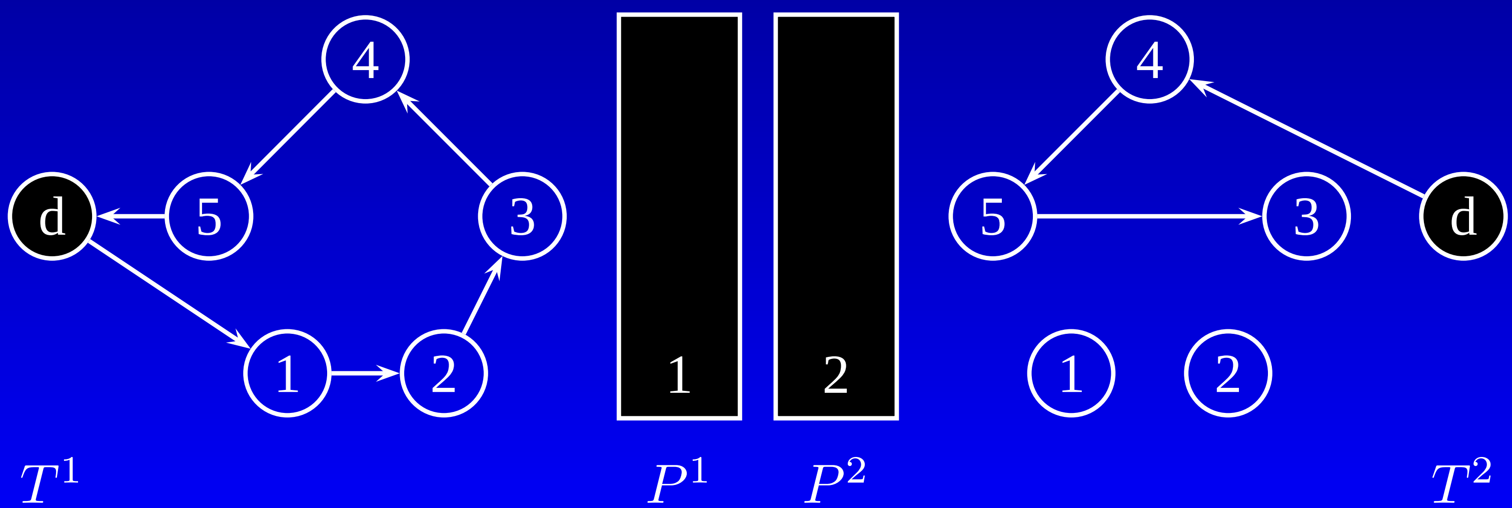
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 : \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

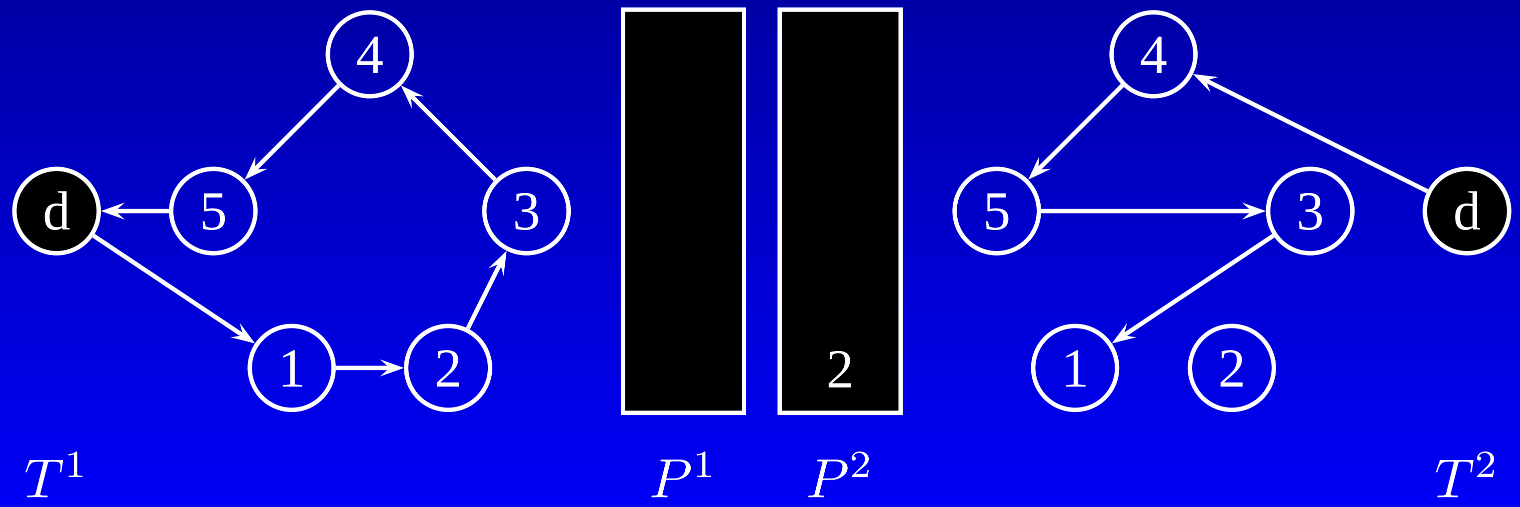
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2\ :\ \{0\} \cup [n] \longrightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

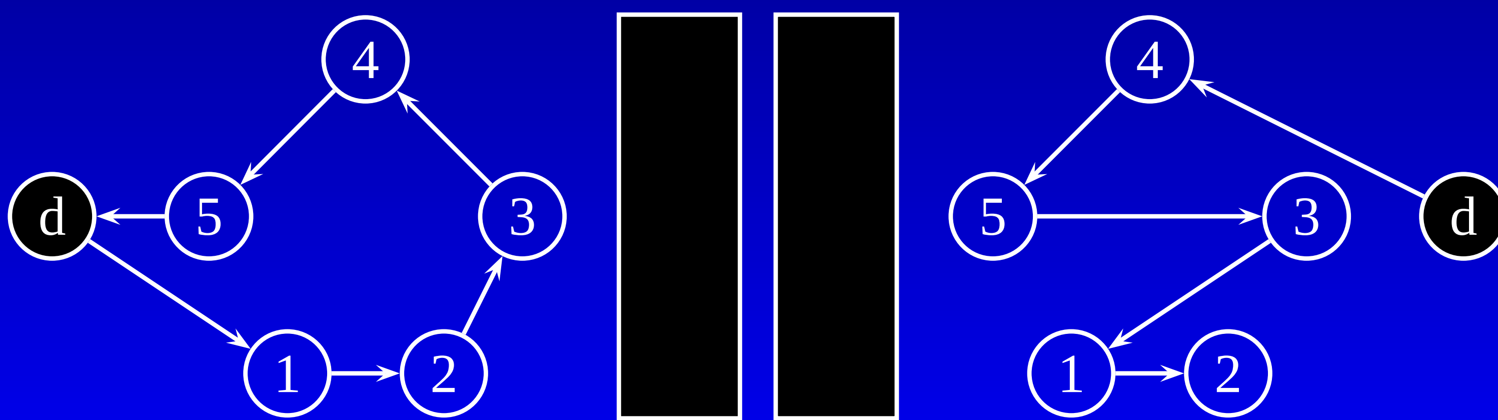
- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2\ :\ \{0\} \cup [n] \longrightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2\ :\ \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$

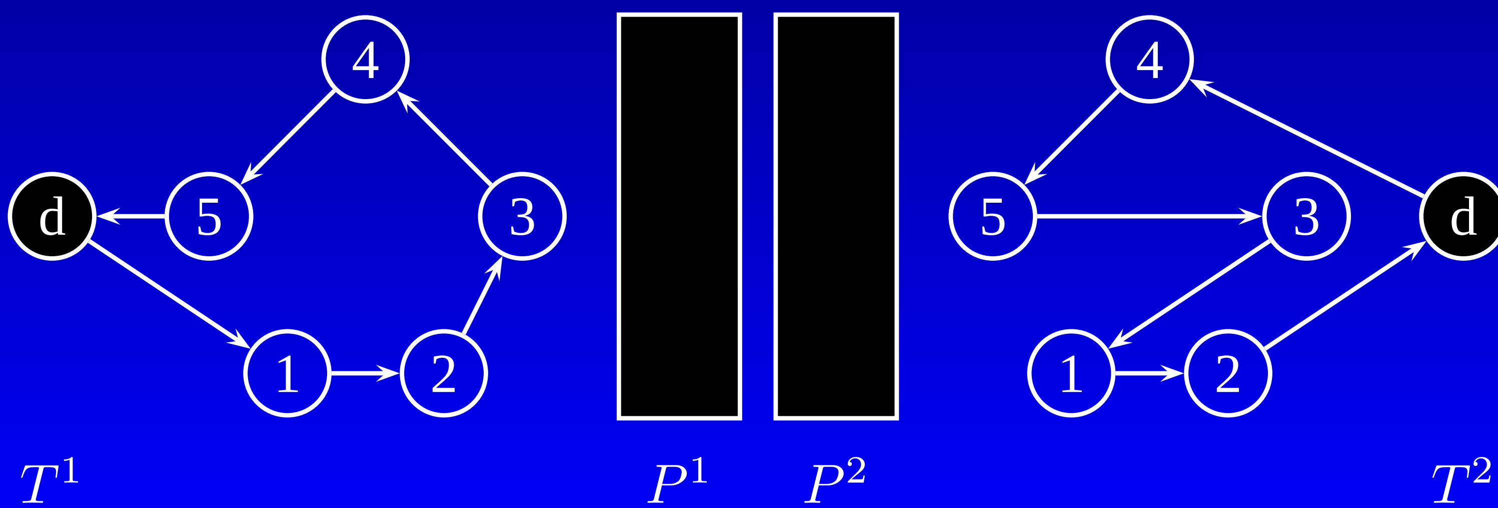


T^1 P^1 P^2 T^2

1 - Introduction - kSTSP

Définition du problème

- k constante universelle $\Rightarrow$ k containers de capacité illimitée
- Instance : $(n\ ;\ d^1, d^2 : \{0\} \cup [n] \rightarrow \mathbb{N})$
- Solution : $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ compatible de valeur $d(T^1) + d(T^2)$
  - T^1 tour de collecte sur (K_{n+1}, d^1)
  - T^2 tour de livraison sur (K_{n+1}, d^2)
  - $\mathcal{P} = (P^1, \ldots, P^k)$ partitionnement ordonné de $[n]$



1 - Introduction - propriétés

Relations d'ordre strict

$T^1 \quad \Rightarrow \quad <^1 \quad : \quad u <^1 v$ *ssi* u collecté avant v

$T^2 \quad \Rightarrow \quad <^2 \quad : \quad u <^2 v$ *ssi* u livré avant v

$\mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad <^3 \quad : \quad u <^3 v$ *ssi* u empilé avant v dans une même pile P^ℓ

$<^1, <^2$ complets, $<^3$ partiel

Propriétés

$$(T^1, T^2, \mathcal{P}) \text{ réalisable } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u \neq v \in [n], \quad u <^1 v \Rightarrow \neg \left(u >^3 v\right) \\ \forall u \neq v \in [n], \quad u <^2 v \Rightarrow \neg \left(u <^3 v\right) \end{cases}$$

Classification : kSTSP est $\mathbf{NP-h}$

- TSP $\propto$ kSTSP
- $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ réalisable vérifiable en temps polyomial

2 - Complexité - tours fixés

Sous-problème de décision DecP

- Entrée : deux tours T^1 et T^2
- Question : $\exists\, \mathcal{P}$ compatible ?

Proposition : DecP est **P**

2 - Complexité - tours fixés

Sous-problème de décision DecP

- Entrée : deux tours T^1 et T^2
- Question : $\exists\, \mathcal{P}$ compatible ?

Proposition : DecP est $\mathbf{P}$

Preuve : $\mathrm{DecP} \propto k$-coloration dans graphe de comparabilité

2 - Complexité - tours fixés

Sous-problème de décision DecP

- Entrée : deux tours T^1 et T^2
- Question : $\exists\, \mathcal{P}$ compatible ?

Proposition : DecP est **P**

Preuve : $\mathrm{DecP} \propto k$-coloration dans graphe de comparabilité

- Graphe de discordance $G^{\neq} = ([n], E^{\neq})$
  $\{u, v\} \in E^{\neq}$ *ssi* $u <^1 v \ \wedge\ u <^2 v$

2 - Complexité - tours fixés

Sous-problème de décision DecP

- Entrée : deux tours T^1 et T^2
- Question : $\exists\, \mathcal{P}$ compatible ?

Proposition : DecP est **P**

Preuve : $\mathrm{DecP} \propto k$-coloration dans graphe de comparabilité

- Graphe de discordance $G^{\neq} = ([n], E^{\neq})$
  $\{u, v\} \in E^{\neq}$ *ssi* $u <^1 v \,\wedge\, u <^2 v$
- (T^1, T^2) réalisable *ssi* $G^{\neq}$ k-colorable
  $u <^1 v$ et $u <^2 v \Rightarrow u, v$ dans deux piles différentes

2 - Complexité - tours fixés

Sous-problème de décision DecP

- Entrée : deux tours T^1 et T^2
- Question : $\exists\, \mathcal{P}$ compatible ?

Proposition : DecP est **P**

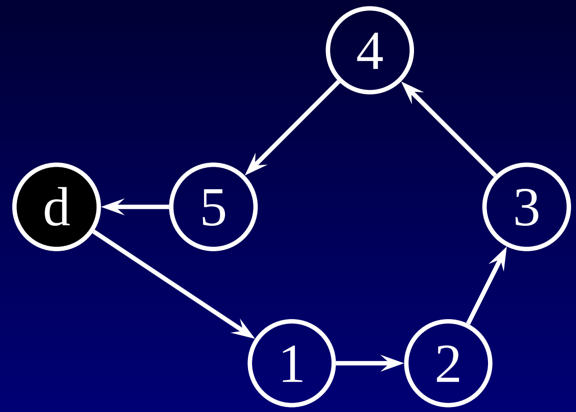
Preuve : $\mathrm{DecP} \propto k$-coloration dans graphe de comparabilité

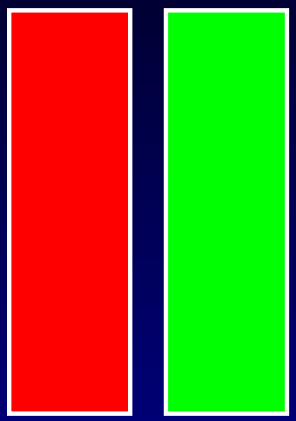
- Graphe de discordance $G^{\neq} = ([n], E^{\neq})$
  $\{u, v\} \in E^{\neq}$ *ssi* $u <^1 v \;\wedge\; u <^2 v$
- (T^1, T^2) réalisable *ssi* $G^{\neq}$ k-colorable
  $u <^1 v$ et $u <^2 v \Rightarrow u, v$ dans deux piles différentes
- $G^{\neq}$ graphe de comparabilité
  $u <^1 v <^1 w$ et $u <^2 v <^2 w \Rightarrow u <^1 w$ et $u <^2 w$

$\Rightarrow$ parfait, colorable en temps polynomial, [4]

2 - Tours fixés - illustration

T^1



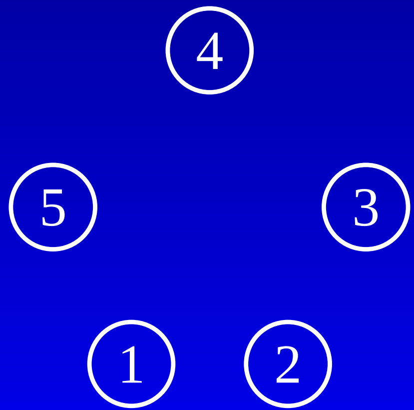


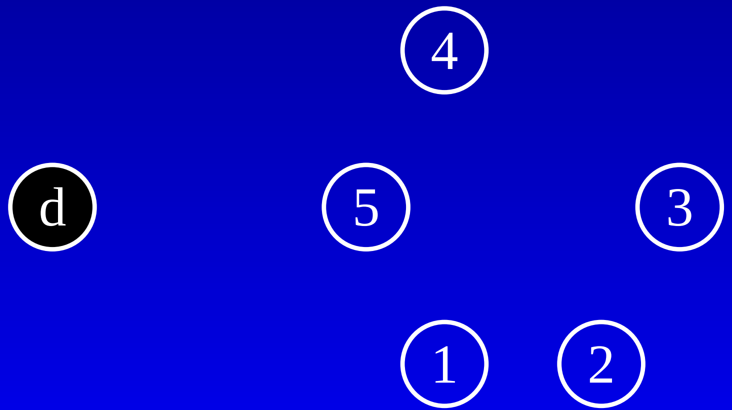
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 :$

T^2

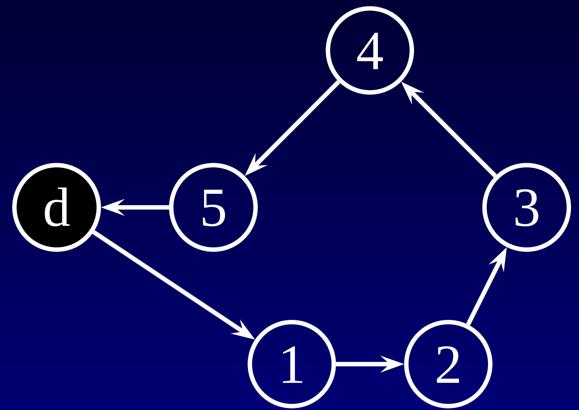


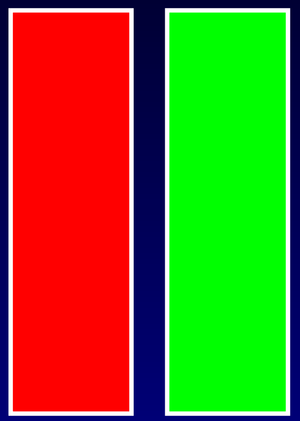


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



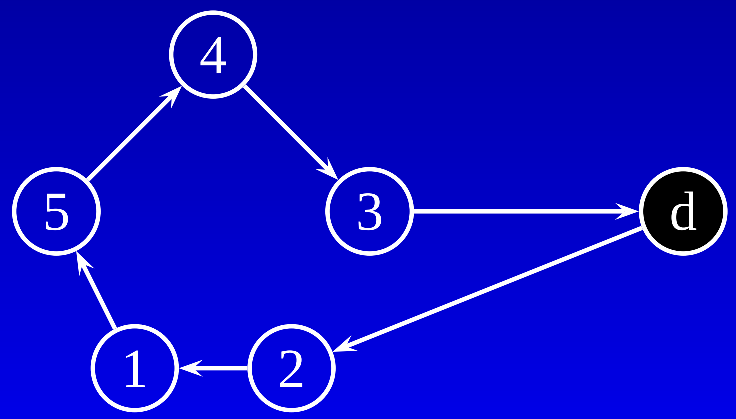


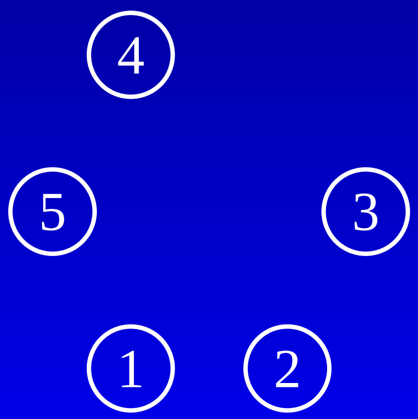
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 3 >^2 4 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2

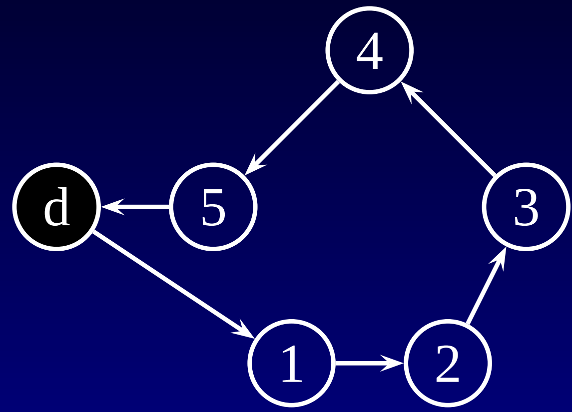


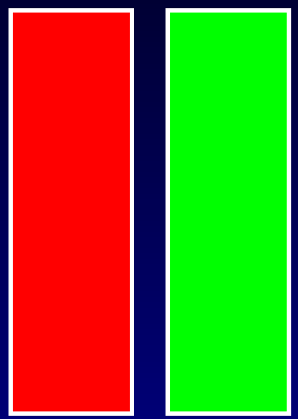


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



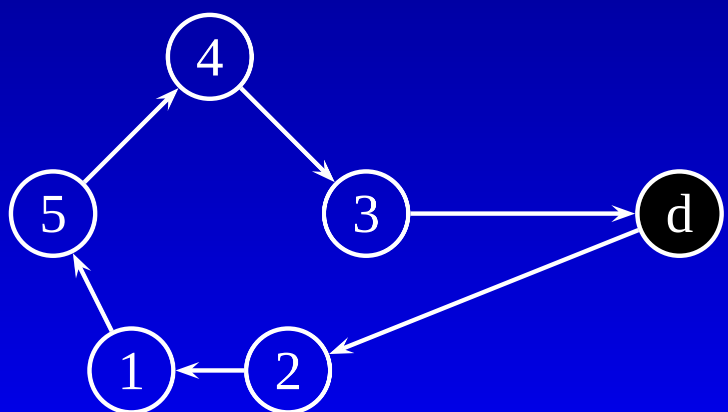


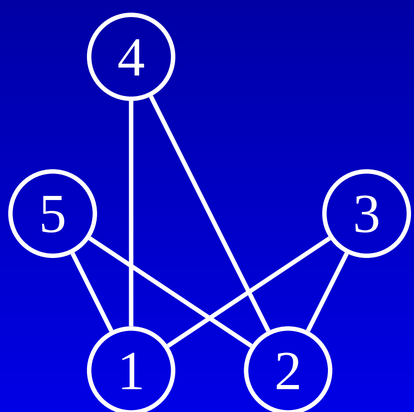
P^1 P^2

$$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$$

$$<^2 : 3 >^2 4 >^2 5 >^2 1 >^2 2$$

T^2

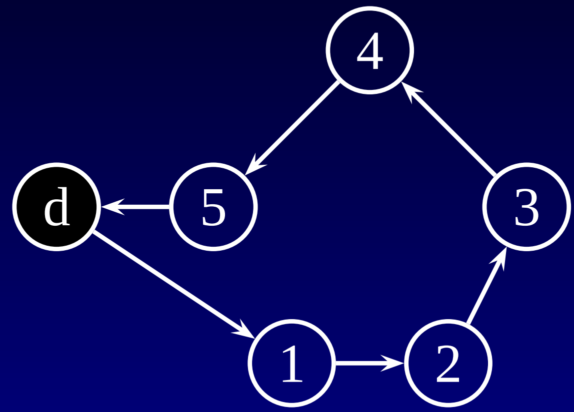


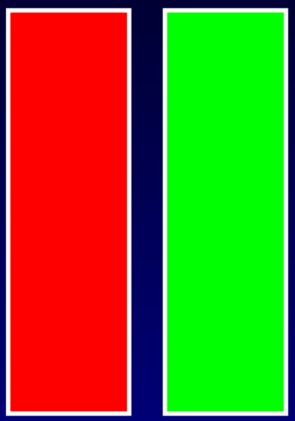


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



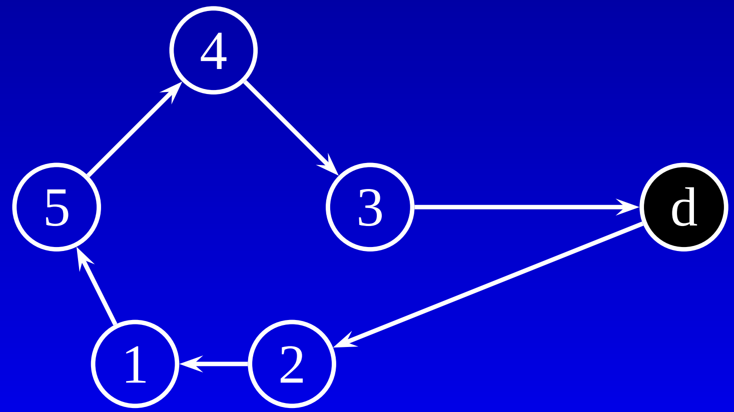


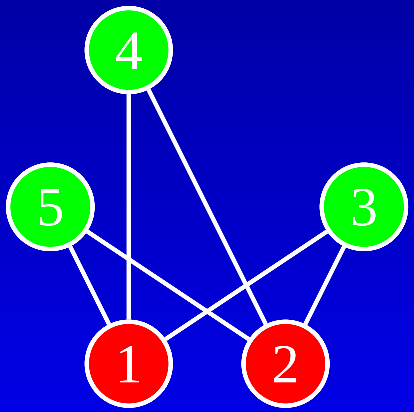
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 3 >^2 4 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2

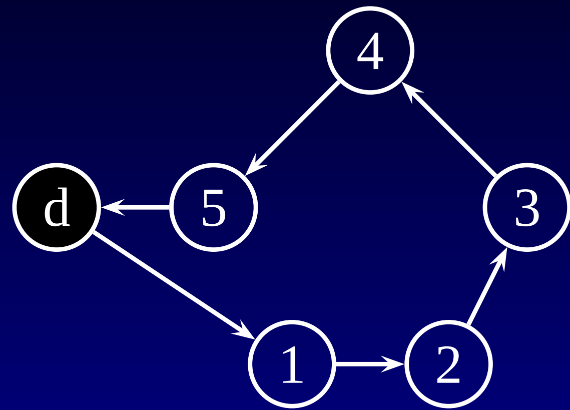


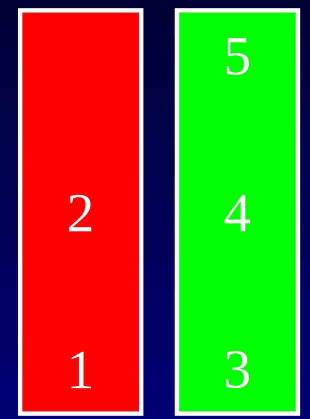


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



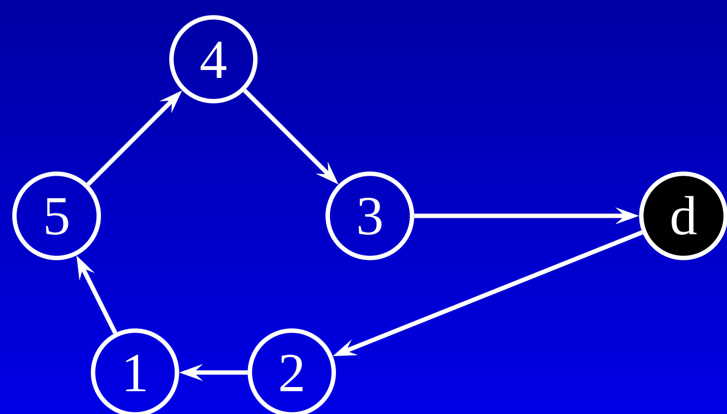


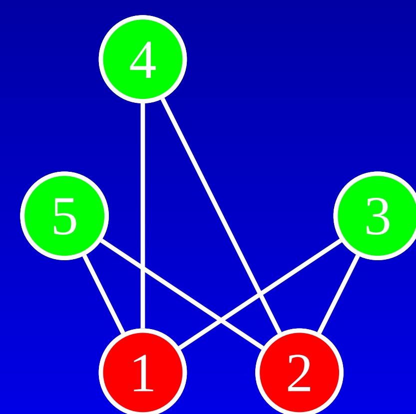
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 3 >^2 4 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2

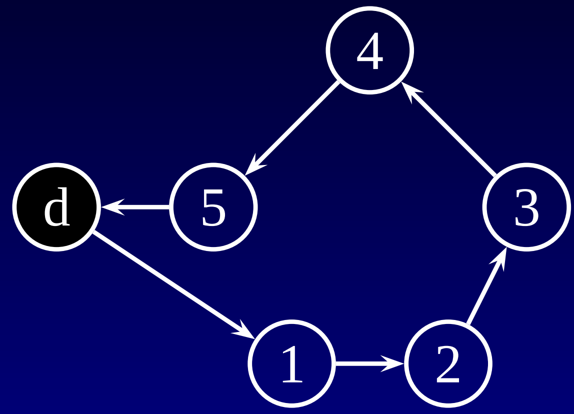


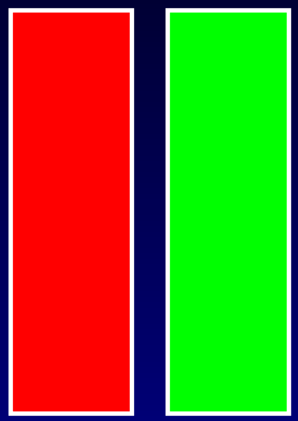


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



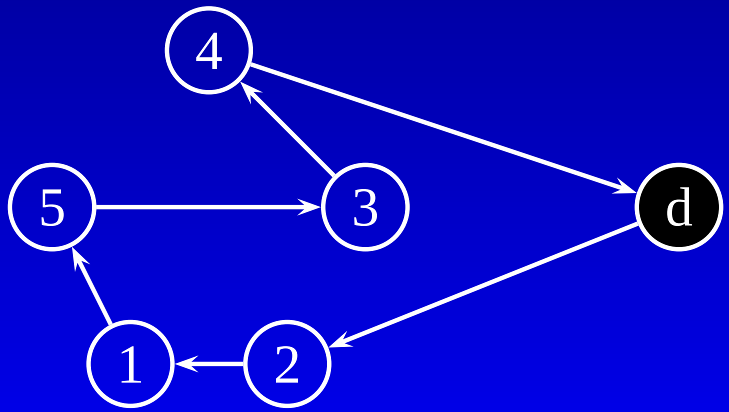


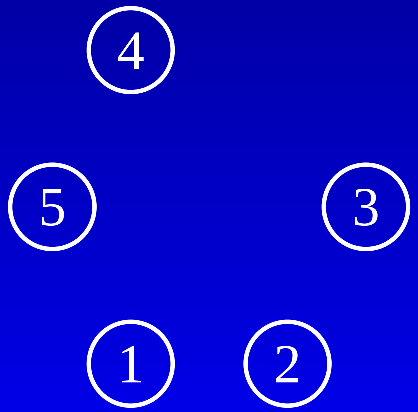
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 4 >^2 3 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2

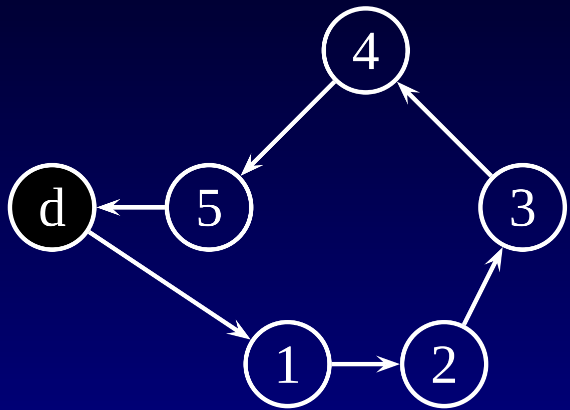


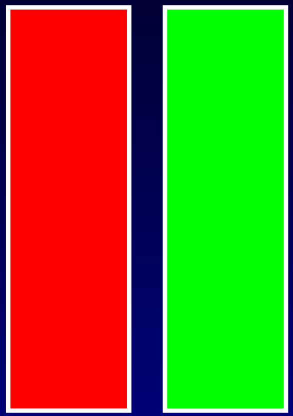


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



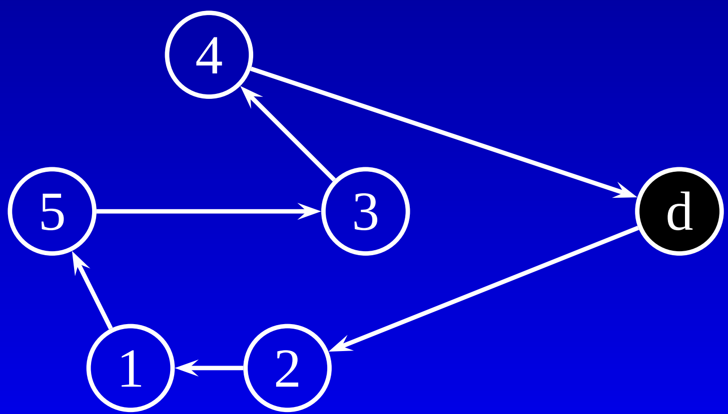


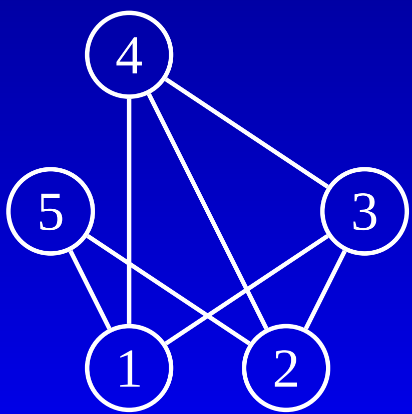
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 4 >^2 3 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2

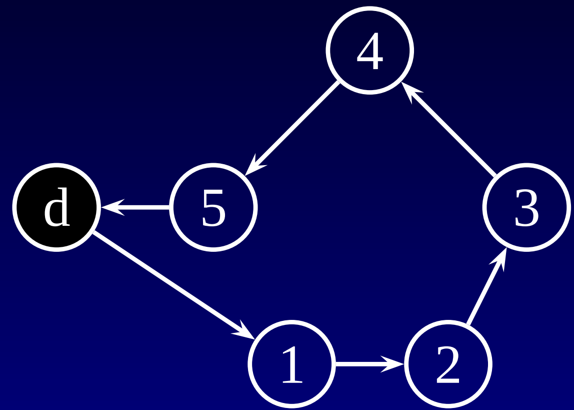


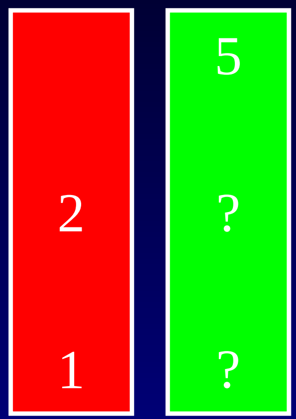


$G^{\neq}$

2 - Tours fixés - illustration

T^1



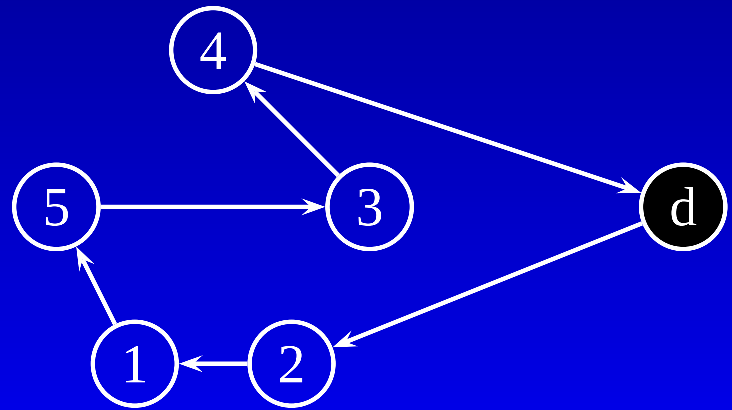


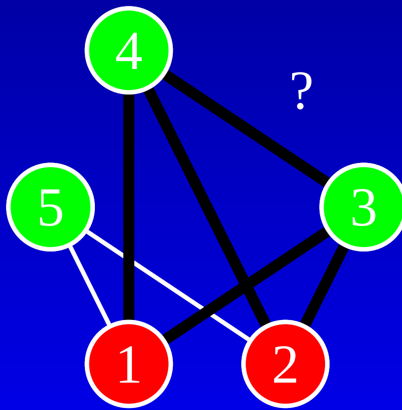
P^1 P^2

$<^1 : 1 <^1 2 <^1 3 <^1 4 <^1 5$

$<^2 : 4 >^2 3 >^2 5 >^2 1 >^2 2$

T^2





$G^{\neq}$

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est **P**

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est $\mathbf{P}$

Preuve : programmation dynamique

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est **P**
Preuve : programmation dynamique

- Dans chaque pile P^ℓ : $v^\ell_{q^\ell} <^3 \ldots <^3 v^\ell_1$

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est **P**
Preuve : programmation dynamique

- Dans chaque pile P^ℓ : $v^\ell_{q^\ell} <^3 \ldots <^3 v^\ell_1$
- Un tour T^2 se construit en i étapes : à l'étape i, i éléments au total ont été dépilés dans $P^1, \ldots, P^k$

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est **P**
Preuve : programmation dynamique

- Dans chaque pile P^ℓ : $v^\ell_{q^\ell} <^3 \ldots <^3 v^\ell_1$
- Un tour T^2 se construit en i étapes : à l'étape i, i éléments au total ont été dépilés dans $P^1, \ldots, P^k$
- L'état des piles est donné par le vecteur $e = (e_1, \ldots, e_\ell) \in \times_{\ell=1}^{k} [q^\ell + 1]$ de leur sommet courant

2 - Complexité - piles fixées

Sous-problème d'optimisation OptT

- Entrée : un partitionnement ordonné $\mathcal{P} = P^1, \ldots, P^k$
- Question : (T^1, T^2) optimal sachant $\mathcal{P}$?

Proposition : $OptT$ est **P**

Preuve : programmation dynamique

- Dans chaque pile P^ℓ : $v^\ell_{q^\ell} <^3 \ldots <^3 v^\ell_1$
- Un tour T^2 se construit en i étapes : à l'étape i, i éléments au total ont été dépilés dans $P^1, \ldots, P^k$
- L'état des piles est donné par le vecteur $e = (e_1, \ldots, e_\ell) \in \times_{\ell=1}^k [q^\ell + 1]$ de leur sommet courant

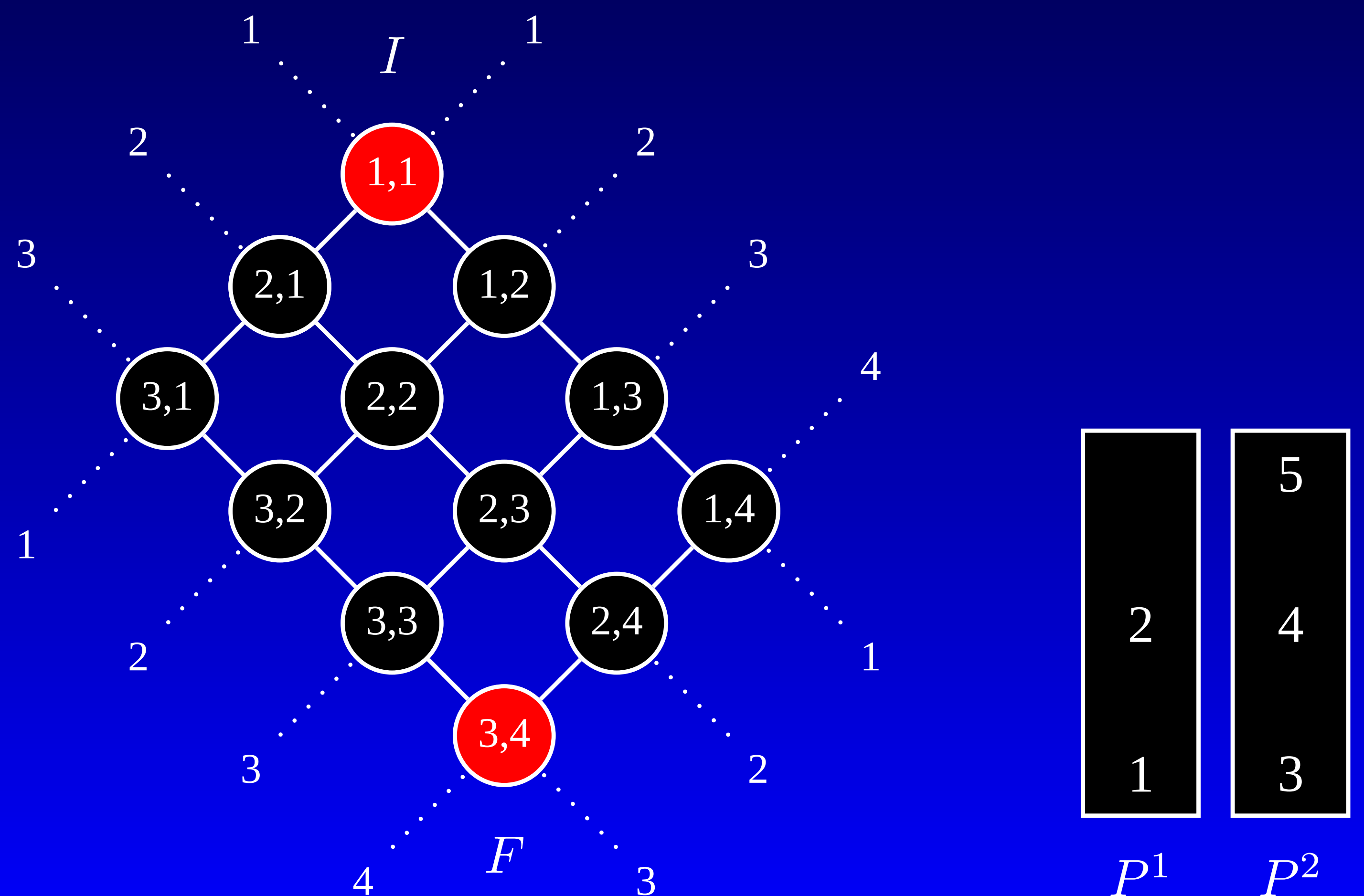
$\Rightarrow$ T^2 est l'enchaînement de $n+1$ états $e^0, e^1, \ldots, e^n$ *tq.* :

- $\|e^{i+1}\| = \|e^i\| + 1$ (où $\|e\| = \sum_{\ell=1}^k e_\ell$)
- $e^0 = I = (1, \ldots, 1)$ et $e^n = F = (q^1 + 1, \ldots, q^k + 1)$

2 - Piles fixées - preuve

États

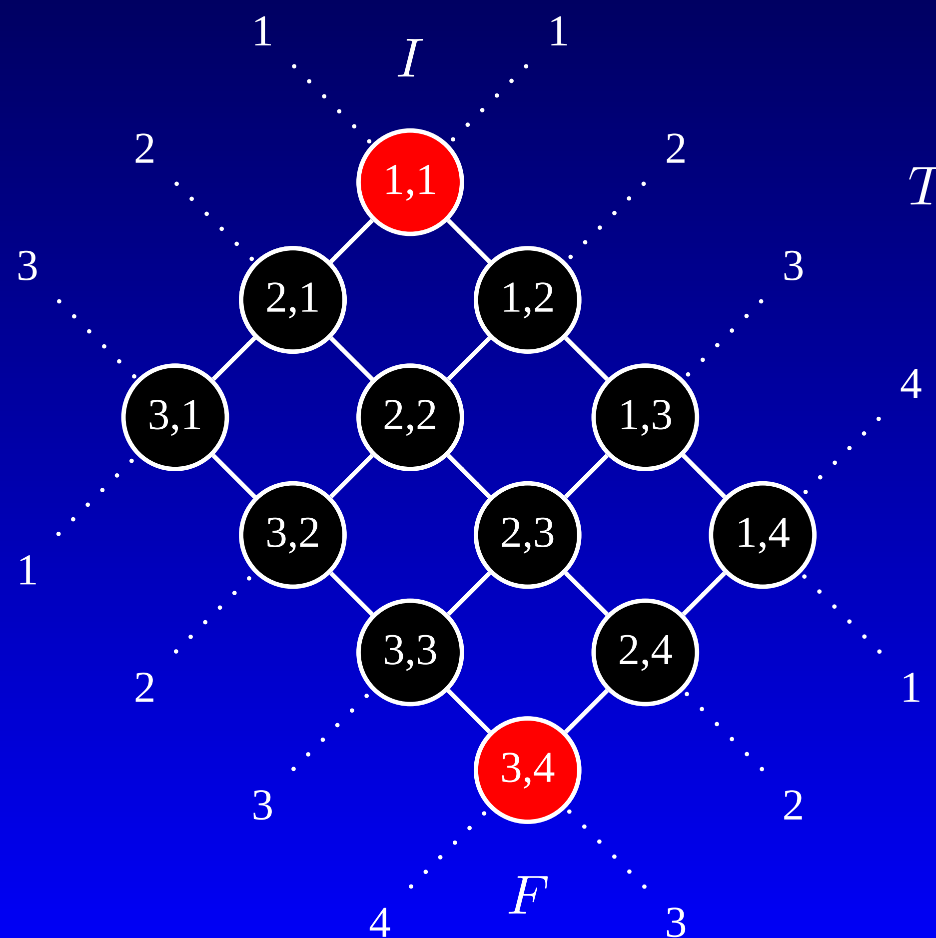
- nombre polynomial $\Pi_{\ell=1}^{k}(q^\ell + 1) = \mathcal{O}(n^k)$
- k précécesseurs $p(e,1),\ldots,p(e,k)$ possibles pour un état e



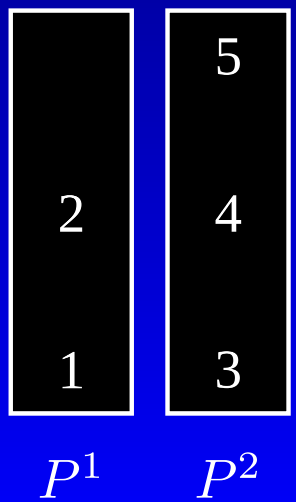
2 - Piles fixées - preuve

États

- nombre polynomial $\Pi_{\ell=1}^{k}(q^{\ell}+1)=\mathcal{O}(n^{k})$
- k précécesseurs $p(e,1),\ldots,p(e,k)$ possibles pour un état e



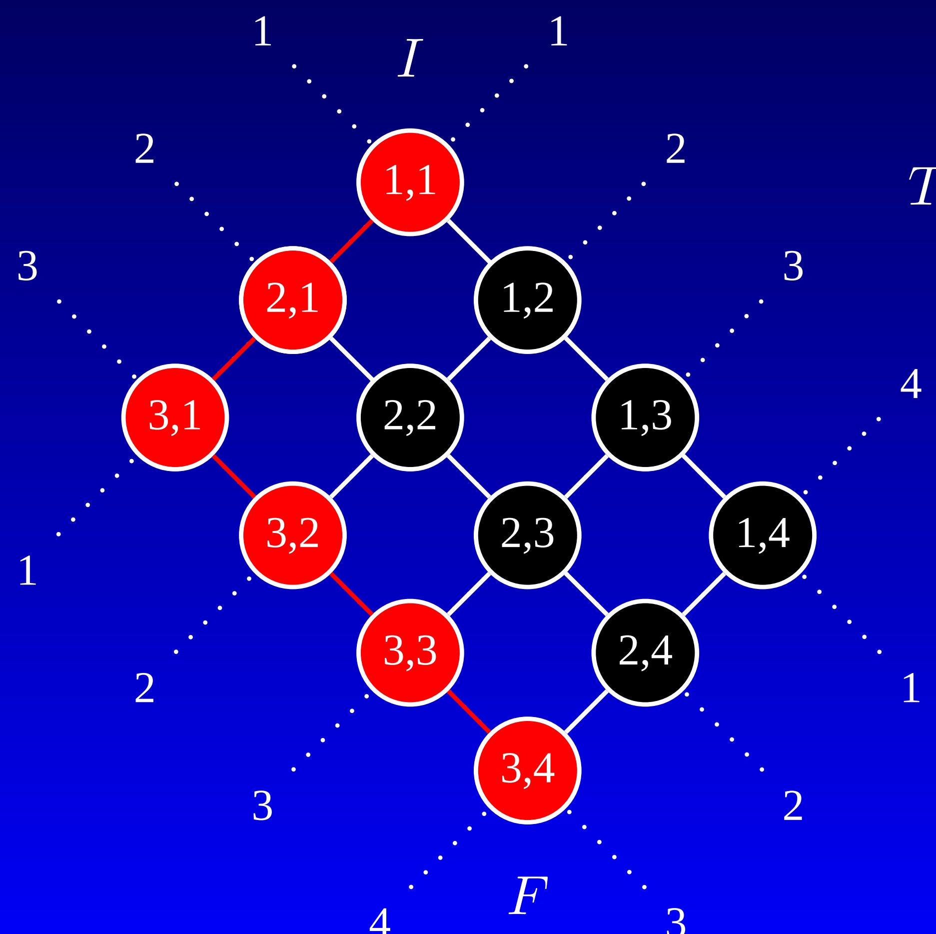
$T^2: 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$



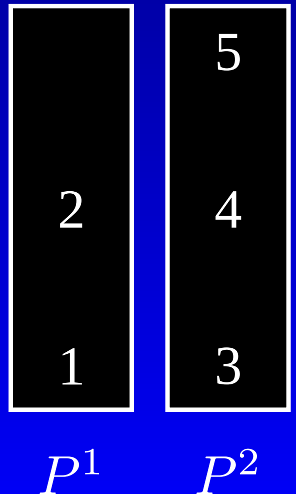
2 - Piles fixées - preuve

États

- nombre polynomial $\Pi_{\ell=1}^{k}(q^\ell + 1) = \mathcal{O}(n^k)$
- k précécesseurs $p(e,1), \ldots, p(e,k)$ possibles pour un état e



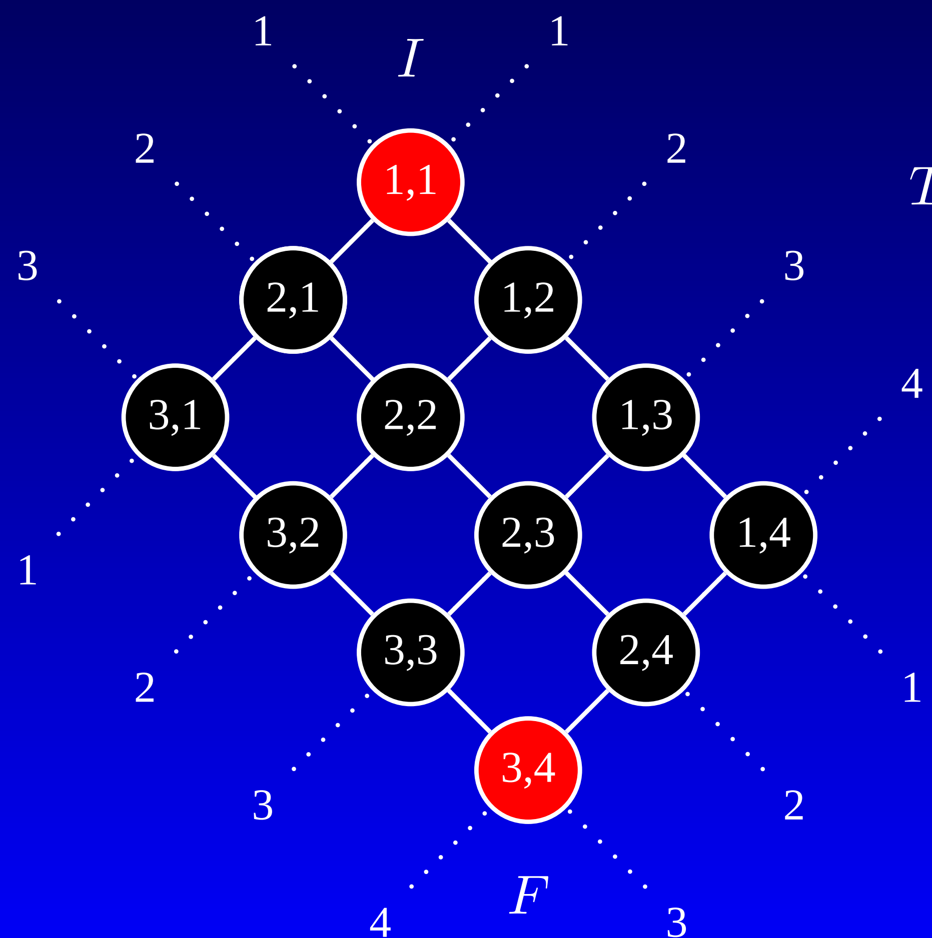
$T^2 : 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$



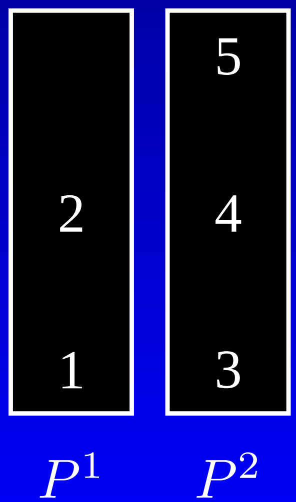
2 - Piles fixées - preuve

États

- nombre polynomial $\Pi_{\ell=1}^{k}(q^{\ell}+1)=\mathcal{O}(n^{k})$
- k précécesseurs $p(e,1),\ldots,p(e,k)$ possibles pour un état e



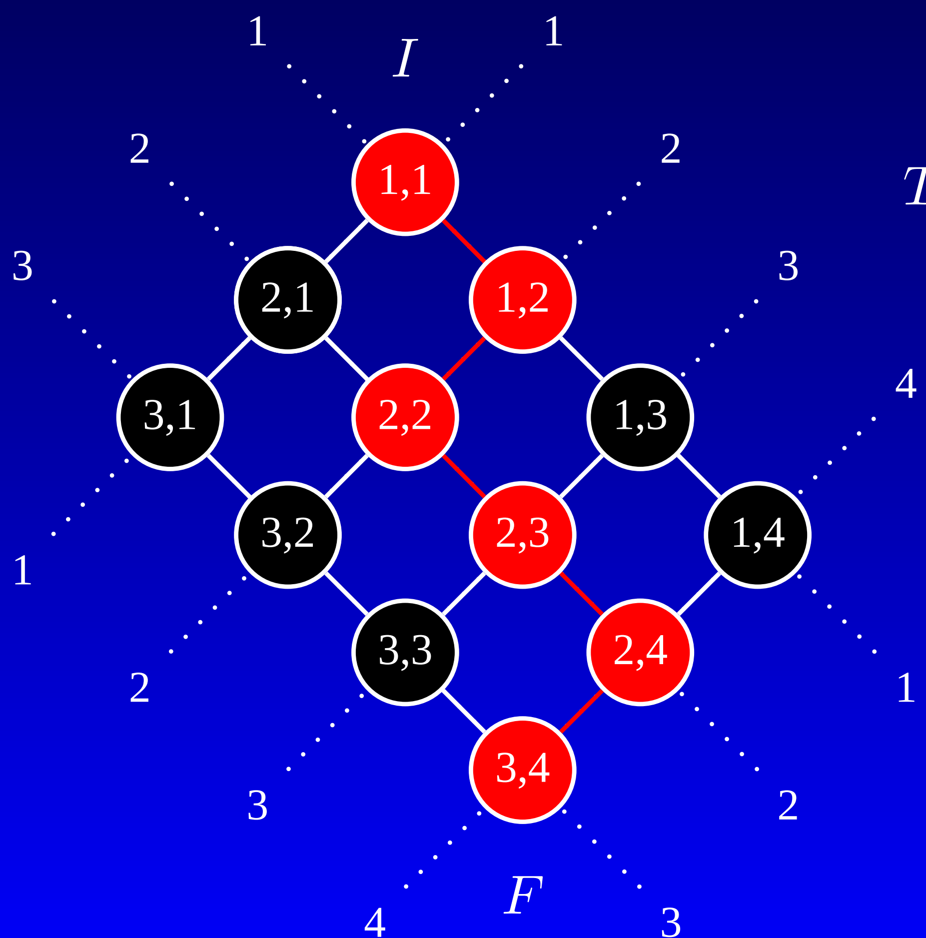
$$T^2 : 0 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$



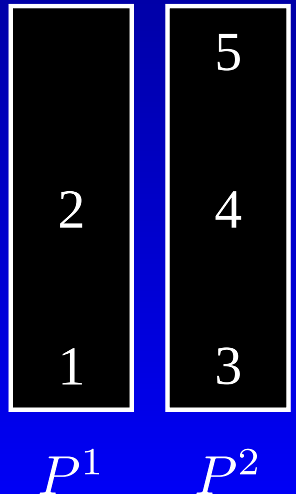
2 - Piles fixées - preuve

États

- nombre polynomial $\Pi_{\ell=1}^{k}(q^{\ell}+1) = \mathcal{O}(n^k)$
- k précécesseurs $p(e,1),\ldots,p(e,k)$ possibles pour un état e



$T^2 : 0 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1 \to 0$



2 - Programmation dynamique

États

- $\mathcal{S} = \times_{\ell=1}^{k}[q^{\ell}+1]$
- $I = (1,\ldots,1)$, $F = (q^1+1,\ldots,q^k+1)$, $I^{\ell} = (1,\ldots,1,2,1\ldots,1)\forall\ell$
- k précécesseurs $p(e,1),\ldots,p(e,k)$ possibles pour un état e

2 - Programmation dynamique

États

- $\mathcal{S} = \times_{\ell=1}^{k}[q^\ell + 1]$
- $I = (1, \ldots, 1)$, $F = (q^1 + 1, \ldots, q^k + 1)$, $I^\ell = (1, \ldots, 1, 2, 1 \ldots, 1) \forall \ell$
- k précécesseurs $p(e, 1), \ldots, p(e, k)$ possibles pour un état e

Étiquettes

- $\mathcal{E}(e, \ell)$ meilleur coût pour aller de I à e en arrivant par $p(e, \ell)$
- conditions initiales :
  $$e_\ell = 1 \Rightarrow \mathcal{E}(e, \ell) = +\infty, \quad e = I^\ell \Rightarrow \mathcal{E}(e, \ell) = d^2(0, u_1^\ell)$$
- condition finale :
  $\mathcal{E}(F, \ell) = \min_{\ell'=1}^{k}\{\mathcal{E}(p(F, \ell), \ell') + d^2(v^{\ell'}_{p(F,\ell)^{\ell'}}, v^{\ell}_{q^\ell}) + d^2(v^{\ell}_{q^\ell}, 0)\}$
- récurrence :
  $\mathcal{E}(e, \ell) = \min_{\ell'=1}^{k}\{\mathcal{E}(p(e, \ell), \ell') + d^2(v^{\ell'}_{p(e,\ell)^{\ell'}}, v^{\ell}_{e^\ell})\}$

Algorithm 1: LIVRAISON OPTIMALE($\mathcal{P}$)

Entrées: $d^2 : \{0\} \cup [n] \to \mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ k-partitionnement ordonné.

Sorties: T^2 tour de livraison optimal pour $\mathcal{P}$.

```
// Initialisation
```

pour $e \in \mathcal{S}, \ell \in [k]$ tq. $e^\ell = 1$ **faire** $\mathcal{E}(e, \ell) \longleftarrow +\infty$;

pour $\ell \in [k]$ **faire** $\mathcal{E}(f(\ell), \ell) \longleftarrow d^1(0, v_1^\ell)$;

```
// Récurrence (hyp.  aucune pile vide)
```

pour $p = k + 2$ *à* $n + k - 1$ **faire**

  pour $e \in \mathcal{S}$ *tq.* $\|e\| = p$ **faire**

    pour $\ell = 1$ *to* k *tq.* $e^\ell \geq 2$ **faire**

      $\mathcal{E}(e, \ell) \longleftarrow \min_{\ell'=1}^{k} \{\mathcal{E}(p(e, \ell), \ell') + d^1(v^{\ell'}_{p(e,\ell)^{\ell'}}, v^\ell_{e^\ell}) | p(e, \ell)^{\ell'} \geq 2\}$;

```
// Terminaison
```

pour $\ell = 1$ *to* k *tq.* $F^\ell \geq 2$ **faire**

  $\mathcal{E}(F, \ell) \longleftarrow \min_{\ell'=1}^{k} \{\mathcal{E}(p(F, \ell), \ell') + d^1(v^{\ell'}_{p(F,\ell)^{\ell'}}, v^\ell_{F^\ell}) + d^1(v^\ell_{F^\ell}, 0) | p(F, \ell)^{\ell'} \geq 2\}$;

return T^2 le tour associé à l'étiquette $\arg\min\{\mathcal{E}(F, q^\ell) \mid \ell = 1, \ldots, k\}$;

Complexité : $\mathcal{O}((n+1)^k)$

2 - Complexité - conséquences

Problèmes polynomiaux

- TSP avec contraintes de précédence,
- ordonnancement avec contraintes de précédence et temps/coût de transtion, temps/coût de complétion ...
- ... pour C induisant un ordre strict partiel en au plus k ensembles ordonnés

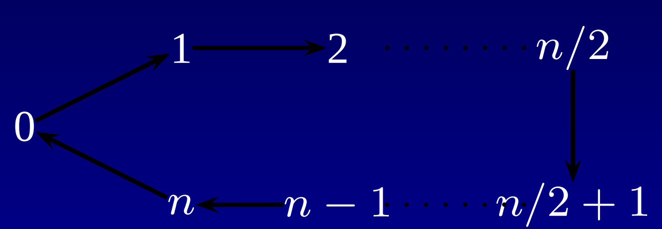
Perspectives de résolution exacte

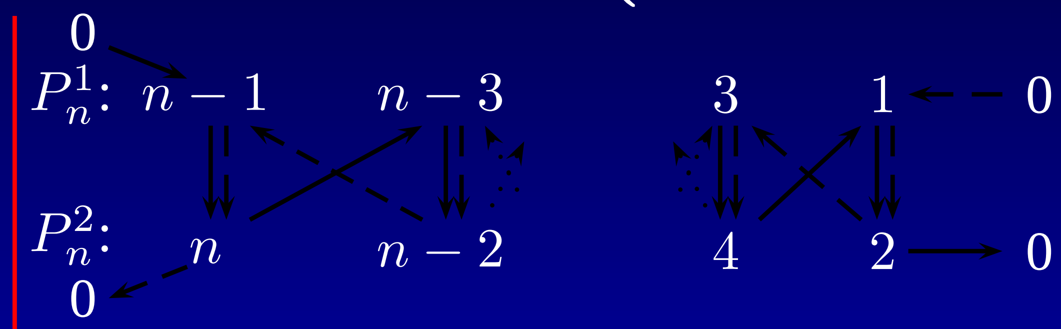
- décompostion sur les contraintes (type Benders)

3 - Optimisation à partir de TSP

Meilleure solution $(T^1, T^2, \mathcal{P})$ sachant T^1 : instances I_n

$$d^1_n(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v = u+1 \\ 1+\varepsilon & \text{otherwise} \end{cases} \qquad d^2_n(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = u+1 \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$





d^1_n, d^2_n: arcs de distance 1

Les tours optimaux :
T^1_n en trait pleine, T^2_n en trait haché

- Tours optimaux pour TSP de valeur $n+1$ pour d^1 comme pour d^2
- En fixant $T^1 = (0, 1, 2, \ldots, n, 0)$, le meilleur T^2 fait plus que $n^2/2$
- Tandis que la valeur optimale 2STSP $\sim (2+\varepsilon)n$

3 - Optimisation à partir de TSP

Meilleure solution $(T, T, \mathcal{P})$ pour $d = 1/2d^1 + 1/2d^2$

condition		$d^1_n(u,v)$	$d^2_n(u,v)$	$d^1_n + d^2_n$
si	$v = u \pm 1$	1	n	$n+1$
sinon si	$v = u \pm 2$	1	$n+1$	$n+2$
sinon si	$u + v \in \{n+1, n+3\}$	$n+1$	1	$n+2$
sinon		$n+1$	$n+1$	$2n+2$

- Tours optimaux pour 2STSP de valeur $d^1_n(T^{1,*}_n) = n+1$ et $d^2_n(T^{2,*}_n) \sim 7n$
- Tandis que l'optimum $T^*_{n,1/2} = (0, 1, 2, \ldots, n, 0)$ vaut $(n+1)^2$

4 - Conclusion

“*Reste*” à faire . . .

- Résolution exacte : décompostion
- Contraintes de précédence : caractérisation instances **P**
- Résolution approchée : approximation (1/2 différentielle ?)

Bibliographie

[1] Allahverdi A., Gupta J.N.D., Aldowaisan T.: *A review of scheduling research involving setup considerations*. Omega 27(2):219-239 (1999)

[2] Burkard R.E., Deineko V.G., Woeginger G.J.: *The Travelling Salesman and the PQ-Tree*. In Proc. 5th Internat. IPCO Conference, LNCS 1084:490-504 (1996).

[3] Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.: *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey*. Ann. of Discrete Math. 5:287-326 (1979).

[4] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.: *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*. Combinatorica 1(2):169-197 (1981).