Licence Info
Cours math_info

Dénombrabilité

<u>Proposition</u> : toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit dénombrable.

Supposons $E \subseteq \mathbb{N}$ et E non fini $\quad \# E \leq \# \mathbb{N}$

Construisons une bijection de E dans $\mathbb{N}$ en posant

$$f \begin{cases} E \to \mathbb{N} \\ k \mapsto \# \{n \in E,\ n < k\} \end{cases} \quad \text{Soit } A_k = \{n \in E \ n < k\}$$

- f est injective car si $k < k'$ $\quad k \in A_{k'}$
  $f(k) = \# A_k$. $\quad A_k \subsetneq A_{k'}$ donc $f(k) < f(k')$ or une fonction strictement croissante est injective
- f est surjective
  raisonnons par l'absurde, si $\exists n \in \mathbb{N}$ $f^{-1}(n) = \phi$,
  alors $\{n \in \mathbb{N},\ f^{-1}(n) = \phi\}$ est non vide donc minoré.
  Soit n_0 son plus petit élément

  $n_0 > 0$ car $\quad E \neq \phi$ ~~et est infini~~

  donc $f^{-1}(n_0 - 1) \neq \phi$ soit $k_0 = f^{-1}(n_0 - 1)$

  E étant infini, $\exists k_1$ successeur de k_0 dans E

  $$A_{k_1} = A_{k_0} \cup \{k_0\} \text{ donc } f(k_1) = f(k_0) + 1 = n_0$$

  d'où la contradiction

f est donc bijective donc E est dénombrable.

<u>Corollaire</u> : $\# \mathbb{N} = \omega$ est le premier cardinal non fini.

Il faut prouver que si X est un ensemble dénombrable quelconque et A une partie de X, soit A est finie soit A est dénombrable.

$$i_A \begin{cases} A \hookrightarrow X \\ x \mapsto x \end{cases} \text{ injective} \quad \underset{\text{bijective}}{\varphi : X \to \mathbb{N}}$$

$i_A \circ \varphi : A \hookrightarrow \mathbb{N}$ est injective

donc $i_A \circ \varphi(A)$ est une partie de $\mathbb{N}$ en bijection avec A

donc $i_A \circ \varphi(A)$ est soit finie soit dénombrable $\Rightarrow$

A est fini ou dénombrable.

<u>Proposition</u> : les opérations ensemblistes finies d'ensembles au plus dénombrables ont des résultats ~~des~~ au plus dénombrables

preuve : TD

[$\mathbb{N}^2$ est dénombrable. cf TD
Le produit cartesien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

[L'union dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable.
cf TD $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

[L'union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable

$$E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Soit $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ qui correspond à l'ordonnancement de $A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}, \dots\}$

$$s : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \\ (i, n) \mapsto f_i^{-1}(n) = a_{in} \end{cases}$$ est une surjection

[non injective si les A_i ne sont pas 2 à 2 disjoints]

donc $\# E \leq \# \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

or E n'est pas fini donc E est dénombrable.

__Argument de la diagonal ou comment démontrer qu'un ensemble n'est pas dénombrable [méthode classique] qd ses objets sont eux même représentables__

__par des suites infinies à valeur dans un domaine ayant au moins deux éléments__

Un ensemble infini n'est pas dénombrable si, par définition, il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et lui.
Soit E un tel ensemble. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) avec E, c'est-à-dire qu'on peut ordonner ses éléments en une liste

$E = \{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$

puisque chaque e_i peut être représenté par une suite infinie

$e_{i0}\, e_{i1}\, e_{i2} \dots e_{in} \dots$

On peut représenter E dans un tableau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{lcllllll}
E: e_0 & = & e_{00} & e_{01} & e_{02} & \cdots & e_{0n} & \cdots \\
e_1 & = & e_{10} & e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} & \cdots \\
e_2 & = & e_{20} & e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
e_n & = & e_{n0} & e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

On construit alors un nouvel élément $t \in E$ qui ne peut pas être dans la liste en agissant uniquement sur les éléments diagonaux $e_{00}\ e_{11}\ e_{22} \cdots e_{nn} \cdots$

Il est nécessaire pour cela que les coefficients e_{ij} puissent prendre au moins deux valeurs $\heartsuit$ et $\blacksquare$;

Soit $t = t_0\ t_1\ t_2 \cdots t_n \cdots$

tel que $t_n = \heartsuit$ si $e_{nn} \neq \heartsuit$

$t_n = \blacksquare$ si $e_{nn} = \heartsuit$

dans ce cas : • t est par construction dans E

• $\forall n \in \mathbb{N}$ $t \neq e_n$ car $t = e_n \Rightarrow t_n = e_{nn}$ ce qui n'est pas le cas

donc $t \in E$ et t n'est pas dans la liste, ce qui signifie que t n'a pas d'antécédent par f, ie f n'est pas surjective donc non bijective

Application : $[0,1[\subseteq \mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

$A^{\mathbb{N}}$ non dénombrable ssi $\# A \geqslant 2$.

Proposition: il n'y a pas de bijection de E dans 2^E $(= \mathcal{P}(E))$

- Il existe une injection naturelle de $\begin{cases} E \to 2^E \\ x \mapsto \{x\} \end{cases}$ qui n'est pas surjecti
  $E \neq \emptyset$

  donc $\# E \leqslant \# 2^E$

- Montrons qu'il n'existe pas de surjection de $E \to 2^E$
  Soit f une fonction quelconque de $E \to 2^E$
  Considérons $A_f = \{ x \in E,\ x \notin f(x) \}$
  - $A_f \subseteq E$ donc $A_f \in 2^E$
    exemple $E = \{a, b\}$ $2^E = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$
    $f(a) = \emptyset$ $f(b) = \{b, a\}$ $A_f = \{a\}$
    $f^{-1}(A_f) = \emptyset$, A_f n'a pas d'antécédent

    montrons que $\forall E$ non vide, $\forall f : E \to 2^E$ $f^{-1}(A_f) = \emptyset$

raisonnons par l'absurde : soit $a \in E$ tel que $f(a) = A_f$
de deux choses l'une : soit $a \in A_f$ soit $a \notin A_f$
- si $a \in A_f$, alors par définition de A_f $a \notin A_f$ absurde
- si $a \notin A_f$ " " " " " $a \in A_f$ "

donc un tel a ne peut exister, A_f n'a pas d'antécédent par f ∎

Applications

- si $\# E = n$ $\# 2^E = 2^n$ donc $\forall n \geqslant 1$ $n < 2^n$

- Il ne peut y avoir d'ensembles de tous les ensembles
  sinon soit $\mathscr{E}$ un tel ensemble $\mathscr{E} = \mathcal{P}(\mathscr{E})$

- Il n'existe pas de plus grand cardinal
  $\omega = \# \mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini
  mais pas de plus grand cardinal infini
  (0 plus petit cardinal fini, pas de plus gd cardinal fini)

Remarques
- hypothèse du continu : le successeur de ω est $\# \mathbb{R}$.
- th. de Schröder-Bernstein : $|E| < |F|$ ou $|E| = |F|$ ou $|E| > |F|$ $\forall E, F$ deux ensembles.