LES TOPOS DE DE MORGAN

SUPERVISEUR: MORGAN ROGERS (AUCUN LIEN DE PARENTÉ)

1. Cours préalables

Introduction aux catégories
ET/OU
Cours de logique du premier ordre

On n'aura pas le temps pendant le stage de partir de zero dans les deux domaines, mais une base de connaissance en catégories ou en logique pourra suffir.

2. Contexte

Les *catégories* sont des structures à caractère algébrique qui capturent les relations entre objets mathématiques. Les catégories peuvent servir de contextes dans lesquels interprété les ingrédients syntactique de la logique. Inversement, toute catégorie admet une logique formelle qui sert à raissonner dans cette catégorie, sa *langage interne*. Tout cela fait partie du domaine de la *logique catégorique*.

Un *topos*[1] est une catégorie très structurée. La logique intuitioniste (même d'ordre supérieur) est valide dans le langage interne d'un topos quelconque. Par contre, la logique classique, avec le principe du tiers exclu, n'est valide uniquement dans un topos *Booléen*. Entre ces deux extrêmes, on trouve la logique et les topos de *De Morgan*, où le principe de déduction,

$$\neg(p \wedge q) \vdash (\neg p \vee \neg q)$$

est valide. Pour les topos il y a une longue liste de conditions équivalentes à la propriété d'être De Morgan, voir [3, §D4.6].

Tout topos admet un unique *morphisme géométrique* vers la catégorie des ensembles, constitué d'une paire de foncteurs adjoints ($\Delta \dashv \Gamma$). Il se trouve qu'un topos est Booléen exactement quand ce morphisme est *atomique*, ce qui veux dire que Δ préserve toute la structure 'logique'. Par contre, il n'y a pas de condition comparable connu qui charactérise les topos De Morgan.

Un résultat récent [2, Theorem 2.32] charactérise les *topos d'actions de monoïdes* qui sont De Morgan. Ceci font parti des topos dites *localement connexes*, où Δ admet un adjoint à gauche. On pourrait ainsi supposer:

Conjecture. Un topos localement connexe est De Morgan si et seulement si l'adjoint gauche de Δ préserve les monomorphismes.

Le but de projet sera de résoudre cette conjecture.
Supports du projet (ordre alphabétique): [1] [2] [3, §D] [4] [5].

[1] On travaillera avec les topos de Grothendieck, mais les principes du langage interne s'appliquent à la classe plus large de topos élémentaires.

References

[1] R. Harun. *Applications of De Morgan toposes and the Gleason cover*. PhD thesis, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montréal, 1996.
[2] J. Hemelaer and M. Rogers. Monoid Properties as Invariants of Toposes of Monoid Actions. *Applied Categorical Structures*, 2020.
[3] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium, volumes 1 and 2*. Clarendon Press Oxford, 2002.
[4] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, 1992.
[5] E. Riehl. *Categories in Context*. Dover Publications, 2016.