

# RÉSULTATS SUR LES GRAPHS DE FLIPS

---

Lionel Pournin

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches,  
soutenu le 4 décembre 2013 devant le jury composé de :

**Rapporteurs**

Sylvie Corteel	CNRS, Université Paris Diderot
Claire Mathieu	CNRS, École Normale Supérieure
Michel Pocchiola	Université Pierre et Marie Curie

**Examineurs**

Éric Colin de Verdière	CNRS, École Normale Supérieure
Patrick Dehornoy	Université de Caen
Ridha Mahjoub	Université Paris Dauphine



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Triangulations et flips</b>	<b>3</b>
2.1	Les triangulations régulières . . . . .	4
2.2	Une définition des flips . . . . .	5
2.3	Les graphes de flips . . . . .	8
2.3.1	Une méthode de régularisation . . . . .	9
2.3.2	Connexité des graphes de flips . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Une généralisation de la régularité</b>	<b>13</b>
3.1	La notion de $k$ -régularité d'une triangulation . . . . .	13
3.2	Premiers exemples . . . . .	15
3.2.1	Un premier critère de $k$ -régularité . . . . .	15
3.2.2	Deux exemples en dimension 3 . . . . .	18
3.3	La régularité faible . . . . .	21
3.3.1	Cas de la dimension 2 . . . . .	23
3.3.2	Exemple et discussion . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Une caractérisation de la <math>k</math>-régularité</b>	<b>29</b>
4.1	L'espace des dépendances affines . . . . .	30
4.2	Quelques bornes supérieures sur $m$ . . . . .	36
4.3	Résultats de connexité des graphes de flips . . . . .	40
4.4	Le graphe $\gamma_3$ n'est pas toujours connexe . . . . .	42

<b>5</b>	<b>Le cube de dimension 4</b>	<b>43</b>
5.1	Les triangulations coupe coins . . . . .	44
5.2	Des flips dans les coins du cube de dimension 4 . . . . .	45
5.3	Le graphe des flips de $\{0,1\}^4$ est connexe . . . . .	49
5.4	Discussion . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Le diamètre des associaèdres</b>	<b>55</b>
6.1	Égalités et inégalités sur les distances de flip . . . . .	56
6.2	Deux triangulations à distance maximale . . . . .	59
6.3	Ébauche de la preuve . . . . .	61
6.4	Discussion . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>69</b>
7.1	Géométrie discrète . . . . .	69
7.2	Géométrie algorithmique . . . . .	70
7.3	Combinatoire géométrique . . . . .	70
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

---

---

# Chapitre 1

---

## Introduction

Ce mémoire présente les résultats de géométrie discrète et de combinatoire géométrique que j'ai obtenu dans les quelques dernières années [47, 48, 49, 50, 52, 51]. Ces résultats portent principalement sur les triangulations d'ensembles finis de points et sur leurs graphes des flips. En dimension 2, une triangulation est une décomposition d'un polygone en triangles qui s'intersectent selon des arêtes ou des sommets communs (voir, par exemple la figure 2.2). Certaines triangulations, dites *régulières* [10] ont des propriétés qui en font des outils importants dans de nombreux domaines des sciences (cristallographie, géométrie algorithmique, optimisation mathématique, analyse numérique, combinatoire géométrique). Ces objets ont une longue histoire puisque leurs structures duales ont été mentionnées au XVIIe siècle par Johannes Kepler dans ce qui est considéré comme le premier essai de cristallographie [32], et par René Descartes pour l'étude de la distribution de la matière dans l'univers [13]. Près de quatre siècles plus tard, les triangulations régulières ont été l'un des outils utilisés par Thomas Hales pour prouver la conjecture de Kepler [26].

Les flips sont des opérations qui modifient une triangulation localement (quelques flips sont représentés dans la figure 2.3). Considérons un ensemble fini de points  $E$ . La première question abordée dans ce mémoire porte sur la possibilité de transformer deux triangulations de  $E$  l'une en l'autre par une succession de flips. Autrement dit : *le graphe dont les sommets sont les triangulations de  $E$  et dont les arêtes correspondent aux flips est-il connexe ?* Ce graphe s'appelle le graphe des flips de  $E$ , et son sous-graphe induit par les triangulations régulières est connexe [22, 23]. Je vais définir dans le chapitre 3 une généralisation de la notion de régularité qui permet d'exhiber un sous-graphe connexe beaucoup plus grand dans le graphe des flips de  $E$  : celui qui est induit par les triangulations *2-régulières*. La connexité de ce nouveau sous-graphe, obtenue dans [49], ne sera pas prouvée ici. Plusieurs exemples classiques de triangulations non-régulières seront étudiés dans le chapitre 3 afin de justifier que ce sous-graphe est beaucoup plus grand que celui qui est induit par les triangulations régulières. Il sera montré en particulier que toutes les triangulations de  $E$  sont 2-régulières lorsque  $E$  est de dimension 2. Une caractérisation de la  $k$ -régularité sera donnée dans le chapitre 4, qui permet d'obtenir la 2-régularité de certaines triangulations, et la connexité de certains graphes des flips.

Cette caractérisation s'appuie sur une construction dans l'espace des dépendances affines de  $E$ , voisine de la transformée de Gale [24, 85].

Le graphe des flips de certains ensembles finis de points bien structurés est connexe, comme par exemple pour l'ensemble des sommets de tout polytope cyclique [64]. D'autre part, certains ensembles de points dont le graphe des flips est non-connexe ont été trouvés par Francisco Santos [10, 70, 71]. Le cas des cubes est loin d'être fermé. Il est facile de montrer que les graphes de flips du carré et du cube (de dimension 3) sont connexes [9]. La preuve que ceci est également vrai pour le cube de dimension 4 sera présentée dans le chapitre 5. Ceci résoud un problème resté longtemps ouvert [10]. Une conséquence importante de ce résultat est la possibilité d'énumérer complètement les triangulations du cube de dimension 4 à l'aide du logiciel TOPCOM programmé par Jörg Rambau [65] : il admet 92487256 triangulations réparties en 247451 classes de symétrie. Le problème reste ouvert pour les cubes de dimension supérieure à 4. En particulier, la preuve présentée dans le chapitre 5 comporte une partie informatisée dont la généralisation aux cubes de dimension supérieure paraît difficile.

La deuxième question abordée dans ce mémoire est celle du diamètre du graphe des flips quand celui-ci est connexe. Peu de choses sont connues à ce sujet quand  $E$  est un ensemble de points quelconque. Quand  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polygone, Daniel Sleator, Robert Tarjan et William Thurston ont montré que le graphe des flips de  $E$  n'est jamais plus grand que  $2|E| - 10$  quand  $|E| > 12$  et que cette borne est atteinte dès que  $E$  contient suffisamment de points [75]. Leur preuve s'appuie sur une construction élégante dans l'espace hyperbolique, qui a aussi été utilisée pour borner la simplicité des cubes [76]. Daniel Sleator, Robert Tarjan et William Thurston s'étonnent dans leur article du rôle de la géométrie pour prouver un énoncé essentiellement combinatoire. En outre, leur preuve ne permet pas de connaître le nombre minimal de points de  $E$  au dessus duquel le diamètre de son graphe des flips est  $2|E| - 10$ , et ils conjecturent dans [75] que ce nombre de points est 12. Ces deux problèmes sont restés ouverts pendant presque 25 ans, et ont été résolus dans [47]. En d'autres mots, une preuve combinatoire que le diamètre du graphe des flips de  $E$  est  $2|E| - 10$  dès que  $|E| > 12$  a été obtenue. Cette preuve sera ébauchée dans le chapitre 6 de ce mémoire.

Les questions de la connexité et du diamètre des graphes de flips se posent naturellement quand on veut construire des triangulations régulières, ce qui est un exercice essentiel dans le cas de nombreuses applications, particulièrement en analyse numérique et en géométrie algorithmique [17, 18, 30, 31, 44, 46]. Une de ces applications, sur laquelle j'ai travaillé dans le cadre de ma thèse, est le maintien dynamique de triangulations régulières (voir [53, 54, 46, 55]) pour la détection efficace de contacts dans le contexte de la simulation numérique des milieux granulaires par éléments distincts [56, 57, 58, 59, 60, 62, 63]. Ces travaux ont été à l'origine des questions abordées dans ce mémoire. Les résultats présentés dans le chapitre 3 ont été publiés dans [49] (sections 3.1 et 3.2) et dans [50] (section 3.3). Les chapitres 4 et 5 exposent de manière simplifiée les résultats publiés respectivement dans [48] et dans [52]. Le chapitre 6 propose une ébauche de la preuve prépubliée dans [47] et dans [51].

Avant d'aborder les questions mentionnées ci-dessus, les objets sur lesquelles ces questions portent vont être définis formellement dans le chapitre 2, et certains résultats obtenus par d'autres auteurs, qui seront importants dans la suite, vont y être donnés.

---

---

# Chapitre 2

---

## Triangulations et flips

Pour tout ensemble  $E$ , on notera  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Considérons un sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$ . Un *complexe simplicial abstrait* sur  $E$  est un sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{P}(E)$  tel que pour tout élément  $s$  de  $A$ ,  $\mathcal{P}(s) \subset A$ . Les complexes simpliciaux abstraits sont habituellement définis de manière plus générale sans faire l'hypothèse que  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ . Cette hypothèse, qui sera conservée tout au long de ce mémoire, place les complexes simpliciaux abstraits dans un espace Euclidien. En particulier, la dimension de l'enveloppe affine de  $E$  sera appelée la *dimension* de  $E$  et sera notée  $\dim(E)$ . Les éléments d'un complexe simplicial abstrait  $A$  sur  $E$  seront appelés les *faces* de  $A$  et les points  $x$  de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $\{x\}$  appartient à  $A$  seront appelés les *sommets* de  $A$ . Le *domaine* de  $A$ , c'est-à-dire la réunion des enveloppes convexes des faces de  $A$  sera noté  $\text{dom}(A)$  :

$$\text{dom}(A) = \bigcup_{s \in A} \text{conv}(s).$$

Un *complexe simplicial*  $C$  sur  $E$  est un complexe simplicial abstrait sur  $E$  tel que les enveloppes convexes des éléments de  $C$  ont des intérieurs relatifs deux à deux disjoints. En d'autres termes, les faces d'un complexe simplicial abstrait sur  $E$  peuvent se « croi-

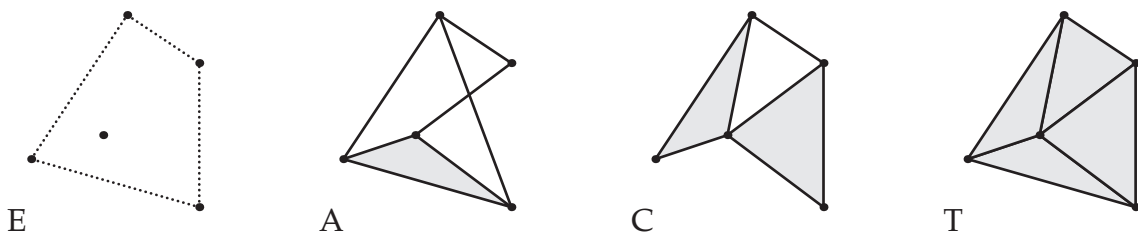


FIGURE 2.1 – Un complexe simplicial abstrait  $A$  sur l'ensemble de points  $E$ , un complexe simplicial  $C$  sur  $E$ , et une triangulation  $T$  de  $E$ . Les triangles appartenant à  $A$ ,  $C$  et  $T$  sont représentés en gris, et l'enveloppe convexe de  $E$  est montrée en pointillés.

ser », mais pas celles d'un complexe simplicial sur  $E$ , comme l'illustrent le complexe simplicial abstrait  $A$  et le complexe simplicial  $C$  représentés dans la figure 2.1.

Une *triangulation* de  $E$  est un complexe simplicial dont le domaine est l'enveloppe convexe de  $E$  (voir aussi figure 2.1). Un sommet d'une triangulation de  $E$  est dit *interne* si il appartient à l'intérieur relatif de  $\text{conv}(E)$ , et *externe* sinon. De même, une face d'une triangulation de  $E$  sera dite interne si son enveloppe convexe contient au moins un point dans l'intérieur relatif de  $E$ , et externe sinon. La triangulation  $T$  représentée dans la figure 2.1 admet, par exemple, un sommet interne et quatre sommets externes. En outre, parmi ses huit arêtes, quatre sont internes et quatre sont externes.

## 2.1 Les triangulations régulières

Un sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$  peut avoir beaucoup de triangulations. Un carré peut-être triangulé de deux manières et un cube de 74 manières [9]. Comme on le verra au chapitre 3, un hypercube de dimension 4 admet plus de 92 millions de triangulations (voir aussi [52])! Certaines des triangulations de  $E$  ont de bonnes propriétés qui les rendent importantes, tant pour la théorie que pour les applications. Ces triangulations sont appelées *régulières* ou *de Delaunay pondérées* (voir [38]). Parmi leurs utilisations, mentionnons que ces triangulations permettent de détecter efficacement les voisinages parmi un ensemble d'objets placés dans l'espace [46, 55]. De nombreuses autres utilisations des triangulations régulières sont décrites dans [38].

Les triangulations régulières de  $E$  peuvent être définies intuitivement de la manière suivante. Supposons que l'enveloppe affine de  $E$  est  $\mathbb{R}^d$  tout entier (notons que ceci peut se faire sans perte de généralité). On dit qu'une triangulation de  $E$  est régulière si elle peut être obtenue en projetant sur  $\mathbb{R}^d$  le bord inférieur (vu de  $\mathbb{R}^d$ ) d'un polytope de dimension  $d + 1$ . Formellement, la régularité d'une triangulation se définit en « soulevant » ses sommets dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  :

**Définition 1.** Une triangulation  $T$  de  $E$  est dite régulière si il existe une application  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour toute face  $f$  de  $T$ , il existe une application affine  $\xi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  qui coïncide avec  $w$  sur  $f$  et qui est inférieure à  $w$  sur  $E \setminus f$ . Dans ce cas, on dira que  $w$  réalise  $T$

Dans cette définition, la fonction  $w$ , souvent appelée *fonction de hauteur* sert à « soulever » chaque point  $x$  de  $E$  en un point  $x \uparrow w$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  dont les  $d$  premières coordonnées sont celles de  $x$ , et dont la coordonnée  $d + 1$  est  $w(x)$ . Afin d'expliquer la construction utilisée dans la définition 1, notons  $s \uparrow w = \{x \uparrow w : x \in E\}$  pour tout sous-ensemble  $s$  de  $E$ , et  $C \uparrow w = \{s \uparrow w : s \in C\}$  pour tout complexe simplicial abstrait  $C$  sur  $E$ . Si, pour chaque face  $f$  d'une triangulation  $T$  de  $E$ , l'enveloppe convexe de  $f \uparrow w$  est une face (inférieure) de  $\text{conv}(E \uparrow w)$ , alors  $T$  est régulière. En d'autres mots,  $T$  est régulière si le domaine de  $T \uparrow w$  est précisément le bord inférieur de  $\text{conv}(E \uparrow w)$ . Dans la définition ci-dessus, ceci est vérifié à l'aide de l'application affine  $\xi$ . Une fonction de hauteur  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  réalise *au plus* une triangulation de  $E$ . Si  $w$  n'est pas suffisamment générique, c'est-à-dire si  $\text{conv}(E \uparrow w)$  admet des faces inférieures qui ne sont pas des simplexes,

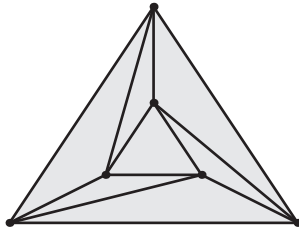


FIGURE 2.2 – Une triangulation non-régulière d'un ensemble de points de dimension 2.

alors  $w$  ne réalise pas une triangulation. Dans le cas contraire,  $w$  réalise exactement une triangulation de  $E$  qui sera notée  $R(w)$  dans la suite.

Considérons la triangulation  $T$  dessinée dans la figure 2.1. Il est facile de voir que cette triangulation est régulière. Pour cela, il suffit de soulever le sommet intérieur de cette triangulation hors du plan, ce qui place les quatre triangles de  $T$  sur une surface convexe qui est précisément le bord inférieur d'un polytope de dimension 3. Il existe des triangulations non-régulières dès que  $E$  est de dimension 2. L'exemple le plus courant d'une telle triangulation est représenté dans la figure 2.2. Dans ce cas  $E$  est constitué des sommets de deux triangles imbriqués. Une preuve élémentaire que cette triangulation est bien non-régulière est donnée au chapitre 7 de [10].

## 2.2 Une définition des flips

Les flips sont des opérations qui permettent de transformer localement une triangulation en une autre. La figure 2.3 montre quelques-unes de ces opérations. Malgré la diversité apparente, les flips peuvent être définis formellement de manière consistante. Avant d'énoncer cette définition, considérons le flip (I) dans la figure 2.3, qui consiste à échanger les diagonales d'un quadrilatère convexe. Ce type de flip est le plus naturel, et c'est le seul possible quand  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polygone. Il peut aussi être généralisé facilement aux triangulations de surfaces orientables quelconques [21, 43]. Bien sûr, pour qu'un tel flip puisse être effectué, il faut que  $E$  soit de dimension 2. Si  $E$  est de dimension 1, le seul flip possible est celui qui enlève ou qui ajoute un sommet (cas (II) dans la figure 2.3). Un flip similaire à (II) peut être effectué si  $E$  est de dimension 2 et contient trois sommets colinéaires (cas (III) dans la figure 2.3). Le troisième flip possible quand  $\dim(E) = 2$  est le flip (IV), qui est la généralisation en dimension 2 du flip (II). Les deux flips représentés dans le bas de la figure 2.3 peuvent être vus comme les généralisations respectives en dimension 3 des flips (I) et (II). Intuitivement, un flip est une transformation minimale d'une triangulation. Sa définition s'appuie sur la notion de circuit, qui porte ce caractère minimal :

**Définition 2.** *Un circuit d'un ensemble fini  $E \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble de  $E$  qui est affinement dépendant et dont tous les sous-ensembles propres sont affinement indépendants.*

En d'autres termes, un circuit est un sous-ensemble de  $E$  qui est minimalement affinement dépendant. Dans la figure 2.3, tous les ensembles de points dont la triangulation est modifiée par un flip sont des circuits sauf dans le cas (III), dans lequel le circuit est constitué des trois sommets colinéaires.

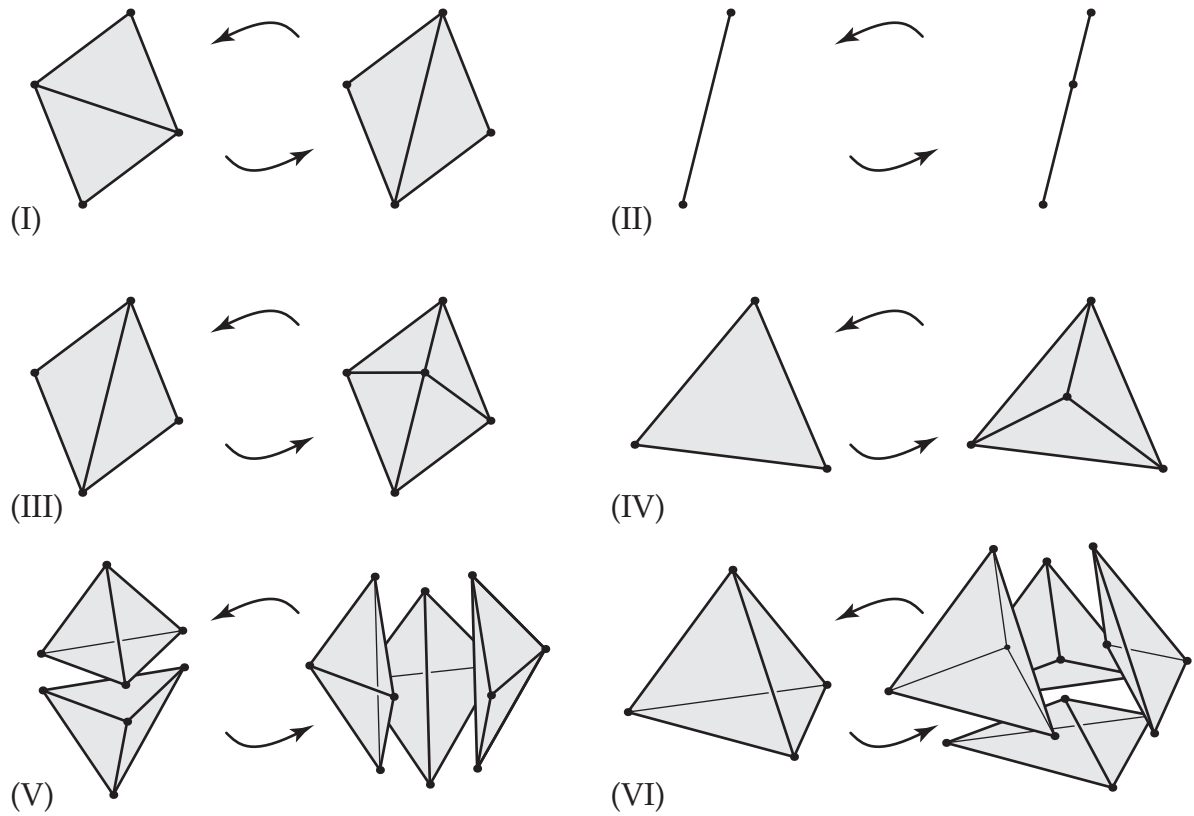


FIGURE 2.3 – Représentation de six flips en dimension 1, 2 et 3.

Un circuit  $z$  de  $E$  peut être triangulé d'exactement deux manières. Ceci découle du théorème de Radon sur les ensembles convexes [61]. D'après ce théorème, un circuit  $z$  de  $E$  admet une unique partition  $\{z^-, z^+\}$  telle que les enveloppes convexes de  $z^-$  et de  $z^+$  sont non-disjointes. Il découle de l'unicité de cette partition que ces enveloppes convexes ont, en fait, des intérieurs relatifs non-disjointes. Par conséquent,  $z^-$  et  $z^+$  ne peuvent pas appartenir à la même triangulation de  $z$ . En fait, chacune des triangulations de  $z$  contient exactement un des éléments de sa partition de Radon. Ces deux triangulations peuvent être définies de la manière suivante :

$$\tau^- = \{s \subset z : z^+ \not\subset s\} \text{ et } \tau^+ = \{s \subset z : z^- \not\subset s\}.$$

Considérons une triangulation  $T$  de  $E$ . En principe, un flip est l'opération qui consiste à échanger les deux triangulations d'un circuit de  $E$  à l'intérieur de  $T$ . Pour cela, il est nécessaire qu'une de ces triangulations, disons  $\tau^-$ , soit un sous-ensemble de  $T$ . Si  $z$  et  $E$  ont la même dimension, alors le résultat de cet échange est une triangulation de  $E$ , comme on peut le voir dans la figure 2.3 dans les cas (I), (II), (IV), (V) et (VI).

Si  $z$  et  $E$  n'ont pas la même dimension, comme par exemple dans le cas (III) de la figure 2.3, alors  $[T \setminus \tau^-] \cup \tau^+$  n'est pas un complexe simplicial abstrait. Considérons par exemple la triangulation représentée dans la figure 2.4, qui admet une triangulation du circuit  $\{1, 2, 3\}$  comme sous-ensemble. L'autre triangulation de  $\{1, 2, 3\}$  contient le segment  $\{1, 2\}$  comme son unique face de dimension 1, et n'admet pas 3 comme sommet. Ainsi, dans ce cas, l'ensemble qui résulte de l'échange des deux triangulations du

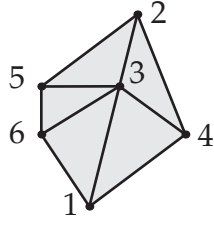


FIGURE 2.4 – Une triangulation qui admet une triangulation du circuit  $\{1,2,3\}$  comme sous-ensemble, mais dans laquelle ce circuit n'est pas flippable.

circuit  $\{1,2,3\}$  n'est plus un complexe simplicial abstrait puisqu'il contient les arêtes  $\{3,4\}$ ,  $\{3,5\}$  et  $\{3,6\}$  mais pas le singleton  $\{3\}$ . Cette remarque est également valable dans le cas (III) de la figure 2.3.

Ainsi, une définition rigoureuse des flips requiert une condition supplémentaire. Cette condition s'appuie sur les notions d'*étoile* et de *coque*. Pour toute face  $s$  d'un complexe simplicial abstrait  $C$  sur  $E$ , on appelle *étoile* de  $s$  dans  $C$  et on note  $\text{étoile}_C(s)$  l'ensemble de toutes les faces de  $C$  dont la réunion avec  $s$  est encore une face de  $C$  :

$$\text{étoile}_C(s) = \{t \in C : s \cup t \in C\}.$$

Par exemple, l'étoile de  $\{3\}$  dans la triangulation de la figure 2.4 est la triangulation tout entière. L'ensemble des faces de l'étoile de  $s$  dans  $C$  qui sont disjointes de  $s$  est appelé la *coque* de  $s$  dans  $C$  et noté  $\text{coque}_C(s)$  :

$$\text{coque}_C(s) = \{t \in \text{étoile}_C(s) : s \cap t = \emptyset\}.$$

La coque de  $\{3\}$  dans la triangulation de la figure 2.4 est le bord de cette triangulation. L'étoile de  $s$  dans  $C$  peut être reconstruite à partir de sa coque dans  $C$  :

$$\text{étoile}_C(s) = \text{coque}_C(s) \star \mathcal{P}(s),$$

où, pour deux ensembles  $X$  et  $Y$ ,

$$X \star Y = \{x \cup y : (x, y) \in X \times Y\}.$$

Avec ces notions, les flips peuvent maintenant être définis de manière rigoureuse :

**Définition 3.** Soit  $E$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$  et  $T$  une triangulation de  $E$ . Un circuit  $z$  de  $E$  est dit *flippable* dans  $E$  si une triangulation  $\tau$  de  $z$  est un sous-ensemble de  $T$  et si les faces de  $\tau$  qui sont maximales pour l'inclusion ont toutes la même coque dans  $T$ .

Les coques de  $\{1,3\}$  et de  $\{2,3\}$  dans la triangulation de la figure 2.4 sont respectivement  $\{\{4\}, \{6\}, \emptyset\}$  et  $\{\{4\}, \{5\}, \emptyset\}$ . Puisque ces deux coques sont distinctes, le circuit  $\{1,2,3\}$  n'est alors pas flippable. Si, toutefois, le sommet 6 était déplacé jusqu'au sommet 5 (le triangle  $\{3,5,6\}$  serait alors réduit à un segment), alors la situation serait celle du cas (III) de la figure 2.3 et le circuit  $\{1,2,3\}$  serait flippable.

Supposons qu'un circuit  $z$  de  $E$  soit flippable dans une triangulation  $T$  de  $E$ . Supposons aussi que la triangulation  $\tau^-$  de  $z$  est un sous-ensemble de  $T$  (ce qui peut se faire

sans perte de généralité). Flipper  $z$  dans  $T$  consiste alors à remplacer  $\lambda\star\tau^-$  par  $\lambda\star\tau^+$  à l'intérieur de  $T$ , où  $\lambda$  est la coque dans  $T$  de toutes des faces de  $\tau^-$  qui sont maximales pour l'inclusion. Le résultat de cette opération est une triangulation  $\mathfrak{F}(T, z)$  de  $E$  :

$$\mathfrak{F}(T, z) = [T \setminus (\lambda\star\tau^-)] \cup (\lambda\star\tau^+).$$

De manière plus intuitive,  $\lambda\star\tau^-$  est précisément l'étoile de  $z^-$  dans  $T$  et  $\lambda\star\tau^+$  est l'étoile de  $z^+$  dans  $\mathfrak{F}(T, z)$ . En particulier,  $z^-$  est un sous-ensemble de toutes les faces que ce flip enlève de  $T$  et  $z^+$  est un sous-ensemble de toutes les faces qu'il y ajoute. Cette propriété est importante dans la preuve que le graphe des flips du cube de dimension 4 est connexe (voir chapitre 3 et [52]).

Dans ce manuscrit, la triangulation  $\mathfrak{F}(T, z)$  sera aussi parfois notée  $\mathfrak{F}(T, z^-)$ , dans les cas où cela n'introduit pas d'ambiguïté. En effet, dans certains contextes, il est plus naturel de penser un flip comme l'opération qui « enlève »  $z^-$  et qui « introduit »  $z^+$ , par exemple quand  $z^-$  et  $z^+$  sont les diagonales d'un quadrilatère convexe.

## 2.3 Les graphes de flips

Considérons un sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$ . Le graphe des flips de  $E$  est le graphe dont les sommets sont les triangulations de  $E$  et dont les arêtes relient deux triangulations dès qu'elles peuvent être obtenues l'une de l'autre par un flip. Ce graphe sera noté  $\gamma(E)$  dans la suite de ce mémoire. Les graphes des flips d'un quadrilatère, d'un pentagone et d'un hexagone sont représentés dans la figure 2.5. On peut voir que ces trois graphes sont respectivement les graphes d'un segment, d'un pentagone et d'un polytope de dimension 3. Cette belle propriété est vraie en général quand  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polygone convexe [25, 35] : le graphe des flips d'un polygone de  $n$  sommets est le graphe d'un polytope de dimension  $n - 3$ . Ce polytope est appelé *l'associaèdre* à cause de son lien avec l'associativité [29]. Cette même propriété peut encore être généralisée dans le cas où  $E$  n'est plus l'ensemble des sommets d'un polygone convexe, en faisant la concession de ne pas considérer le graphe des flips tout entier, mais le sous-graphe induit par les triangulations régulières (remarquons en particulier que toutes les triangulations d'un polygone convexe sont régulières) :

**Théorème 1** ([22, 23]). *Soit  $E$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$ . Le sous-graphe induit par les triangulations régulières dans le graphe des flips de  $E$  est le graphe d'un polytope de dimension  $|E| - \dim(E) - 1$ , appelé le polytope secondaire de  $E$ .*

Ce résultat, dû à Israel Gel'fand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky [22, 23] permet d'exhiber un sous-graphe qui est connexe et non-trivial dans le graphe des flips de  $E$ , et ceci pour n'importe quel sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$ . Les propriétés de connexité de ces graphes sont importantes pour de nombreuses raisons. En particulier, si le graphe des flips de  $E$  est connexe, alors les triangulations de  $E$  peuvent être énumérées de manière efficace [10]. D'autre part, construire une triangulation régulière en transformant par des flips une triangulation initiale donnée est une méthode classique,

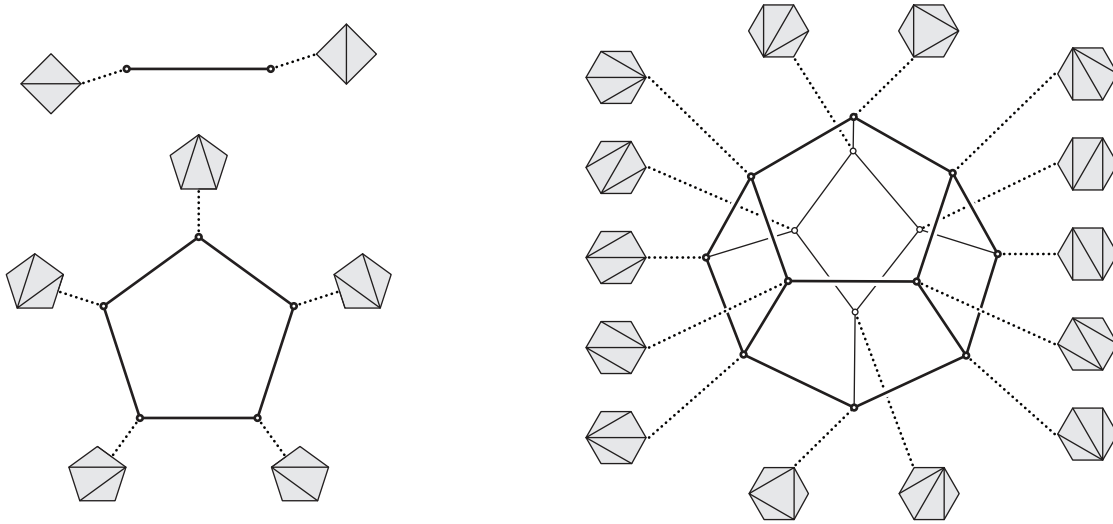


FIGURE 2.5 – Les graphes des flips d’un quadrilatère (haut gauche), d’un pentagone (bas gauche) et d’un hexagone (droite). La triangulation correspondant à chaque sommet de chacun de ces graphes est indiquée. Cette représentation est due à Dov Tamari, à cette différence que les parenthésages sont ici remplacés par des triangulations (voir la Figure 1 dans [78]).

utilisée pour de nombreuses applications [54, 55]. Ainsi, si le graphe des flips d’un ensemble fini de points  $E$  n’est pas connexe, il est possible de trouver une triangulation de  $E$  pour laquelle cette méthode ne peut pas aboutir. La question de la connexité des graphes de flips sera abordée dans les chapitres 3, 4 et 5. Le méthode de régularisation d’une triangulation par des flips pose également la question du diamètre des graphes de flips lorsque ceux-ci sont connexes. En effet, le plus petit nombre de flips qu’il faut effectuer pour régulariser une triangulation dans le pire des cas est précisément le diamètre d’un graphe de flips. Cette question sera abordée dans le chapitre 6.

Le reste de cette section est découpé en deux parties. Dans la sous-section 2.3.1, la méthode de régularisation d’une triangulation par des flips sera décrite (voir aussi [54, 55]). Bien que cette méthode soit peu mentionnée dans la suite, elle a fourni certaines des idées principales qui ont conduit aux résultats présentés dans le chapitre 3. Dans la sous-section 2.3.2, les résultats obtenus par d’autres auteurs sur la connexité des graphes de flips seront passés en revue.

### 2.3.1 Une méthode de régularisation

Supposons que  $E$  soit un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\dim(E) = d$ . Soit  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de hauteur telle que toutes les faces inférieures du polytope  $\text{conv}(E \uparrow w)$  sont des simplexes. Dans ce cas, comme il a été mentionné dans la section 2.1 ci-dessus,  $R(w)$  est l’unique triangulation de  $E$  réalisée par  $w$ . La construction de cette triangulation est un problème classique de géométrie algorithmique. Pour cela, il est possible d’utiliser un algorithme incrémental qui insère les sommets de la triangulation l’un après l’autre et qui effectue une régularisation locale entre chaque insertion [17, 30, 31].

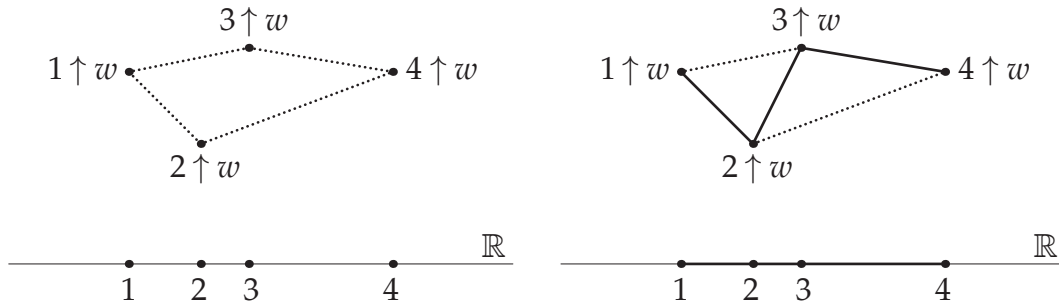


FIGURE 2.6 – Un sous-ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  de  $\mathbb{R}$  et l'ensemble  $E \uparrow w$  obtenu en « soulever »  $E$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec une fonction de hauteur  $w$  (gauche). Une triangulation  $T$  de  $E$  représentée en trait fort, et le complexe simplicial  $T \uparrow w$  (droite). Le polytope  $\text{conv}(E \uparrow w)$  est tracé en pointillés.

Cet algorithme converge [17, 31], mais il ne permet pas de *transformer* une triangulation donnée de  $E$ , disons  $T$ , en  $R(w)$  : on imagine que si  $T$  et  $R(w)$  sont « proches », une telle transformation peut être faite en peu de flips. En particulier si après avoir construit  $R(w)$ , on désire construire  $R(w')$  pour une autre fonction de hauteur  $w' : E \rightarrow \mathbb{R}$ , l'algorithme incrémental recommencera tout le travail, même si  $R(w)$  et  $R(w')$  diffèrent d'un seul flip ! Les propriétés de l'algorithme de régularisation décrit dans cette sous-section sont complémentaires à celles de l'algorithme incrémental.

Considérons la situation représentée dans la figure 2.6. On peut voir dans la partie gauche de cette figure que  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et que la fonction de hauteur  $w$  soulève  $E$  de telle manière que  $2 \uparrow w$  est dans le bord inférieur du polytope  $\text{conv}(E \uparrow w)$  et  $3 \uparrow w$  est dans le bord supérieur de ce polytope. En particulier, la triangulation  $R(w)$  est la triangulation de  $E$  dont les deux faces de dimension 1 sont  $\{1, 2\}$  et  $\{2, 4\}$ . Cette triangulation n'admet pas le point 3 comme sommet parce que  $3 \uparrow w$  n'est pas dans le bord inférieur de  $\text{conv}(E \uparrow w)$ . Considérons la triangulation  $T$  de  $E$  dont les faces de dimension 1 sont  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$  et  $\{3, 4\}$ . Cette triangulation est représentée en trait fort dans la partie droite de la figure. On peut voir que  $T \uparrow w$  est un complexe simplicial dont le domaine est non-disjoint de l'intérieur du polytope  $\text{conv}(E \uparrow w)$ . Remarquons que le bord supérieur du triangle  $\{2, 3, 4\} \uparrow w$  est un sous-ensemble de  $T \uparrow w$ . En outre, si on échange le bord supérieur de ce triangle par son bord inférieur à l'intérieur de  $T \uparrow w$ , on obtient  $R(w) \uparrow w$ . Cette opération, effectuée dans  $T \uparrow w$ , se traduit dans  $T$  par le flip qui enlève le sommet 3 (cas (II) dans la Figure 2.3). Ainsi, ce flip permet de transformer la triangulation  $T$  en  $R(w)$ , c'est-à-dire de la régulariser pour la fonction de hauteur  $w$ .

Les propriétés qui viennent d'être illustrées à l'aide de la figure 2.6 sont vraies dès que  $E \uparrow w$  est suffisamment générique, c'est-à-dire si tous les sous-ensembles des  $E \uparrow w$  de cardinalité au plus  $d + 2$  sont affinement indépendants. Dans ce cas, on dit que  $E \uparrow w$  est en *position générale*. Si  $E \uparrow w$  est en position générale, tout circuit  $z$  de  $E$  est tel que  $z \uparrow w$  est affinement indépendant. Si en outre, un tel circuit  $z$  est flippable dans une triangulation  $T$  de  $E$ , alors  $T \uparrow w$  contient le bord inférieur ou le bord supérieur du simplexe  $z \uparrow w$ . Puisque  $z$  admet exactement deux triangulations,  $T \uparrow w$  et  $\mathfrak{F}(T, z) \uparrow w$  sont donc nécessairement obtenus l'un de l'autre en échangeant ces deux bords. Par conséquent, une fonction de hauteur  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  classe les circuits de  $E$  flippables dans

---

**Algorithme 1** Algorithme de régularisation d'une triangulation  $T$  de  $E$ .

---

**Donnée :**  $T, w$

**while** il existe un circuit  $z$  de  $E$  qui est  $w$ -illégal dans  $T$  **do**

$T \leftarrow \mathfrak{F}(T, z)$

**end while**

---

une triangulation donnée de  $E$  en deux catégories :

**Définition 4.** Soient un sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$  et une fonction  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $E \uparrow w$  est en position générale. Un circuit  $z$  de  $E$  flippable dans une triangulation  $T$  de  $E$  est dit  $w$ -legal dans  $T$  si  $T \uparrow w$  contient le bord inférieur de  $z \uparrow w$  et  $w$ -illegal dans  $T$  sinon.

Remarquons que si  $E \uparrow w$  est en position générale, tous les circuits flippables dans  $R(w)$  sont nécessairement  $w$ -legaux parce que  $R(w) \uparrow w$  est le bord inférieur du polytope  $\text{conv}(E \uparrow w)$ . D'autre part, si  $z$  est un circuit  $w$ -illegal dans une triangulation  $T$  de  $E$ , alors  $\mathfrak{F}(T, z) \uparrow w$  est « en dessous » de  $T \uparrow w$ , comme dans l'exemple de la figure 2.6. Ainsi, il est possible de formuler l'algorithme 1 qui flippe une suite de circuits  $w$ -illégaux, en espérant que cet algorithme retourne bien la triangulation  $R(w)$ . Malheureusement, il existe des triangulations initiales  $T$  [36] et des fonctions de hauteur  $w$  pour lesquelles cet algorithme renvoie une triangulation  $T'$  distincte de  $R(w)$  [10, 55]. Dans ces cas particuliers, il y a des circuits qui sont flippables dans la triangulation  $T'$ , mais aucun d'eux n'est  $w$ -illégal dans  $T'$ , ce qui cause l'arrêt de l'algorithme 1. Remarquons, tout de même que l'algorithme 1 est généralement utilisé pour régulariser des triangulations *faiblement régulières* (cette notion sera définie dans le chapitre 3). Or, la triangulation initiale qui a été proposée dans [10, 36, 55] et pour laquelle l'algorithme 1 ne renvoie pas  $R(w)$  n'est pas faiblement régulière. Ainsi, l'algorithme 1 reste utile en pratique puisqu'il a toujours renvoyé  $R(w)$ , indépendamment de la fonction de hauteur  $w$ , pour un grand nombre de triangulations initiales faiblement régulières [54]. Cette remarque permet de formuler la conjecture suivante :

**Conjecture 1.** Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$ . Pour toute triangulation initiale faiblement régulière  $T$  de  $E$  et pour toute application  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , l'algorithme 1 renvoie  $R(w)$ .

Remarquons que même si on modifiait l'algorithme 1 de manière à ce qu'il contourne les pathologies décrites dans [10, 36, 55], la convergence de cet algorithme serait toujours conditionnée par la connexité du graphe des flips.

### 2.3.2 Connexité des graphes de flips

La connexité du graphe des flips de n'importe quel ensemble fini de points de dimension 2 a été établie il y a plus de 40 ans par Charles Lawson [33] (voir aussi [34]). Plus récemment, Francisco Santos a trouvé des ensembles finis de points de dimension 6 [10, 70] et 5 [10, 71] dont le graphe des flips est non-connexe. Il est facile de construire à partir de ces exemples des ensembles de points de n'importe quelle dimension  $d \geq 5$

dont le graphe des flips est non-connexe. Le problème de la connexité des graphes de flips est toujours ouvert en général quand  $E$  est de dimension 3 ou 4.

Notons respectivement par  $d$  et  $n$  la dimension et la cardinalité de  $E$ . D'autres résultats de connexité ont été obtenus quand  $n - d$  est petit. Si  $n - d = 1$ ,  $E$  n'admet qu'une seule triangulation, parce que c'est un simplexe, et son graphe des flips est connexe. Si  $n - d = 2$ , le graphe des flips de  $E$  est également connexe. En effet, dans ce cas,  $E$  admet uniquement deux triangulations reliées par un flip. En particulier, il n'existe qu'un seul circuit de  $E$ . Si  $n - d = 3$ , toutes les triangulations de  $E$  sont régulières [36]. D'après le théorème 1, le graphe des flips de  $E$  est alors précisément le graphe du polytope secondaire de  $E$ , et il est donc connexe. Si  $n - d = 4$ ,  $E$  peut avoir des triangulations non-régulières (voir, par exemple la figure 2.2). Azaola et Santos ont prouvé que le graphe des flips de  $E$  est tout de même connexe dans ce cas [1]. Si  $5 \leq n - d \leq 10$ , le problème est ouvert (l'un des ensembles de points trouvés par Francisco Santos dont le graphe des flips n'est pas connexe est de dimension 6 et contient 17 points [10]).

Enfin, il a été prouvé que le graphe des flips de certains ensembles de points bien structurés sont connexes. En particulier, si  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polytope cyclique, alors le graphe des flips de  $E$  est connexe [64]. Dans ce cas,  $E$  est un sous-ensemble fini de la courbe des moments, c'est-à-dire :

$$E = \{(t, t^2, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^d : t \in F\},$$

où  $F$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$ . Les trois prochains chapitres rassemblent les résultats obtenus dans [48, 49, 50] au sujet de la connexité des graphes de flips.

---

---

# Chapitre 3

---

## Une généralisation de la régularité

Il découle du théorème 1 que le sous-graphe induit par les triangulations régulières dans le graphe des flips d'un ensemble fini de points est connexe. Dans ce chapitre, la notion de régularité va être généralisée. Ceci va permettre d'exhiber un sous-graphe connexe  $\gamma_2(E)$  dans le graphe des flips d'un ensemble fini de points  $E$ , qui est strictement plus grand que le sous-graphe induit par les triangulations régulières. La preuve de la connexité de  $\gamma_2(E)$  ne sera pas donnée ici, mais peut être trouvée dans [49].

Plusieurs triangulations non-régulières classiques d'ensembles de points  $E$  de dimensions 2 et 3 vont être passées en revue dans la section 3.2 et il sera montré à l'aide de différents critères qu'elles sont des sommets de  $\gamma_2(E)$ . Le cas de la dimension 2 sera traité en toute généralité dans la section 3.3. Nous y prouverons que toute triangulation  $T$  d'un ensemble fini de points  $E$  de dimension 2 est un sommet de  $\gamma_2(E)$ . Pour cela, il sera montré qu'il est toujours possible de déplacer les sommets de  $E$  le long le droites parallèles de façon à régulariser  $T$ . Remarquons que l'idée de déplacer les sommets d'une triangulation provient de l'utilisation des triangulations régulières pour la détection de contacts parmi un ensemble d'objets en mouvement [44, 18, 46, 55].

### 3.1 La notion de $k$ -régularité d'une triangulation

Soient  $p$  un polytope et  $\pi : \text{aff}(p) \rightarrow \mathbb{R}^d$  une projection. Appelons  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets de  $p$ . On dit que la paire  $(p, \pi)$  est une *projection de polytope* si la restriction de  $\pi$  à  $\mathcal{V}$  est injective. Dans ce cas, il y a une unique bijection  $\phi : \pi(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$  telle que  $\pi \circ \phi$  envoie chaque élément de  $\pi(\mathcal{V})$  sur lui-même. On dit qu'un complexe simplicial  $C$  sur  $\pi(\mathcal{V})$  est *induit* par  $(p, \pi)$  si, pour toute face  $s$  de  $C$ , l'enveloppe convexe de  $\phi(s)$  est une face de  $p$ . Cette terminologie a été introduite dans [5, 6] pour les subdivisions polyédrales. Si on appelle  $v(C)$  l'ensemble des sommets de  $C$ , la notion de  $k$ -régularité peut être définie de la manière suivante :

**Définition 5.** *Un complexe simplicial abstrait  $C$  est  $k$ -régulier si il est induit par une projection de polytope  $(p, \pi)$  telle que  $\dim(p) - \dim(\pi(p)) \leq k$ .*

Cette définition a été d'abord donnée dans [49, 50] pour des subdivisions polyédrales, puis dans [48] dans le cas de complexes simpliciaux.

Si  $k$  est égal à 1, et si  $C$  est une triangulation d'un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$ , alors la définition 5 ressemble à celle de la régularité usuelle (voir définition 1). Cependant, contrairement à la définition 5, la définition 1 précise que l'enveloppe convexe de toute face de  $C$  est la projection d'une face *inférieure* de  $p$ . En fait les deux définitions sont équivalentes dans ce cas, comme il est montré dans [49] :

**Proposition 1.** *Une triangulation est régulière si et seulement si elle est 1-régulière.*

Remarquons qu'un complexe simplicial abstrait  $C$  dont l'ensemble des sommets est de cardinalité  $n$  et de dimension  $d$  est  $(n - d - 1)$ -régulier. En effet,  $C$  est nécessairement induit par une projection de polytope  $(p, \pi)$  telle que  $p$  est un simplexe de dimension  $n - 1$ . Dans le chapitre 4, nous montrerons que tout complexe simplicial est nécessairement  $(n - d - 2)$ -régulier.

Pour tout entier positif  $k$ , appelons  $\gamma_k(E)$  le sous-graphe induit par les triangulations  $k$ -régulières dans le graphe des flips de  $E$ . D'après la proposition précédente,  $\gamma_1(E)$  est précisément le graphe induit par les triangulations régulières dans le graphe des flips de  $E$ . Il découle du théorème 1 que ce graphe est connexe. D'après le théorème suivant, prouvé dans [49], ce résultat de connexité s'étend au graphe  $\gamma_2(E)$ . Remarquons que, d'après la définition 5,  $\gamma_1(E)$  est un sous-graphe de  $\gamma_2(E)$ .

**Théorème 2.** *Pour tout sous-ensemble fini  $E$  de  $\mathbb{R}^d$ , le graphe  $\gamma_2(E)$  est connexe.*

La preuve de ce théorème s'appuie sur le fait que la conjecture de Baues généralisée formulée dans [5] est vraie en codimension 2 [67]. Cette preuve est omise ici, mais le lecteur pourra la trouver dans [49]. Remarquons que la conjecture de Baues généralisée est fautive en codimension supérieure à 2 (voir contre-exemple dans [67]). Ainsi, la preuve donnée dans [49] permet de montrer que le sous-graphe  $\gamma_k(E)$  induit par les triangulations  $k$ -régulières dans le graphe des flips de  $E$  est connexe quand  $k$  est égal à 2, mais pas quand  $k$  est supérieur à 2. En fait, nous montrerons à la fin du chapitre 4 que  $\gamma_3(E)$  n'est pas toujours connexe, à l'aide d'un ensemble de points de dimension 6 dont le graphe des flips n'est pas connexe [10, 70, 71].

Le théorème 2 n'a d'intérêt que si  $\gamma_2(E)$  est un graphe suffisamment grand. Quelques-uns des exemples classiques de triangulations non-régulières en dimension 2 et 3 sont passés en revue dans la prochaine section. En particulier, il sera montré en utilisant un critère simple que ces triangulations sont toutes 2-régulières. Ceci suggère que  $\gamma_2(E)$  est grand. En fait, lorsque  $E$  est de dimension 2, toutes ses triangulations sont 2-régulières, ce que nous montrerons dans la section 3.3. Quand  $E$  est de dimension 3, le problème est ouvert : il existe peut-être des triangulations de  $E$  qui ne sont pas régulières mais aucune n'est connue pour l'instant. La conjecture suivante, formulée dans [49], permet de guider l'intuition sur le problème :

**Conjecture 2.** *Toutes les triangulations d'un ensemble fini  $E$  sont  $\dim(E)$ -régulières.*

## 3.2 Premiers exemples

Plusieurs des exemples classiques de triangulations non-régulières en dimension 2 et 3 sont passés en revue dans cette section. La plus populaire de ces triangulations a déjà été représentée dans la figure 2.2. On remarque que, dans le cas de cette triangulation, le triangle central et le triangle formé par les arêtes extérieures sont homothétiques. Si on tourne légèrement le triangle central dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on obtient la triangulation (I) représentée dans la figure 3.1. La non-régularité de cette triangulation peut être vérifiée en utilisant le théorème d'acyclicité démontré par Herbert Edelsbrunner [16]. D'après ce théorème, une triangulation régulière ne peut pas contenir une suite  $f_1, f_2, \dots, f_k$  de faces telle que, vues d'un certain point  $p$ ,  $f_{i+1}$  est « derrière »  $f_i$  pour tout  $i$  et  $f_1$  est « derrière »  $f_k$ . Par exemple, dans la triangulation (I) de la figure 3.1, l'arête  $\{1,5\}$  est derrière l'arête  $\{2,6\}$  si on les regarde du point  $p$  au centre de la triangulation. En effet, on peut voir, en utilisant les traits pointillés que l'enveloppe convexe de l'arête  $\{p,5\}$  croise celle de l'arête  $\{2,6\}$ . Il est facile de se convaincre, en utilisant les traits pointillés dessinés dans la figure 3.1 que les arêtes  $\{1,5\}$ ,  $\{2,6\}$  et  $\{3,4\}$  forment une suite de faces qui interdit à la triangulation (I) d'être régulière d'après le critère d'acyclicité énoncé dans [16].

Remarquons que la triangulation (I) est ce qu'on voit lorsqu'on se place au-dessus du polyèdre de Schönhardt [73] et qu'on regarde vers l'intérieur de ce polyèdre. La triangulation (I) peut être généralisée de la même manière que le polyèdre de Schönhardt a été généralisé par Jörg Rambau dans [66]. Les complexes simpliciaux (II) et (III) représentés dans la figure 3.1 sont construits de cette manière à partir respectivement de deux carrés emboîtés et de deux pentagones emboîtés. En complétant la partie centrale de ces deux complexes simpliciaux, laissée en blanc dans la figure, on obtient nécessairement des triangulations non-régulières. En effet, on peut voir en s'aidant des traits pointillés que les arêtes  $\{1,6\}$ ,  $\{2,7\}$ ,  $\{3,8\}$  et  $\{4,5\}$  du complexe simplicial (II), et les arêtes  $\{1,7\}$ ,  $\{2,8\}$ ,  $\{3,9\}$ ,  $\{4,10\}$  et  $\{5,6\}$  du complexe simplicial (III) sont telles qu'aucune de ces triangulations ne peut être régulière, d'après le critère d'acyclicité énoncé dans [16]. Un premier critère de  $k$ -régularité est maintenant énoncé qui permet de prouver, qu'en fait, toutes ces triangulations sont 2-régulières.

### 3.2.1 Un premier critère de $k$ -régularité

Soit  $C$  un complexe simplicial. Le plus petit entier  $k$  tel que  $C$  est  $k$ -régulier est noté  $m(C)$  dans la suite de ce chapitre. Le théorème suivant, prouvé dans [49] pour des subdivisions polyédrales, fournit un premier critère pour obtenir des bornes supérieures sur  $m(C)$ . Ce théorème est prouvé ici pour des complexes simpliciaux :

**Théorème 3.** *Soit  $E$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$  et  $(C_i)_{0 \leq i \leq k}$  une famille finie de complexes simpliciaux sur  $E$ . Si  $C_0 \subset \cup_{i=1}^k C_i$ , alors  $m(C_0) \leq \sum_{i=1}^k m(C_i)$ .*

*Preuve.* Quitte à traduire  $v(C_0)$  et à changer  $d$ , nous pouvons supposer sans perte de généralité que la dimension de  $v(C_0)$  est précisément  $d$ . Supposons également que  $\mathbb{R}^d$

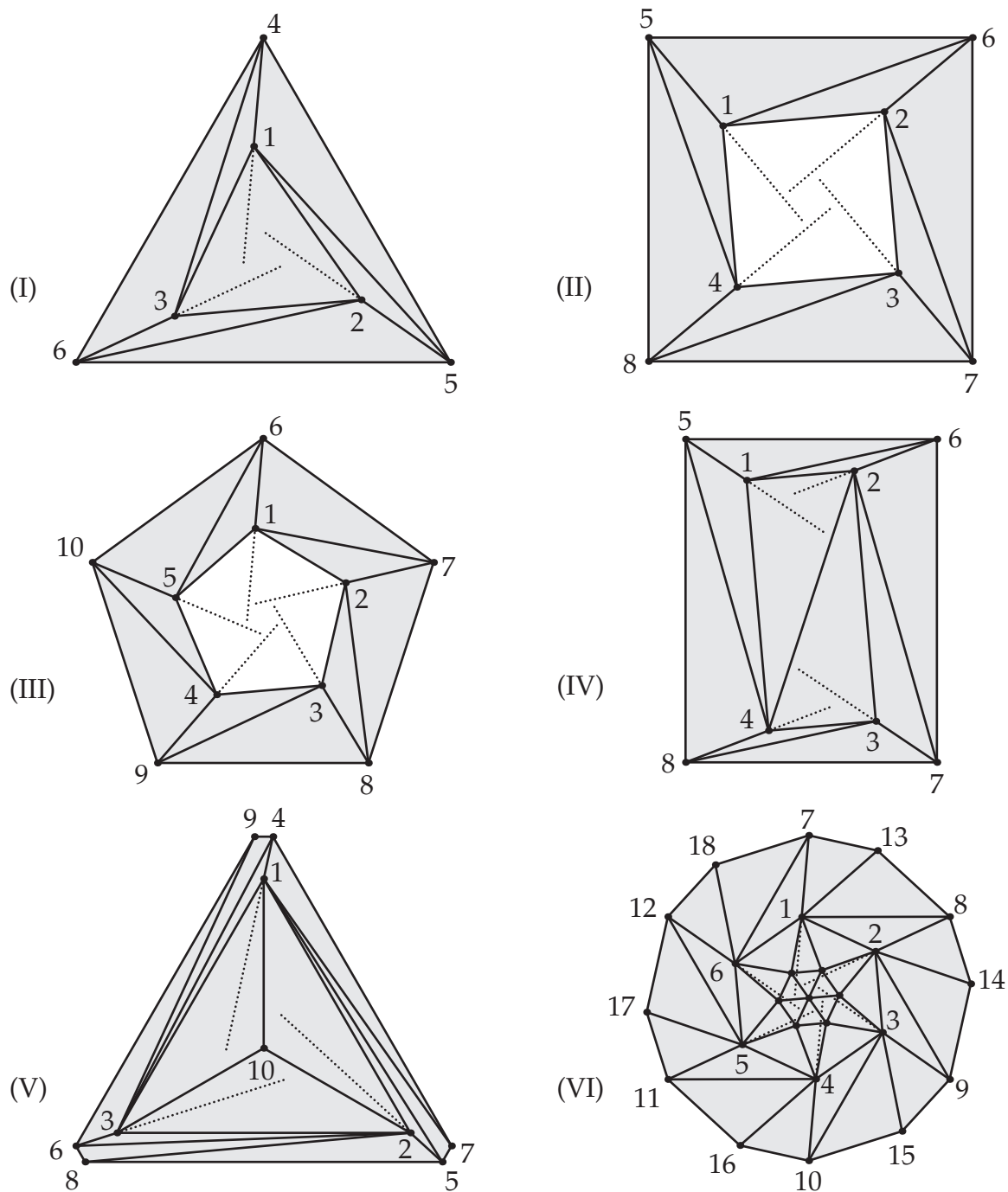


FIGURE 3.1 – Six complexes simpliciaux. Les complexes simpliciaux (I), (IV), (V) et (VI) sont des triangulations non-régulières. Toutes les triangulations obtenues en complétant la partie centrale laissée en blanc dans les cas (II) et (III) sont non-régulières. Les traits pointillés permettent de guider l’œil pour vérifier la non-régularité de ces triangulations.

est un sous-espace linéaire de  $\mathbb{R}^{d+\alpha}$  où  $\alpha$  est la somme  $\sum_{i=1}^k m(C_i)$ . Notons  $F$  le complémentaire orthogonal de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{d+\alpha}$ . Soit  $(F_i)_{1 \leq i \leq k}$  une famille de sous-espaces linéaires de  $F$  orthogonaux deux à deux tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $F_i$  est de dimension  $m(C_i)$ . Soit  $i$  un nombre entier tel que  $1 \leq i \leq k$ . Par définition,  $C_i$  est induit par une projection de polytope  $(p_i, \pi_i)$  telle que la dimension de  $p_i$  est au plus  $d + m(C_i)$ . Quitte à utiliser des transformations affines, nous pouvons supposer sans perte de généralité que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , l'enveloppe affine de  $p_i$  est précisément  $\mathbb{R}^d \oplus F_i$  et que  $\pi_i$  est la projection orthogonale  $F_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Pour tout sommet  $a$  de  $C$ , appelons  $\phi_i(a)$  le sommet de  $p_i$  qui se projette sur  $a$  par  $\pi_i$ . Le point de  $\mathbb{R}^{d+\alpha}$  dont le projeté orthogonal sur  $\mathbb{R}^d \oplus F_i$  est  $\phi_i(a)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  sera noté  $\phi(a)$ . Appelons  $p$  l'enveloppe convexe de  $\phi(v(C))$ . Par construction, toute face de  $p_i$  est le projeté orthogonal sur  $\mathbb{R}^d \oplus F_i$  d'une face de  $p$ . Ainsi,  $C$  est induit par la projection de polytope  $(p, \pi)$  où  $\pi$  est la projection orthogonale  $\mathbb{R}^{d+\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Remarquons en particulier que la restriction de  $\pi$  à l'ensemble des sommets de  $p$  est nécessairement une injection parce que  $(p_i, \pi_i)$  est une projection de polytope.

Puisque la dimension de  $p$  est au plus  $d + \alpha$ , l'inégalité voulue est vraie.  $\square$

Considérons la triangulation (I) représentée dans la figure 3.1. Si on flippe le circuit  $\{1, 2, 4, 5\}$  dans cette triangulation, c'est-à-dire informellement si on remplace l'arête  $\{1, 5\}$  par l'arête  $\{2, 4\}$ , on obtient une triangulation régulière (I') qui contient toutes les faces de (I) sauf l'arête  $\{1, 5\}$  et les triangles  $\{1, 2, 5\}$  et  $\{1, 4, 5\}$ . Remarquons que (I') est bien acyclique au sens de [16], mais que ce n'est pas pour cette raison là qu'elle est régulière. En effet, il existe des triangulations acycliques et non-régulières, comme par exemple la triangulation (IV) dans la figure 3.1. La triangulation (I') est régulière parce qu'elle est réalisée par une fonction de hauteur qui est facile à trouver si on étudie la figure 3.1. Une autre triangulation régulière (I'') est obtenue en flippant le circuit  $\{1, 3, 4, 6\}$  dans (I). Cette triangulation contient toutes les faces de (I) sauf l'arête  $\{3, 4\}$  et les triangles  $\{3, 4, 1\}$  et  $\{3, 4, 6\}$ . En particulier, toute face de (I) est contenue dans (I') ou dans (I''). D'après le théorème 3, la triangulation (I) est donc 2-régulière. La même idée peut être utilisée pour montrer que toute triangulation  $T$  obtenue en triangulant la partie centrale des complexes simpliciaux (II) et (III) est 2-régulière. En effet, si  $T$  est construite à partir du complexe simplicial (II), il suffit de flipper le circuit  $\{1, 2, 5, 6\}$  d'une part et le circuit  $\{1, 4, 5, 8\}$  d'autre part dans  $T$  pour obtenir deux triangulations régulières dont la réunion admet  $T$  comme sous-ensemble. Si  $T$  est construite à partir de (III), il suffit de flipper les circuits  $\{1, 2, 6, 7\}$  et  $\{1, 5, 6, 10\}$  dans  $T$  pour obtenir la même conclusion. Ainsi, d'après le théorème 3,  $T$  est 2-régulière.

La triangulation (IV) dessinée dans la figure 3.1 a été proposée dans [80]. Contrairement au complexe simplicial (II), et malgré sa ressemblance avec celui-ci, cette triangulation est acyclique au sens de [16]. On peut se convaincre que les arêtes  $\{1, 6\}$ ,  $\{2, 7\}$ ,  $\{3, 8\}$  et  $\{4, 5\}$  ne forment pas un cycle comme dans le cas de (II) en s'aidant des traits pointillés qui esquissent les enveloppes affines des arêtes  $\{1, 5\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{3, 7\}$  et  $\{4, 8\}$ . Remarquons que la triangulation obtenue en flippant l'arête  $\{2, 4\}$  dans (IV) est régulière. Il est possible de montrer que la triangulation (IV) est 2-régulière en utilisant le théorème 3 exactement de la même manière que dans le cas des deux triangulations

construites en triangulant la partie centrale du complexe simplicial (II) : les deux triangulations qu'on obtient de (IV) en flippant respectivement les circuits  $\{1,2,5,6\}$  et  $\{1,4,5,8\}$  sont régulières et leur réunion contient toutes les faces de (IV). Par conséquent, d'après le théorème 3, la triangulation (IV) est 2-régulière.

La triangulation (V) représentée dans la figure 3.1 est obtenue de la triangulation (I) en reliant des sommets externes 7, 8 et 9 supplémentaires aux sommets respectifs 1, 2 et 3. Le sommet 10 est également ajouté à l'intérieur du triangle central. L'ensemble des sommets de cette triangulation est utilisé dans [67] comme contre-exemple à la conjecture de Baues généralisée. Puisque cette triangulation hérite les arêtes  $\{1,5\}$ ,  $\{2,6\}$  et  $\{3,4\}$  de la triangulation (I), elle est nécessairement non-régulière. D'après le théorème 3, cette triangulation est elle aussi 2-régulière. En effet, considérons la triangulation obtenue de (V) en flippant successivement les circuits  $\{1,4,5,7\}$  et  $\{1,2,4,5\}$  dans cet ordre. Cette triangulation est régulière et contient toutes les faces de (V) sauf  $\{1,7\}$ ,  $\{1,5\}$ ,  $\{1,4,7\}$ ,  $\{1,5,7\}$  et  $\{1,2,5\}$ . Une autre triangulation régulière qui contient ces cinq faces manquantes peut être obtenue en flippant successivement les circuits  $\{3,4,6,9\}$  et  $\{1,3,4,6\}$  dans (V). La triangulation (V) est donc 2-régulière.

La triangulation (VI) dessinée dans la figure 3.1 est un exemple plus élaboré d'une triangulation non-régulière, construite en utilisant les mêmes règles générales que pour les cinq précédents exemples. Elle est obtenue de deux hexagones imbriqués et de treize sommets supplémentaires. Sept de ces sommets supplémentaires sont placés à l'intérieur du plus petit hexagone et les six autres autour du plus grand hexagone. Une propriété intéressante de cette triangulation est que toutes ses arêtes intérieures peuvent être enlevées par un flip. Bien que cela suggère un bon comportement vis-à-vis des flips, il se trouve que la triangulation (VI) est non régulière. En effet, les arêtes  $\{1,9\}$ ,  $\{2,11\}$ ,  $\{3,13\}$ ,  $\{4,15\}$ ,  $\{5,17\}$  et  $\{6,7\}$  forment un cycle au sens de [16] qui lui interdit d'être régulière, comme on peut le vérifier sur la figure en utilisant les traits pointillés. La triangulation (VI) est 2-régulière. En effet, on obtient une triangulation régulière qui contient toutes les faces de (VI) sauf  $\{1,8\}$ ,  $\{1,13\}$ ,  $\{1,2,8\}$ ,  $\{1,8,13\}$  et  $\{1,7,13\}$  en flippant successivement les circuits  $\{1,7,8,13\}$  et  $\{1,2,7,8\}$  dans (VI). Une autre triangulation régulière qui contient ces faces manquantes est obtenue en flippant successivement les circuits  $\{6,7,12,18\}$  et  $\{1,6,7,12\}$  dans (VI). Il découle de cela et du théorème 3 que la triangulation (VI) est 2-régulière.

### 3.2.2 Deux exemples en dimension 3

Les six exemples traités dans la section précédente sont de dimension 2. Deux triangulations de dimension 3 sont maintenant étudiés. Le première de ces triangulations, décrite dans [10, 36, 55], admet des circuits flippables mais pas de circuit  $w$ -illégal pour une certaine fonction de hauteur  $w$  (voir [55]). Comme cette triangulation est non-régulière, elle fournit donc un exemple de triangulation initiale pour laquelle l'algorithme 1 ne renvoie pas  $R(w)$ . Les éléments de  $\mathbb{R}^3$  sont ici identifiés avec les vecteurs de leurs coordonnées dans la base canonique. Soit  $(\alpha, \beta, \varepsilon)$  une solution du système

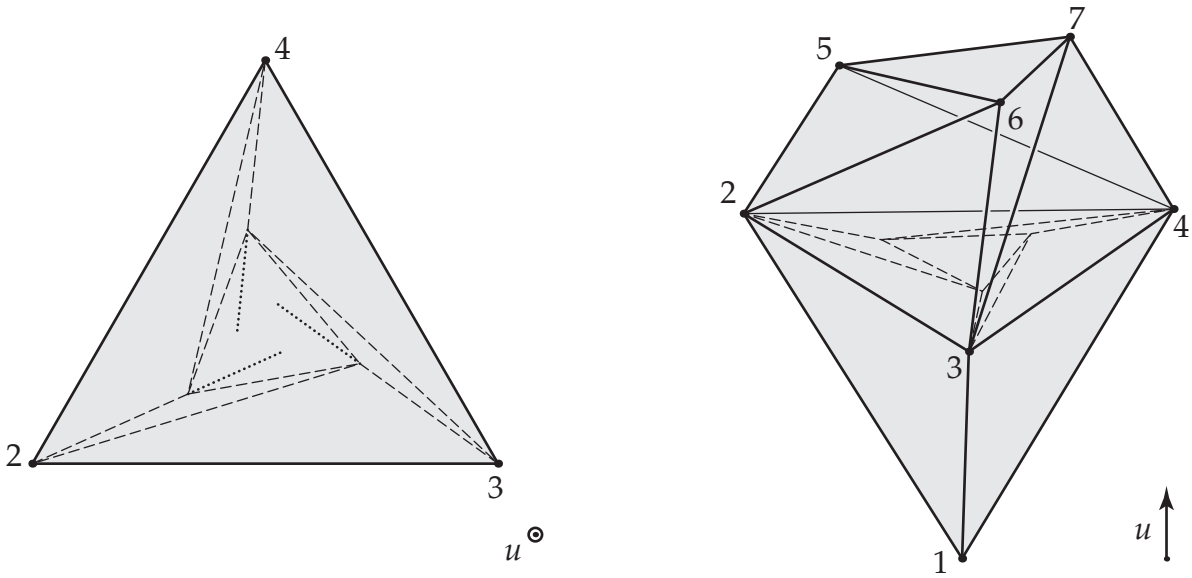


FIGURE 3.2 – La triangulation non-régulière (VII) représentée en dimension 3 (droite), et l’intersection de cette triangulation avec le plan contenant les sommets 2, 3 et 4 (gauche).

d’inégalités suivant :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \varepsilon > 1 \\ \alpha\beta - (\beta + \varepsilon)^2 > 0 \\ \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Remarquons qu’une telle solution existe, comme par exemple  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 1$  et  $\varepsilon = 1$ . La matrice ci-dessous définit sept points de  $\mathbb{R}^3$ . Dans cette matrice, chaque colonne correspond à un point et chaque ligne à une des coordonnées de ces points dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Appelons  $E$  l’ensemble de ces sept points.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta + \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta + \varepsilon & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & \beta + \varepsilon & \alpha \end{pmatrix}$$

Chaque élément de  $E$  sera noté en utilisant le numéro de sa colonne dans la matrice ci-dessus. Puisque  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\varepsilon$  satisfont le système d’inéquation écrit plus haut, les sous-ensembles de  $E$  suivants sont les faces de dimension 3 d’une triangulation de  $E$  :

$$\{1, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 3, 4, 7\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 6, 7\}, \\ \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{3, 4, 6, 7\}, \{2, 4, 5, 7\}.$$

Cette triangulation, notée (VII) dans la suite, est esquissée dans la figure 3.2. Le vecteur  $u$  représenté dans cette figure est obtenu en sommant les trois vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Dans la partie droite de la figure, les arêtes  $\{1, 5\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{1, 7\}$ ,  $\{2, 7\}$ ,  $\{3, 5\}$  et  $\{4, 6\}$  de la triangulation (VII) ont été omises pour ne pas surcharger le dessin. L’intersection de cette triangulation avec le plan qui contient les points 2, 3 et 4 est représentée dans la partie gauche de la figure 3.2. Les tirets montrent les intersections avec ce plan des enveloppes convexes des faces de dimension 2 de la triangulation

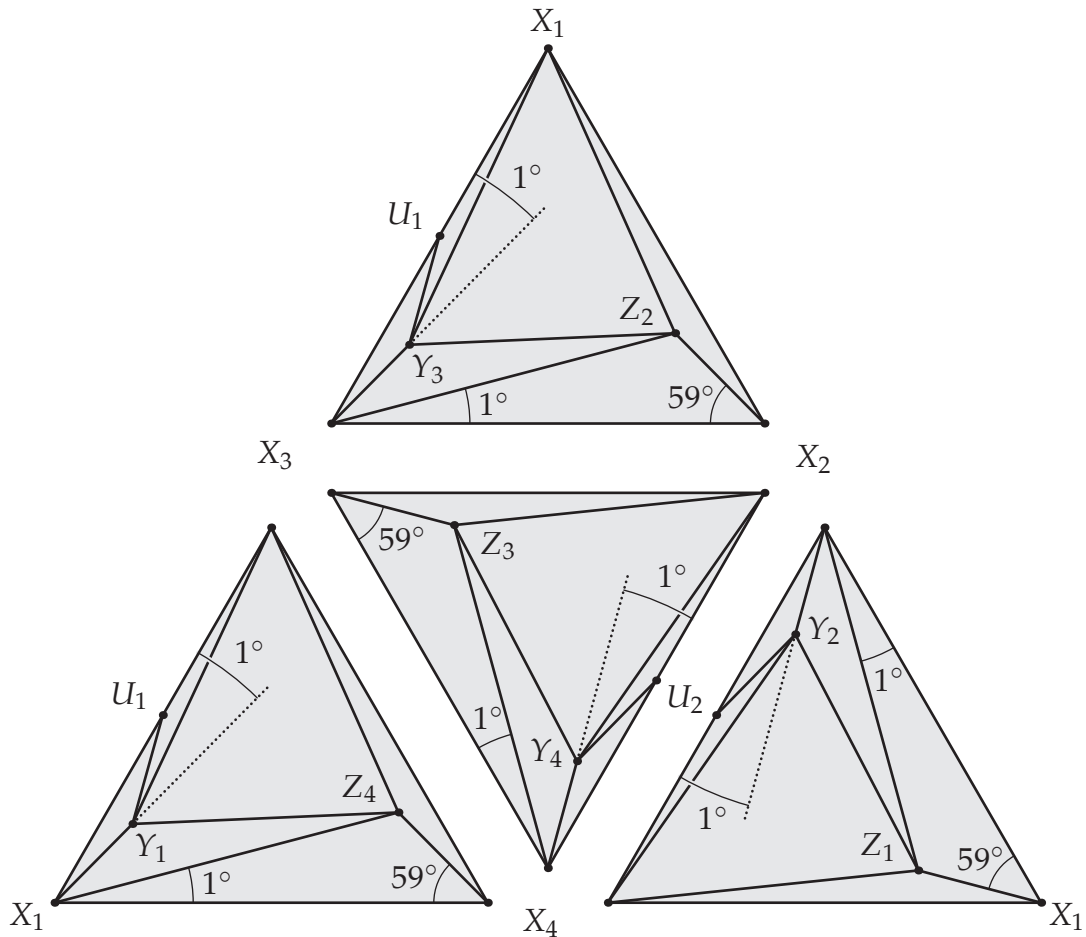


FIGURE 3.3 – Les faces extérieures de la triangulation de Rudin.

(VII). On peut voir que cette intersection est la triangulation (I). En particulier, les faces  $\{1,3,6\}$ ,  $\{1,4,7\}$  et  $\{1,2,5\}$  forment un cycle selon la définition de [16]. Par conséquent, la triangulation (VII) n'est pas régulière.

Là aussi, le théorème 3 permet de prouver que la triangulation (VII) est 2-régulière. Considérons la triangulation obtenue en flippant le circuit  $\{1,2,3,5,6\}$  dans (VII), c'est-à-dire en remplaçant l'étoile de l'arête  $\{2,6\}$  par les tétraèdres  $\{1,2,3,5\}$  et  $\{1,3,5,6\}$  et par leurs faces de dimensions inférieures. Cette triangulation est régulière et contient toutes les faces de (VII) sauf celles qui admettent l'arête  $\{2,6\}$  comme sous-ensemble. Puisque l'autre triangulation du même ensemble de points, obtenue en flippant le circuit  $\{1,3,4,6,7\}$  dans (VII), est également régulière et admet l'étoile de  $\{2,6\}$  dans (VII) comme sous-ensemble, la 2-régularité de (VII) découle du théorème 3.

Le deuxième exemple de dimension 3 étudié dans cette section est la triangulation proposée par Mary Ellen Rudin dans [68]. Cette triangulation d'un ensemble de 14 points, placés dans le bord d'un tétraèdre régulier, est l'un des premiers exemple de triangulation *non décortiquable* [68]. La non-régularité de la triangulation de Rudin est une conséquence de sa non décortiquabilité [36]. La description de cette triangulation qui est donnée ici se borne aux faits qui permettent de prouver qu'elle est 2-régulière, mais le lecteur trouvera une description complète dans [68].

Les sommets de la triangulation de Rudin seront notés  $X_1, \dots, X_4, Y_1, \dots, Y_4, Z_1, \dots, Z_4, U_1$  et  $U_2$  comme dans [68]. La distance entre deux  $X_i$  distincts vaut 1, et tous les sommets de la triangulation sont contenus dans le bord de l'enveloppe convexe du tétraèdre  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ . La disposition des sommets de la triangulation de Rudin peut être vue sur les faces de ce tétraèdre, représentées dans la figure 3.3. Les coordonnées explicites de ces sommets peuvent être déduites des indications fournies dans la figure, sachant que pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , la distance entre  $X_i$  et  $Y_i$  vaut  $\sin(60^\circ) \sin(1^\circ) / \sin(61^\circ)$ . Précisons que les angles dessinés dans la figure ne sont pas à l'échelle, afin d'améliorer la lisibilité. En effet, les sommets  $Y_i$  et  $Z_i$  sont très proches des arêtes du tétraèdre. Notons également que toutes les faces extérieures de la triangulation de Rudin sont également représentées dans la figure 3.3. Dans [68], Mary Ellen Rudin classe les 41 tétraèdres de sa triangulation en 11 catégories numérotées de (1) à (11) et elle utilise un indice  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  pour faire référence à chaque tétraèdre dans chacune de ces catégories. La catégorie (5) ne contient qu'un seul tétraèdre et toutes les autres contiennent quatre tétraèdres chacune. Pour éviter de donner la liste de ces 41 tétraèdres, que le lecteur trouvera dans [68], ceux-ci seront désignés dans le paragraphe suivant par leur catégorie et par leur indice à l'intérieur de ces catégories.

Pour un entier  $k$  égal à 1 ou à 2, appelons  $w_k$  la fonction de hauteur qui envoie  $X_k$  et  $X_{k+2}$  en 12, les deux autres  $X_i$  en 10000,  $U_k$  en 11, les quatre  $Z_i$  en 0 et tous les autres sommets de la triangulation de Rudin en 10. En utilisant des calculs exacts, on peut vérifier que  $R(w_k)$  contient les tétraèdres des catégories (1), (2), (3), (4) et (11) d'indice  $i \notin \{k, k+2\}$ , les tétraèdres des catégories (6), (7), (8), (9) et (10) d'indice  $i \in \{k, k+2\}$  ainsi que l'unique tétraèdre de la catégorie (5). Par conséquent, la triangulation de Rudin est un sous-ensemble de  $R(w_1) \cup R(w_2)$  et, d'après le théorème 3, elle est 2-régulière. Ceci montre que, contrairement aux triangulations non-régulières, les triangulations 2-régulières ne sont pas nécessairement décortiquables. Les fonctions de hauteur  $w_1$  et  $w_2$  ont été trouvées en utilisant l'algorithme du simplexe avec le jeu de contraintes formulé dans [80]. Les valeurs de la solution optimale obtenue avec une fonction objectif ad hoc ont ensuite été arrondies. Des calculs formels ont finalement été utilisés afin de vérifier que les fonctions de hauteur  $w_1$  et  $w_2$  sont encore admissibles et que la triangulation de Rudin est bien un sous-ensemble de  $R(w_1) \cup R(w_2)$ . Le code Mathematica qui fait cette vérification peut être téléchargé à l'adresse : <http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~lionel/Rudin.nb>

### 3.3 La régularité faible

Le critère de  $k$ -régularité énoncé par le théorème 3 nécessite un examen très précis des triangulations auxquelles il est appliqué. En général, l'utilisation de ce critère ne peut être faite qu'au cas par cas. Pour cette raison, le théorème 3 ne permet pas d'obtenir la  $k$ -régularité d'une grande classe de triangulations. Un critère plus flexible est donné dans cette section, qui s'appuie sur la notion de régularité faible d'une triangulation, introduite par Carl Lee [36, 37]. Les triangulations faiblement régulières sont un cas particulier très pertinent des triangulations dynamiques utilisées dans le cadre de nombreuses applications [19, 54, 55, 84].

**Définition 6.** Soit  $T$  une triangulation. Une injection  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  régularise  $T$  si  $\psi(T)$  est une triangulation régulière de  $\psi(v(T))$ .

On dira qu'une triangulation  $T$  est *faiblement régulière* si il existe au moins une injection  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui régularise  $T$ . Autrement dit, les triangulations faiblement régulières sont celles qui peuvent être rendues régulières par un mouvement de leurs sommets. Pour toute injection  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui régularise une triangulation  $T$ , on note :

$$r(\psi) = \dim(\{a - \psi(a) : a \in v(T)\}).$$

La valeur minimale de  $r(\psi)$  sur toutes les injections  $\psi$  qui régularisent  $T$  est appelée  $r(T)$ . Si il n'y a pas d'injection qui régularise une triangulation  $T$ , on notera par convention  $r(T) = +\infty$ .

Il a déjà été mentionné que, si un  $T$  est une triangulation dont l'ensemble des sommets est de cardinalité  $n$  et de dimension  $d$ , alors  $T$  est  $(n - d - 1)$ -régulière. Ceci fournit une borne supérieure sur  $m(T)$  qui dépend de  $n$ . Le théorème suivant donne une autre borne supérieure sur  $m(T)$  qui ne dépend plus de  $n$ , mais de  $r(T)$ . Notons que cette nouvelle borne n'a d'intérêt que si  $T$  est faiblement régulière :

**Théorème 4.** Pour tout triangulation  $T$ ,  $m(T) \leq r(T) + 1$ .

*Preuve.* Si  $r(T) = +\infty$ , alors le résultat est immédiat. Supposons que  $r(T) \in \mathbb{N}$  et appelons  $d$  la dimension de  $v(T)$ . Quitte à traduire  $v(T)$ , nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $v(T) \subset \mathbb{R}^d$ . Par définition, il existe une injection  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui régularise  $T$  et qui satisfait l'égalité  $r(\psi) = r(T)$ . Puisque  $\psi(T)$  est une triangulation régulière, il existe une application  $w : v(T) \rightarrow \mathbb{R}$  qui réalise  $\psi(T)$ .

Notons  $k = r(T) + 1$  et supposons que  $\mathbb{R}^d$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{d+k}$ . Soient  $u_1, \dots, u_{d+k}$  les vecteurs d'une base orthonormée de  $\mathbb{R}^{d+k}$  dont les  $r(T)$  premiers vecteurs forment une base de l'espace vectoriel engendré par  $\{a - \psi(a) : a \in v(T)\}$  et dont les  $d$  premiers vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout sommet  $a$  de  $T$ , appelons  $\phi(a)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{d+k}$  dont la composante selon le vecteur  $u_i$  est :

$$\phi(a) \cdot u_i = \begin{cases} a \cdot u_i & \text{si } 1 \leq i \leq d \\ \psi(a) \cdot u_{i-d} & \text{si } d < i < d+k \\ w(a) & \text{si } i = d+k \end{cases}$$

Soient  $p$  l'enveloppe convexe de  $\phi(v(T))$  et  $\pi$  la projection orthogonale  $\mathbb{R}^{d+k} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Remarquons que  $(p, \pi)$  est une projection de polytope. Pour toute face  $f$  de  $T$ , appelons  $f'$  la projection de  $\phi(f)$  sur l'espace vectoriel engendré par  $\{u_i : k < i < d+k\}$ . Par construction, l'ensemble  $T' = \{f' : f \in T\}$  est une triangulation isométrique à  $\psi(T)$ . Appelons également  $p'$  le polytope obtenu en projetant  $p$  sur l'espace vectoriel engendré par  $\{u_i : k < i \leq d+k\}$ . Puisque  $\psi(T)$  est réalisée par  $w$ , alors  $T'$  est induite par la projection de polytope  $(p', \pi')$  où  $\pi'$  est la projection orthogonale qui élimine la dernière coordonnée de tout vecteur de  $\mathbb{R}^{d+k}$ .

Pour tout sommet  $a'$  de  $T'$ , appelons  $\phi'(a')$  le sommet de  $p'$  tel que  $\pi' \circ \phi'(a') = a'$ . Nous avons montré que pour toute face  $f'$  de  $T'$ , l'enveloppe convexe de  $\phi'(f')$  est une face de  $p'$ . Puisque  $p'$  et  $\text{conv}(\phi'(f'))$  sont respectivement obtenus de  $p$  et de  $\text{conv}(\phi(f))$  par la même projection orthogonale, ceci montre que  $\text{conv}(\phi(f))$  est une face de  $p$ , et par conséquent que  $T$  est induite par  $(p, \pi)$ . Puisque la dimension de  $p$  est au plus  $d + k$ , nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

Soit  $T$  une triangulation dont l'ensemble des sommets est de dimension  $d$ . Si  $T$  est faiblement régulière, alors  $r(T)$  ne peut pas être supérieur à  $d$ . Le corollaire suivant est donc une conséquence immédiate du théorème 4 :

**Corollaire 1.** *Toute triangulation faiblement régulière dont l'ensemble des sommets est de dimension  $d$  est  $(d + 1)$ -régulière.*

Le résultat ci-dessous est obtenu en combinant le théorème 2 avec le corollaire 1 :

**Corollaire 2.** *Une triangulation  $T$  telle que  $r(T) \leq 1$  peut toujours être transformée par des flips en une triangulation régulière.*

Il a été montré par Charles Lawson [33, 34] que le graphe des flips d'un ensemble fini de points de dimension 2 est toujours connexe. Un résultat plus fort est obtenu dans la prochaine section : il est prouvé que si  $T$  est une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2, alors  $r(T) \leq 1$ . Parmi les différentes conséquences de ce résultat, on obtient une preuve alternative de la connexité du graphe des flips d'un ensemble fini de points de dimension 2.

### 3.3.1 Cas de la dimension 2

Soit  $T$  une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2. L'ensemble des sommets internes de  $T$  sera noté  $v_i(T)$  et l'ensemble de ses arêtes internes  $e_i(T)$ . Pour tout sommet  $a$  de  $v(T)$ , on notera  $l(a, T)$  l'ensemble des sommets adjacents à  $a$  dans  $T$ . Nous allons montrer que  $r(T) \leq 1$  en utilisant une caractérisation de la régularité due à James Clerk Maxwell [41, 42]. Cette caractérisation relie la convexité ou la concavité locale d'une surface triangulée en de dimension 3 aux signes des contraintes mécaniques induites dans ses arêtes lorsque cette surface est projetée dans le plan. Plusieurs résultats ont été obtenus depuis sur le sujet (voir par exemple [69, 83]). La condition suffisante de régularité fournie par cette caractérisation ne requiert pas explicitement que les arêtes projetées soient celles d'une triangulation. En particulier, l'hypothèse que ces arêtes ne doivent pas se croiser n'est pas une condition explicite. Ceci est très pratique lorsque l'on déplace les sommets d'une triangulation. Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème 5.1 dans [69] :

**Théorème 5.** *Soit  $T$  une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2 et  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  une injection telle que  $\psi(v(T) \setminus v_i(T))$  est l'ensemble des sommets d'un polygone convexe. Si  $\tau : e_i(T) \rightarrow ]0, +\infty[$  est une application telle que pour tout  $a \in v_i(T)$ ,*

$$\sum_{b \in l(a, T)} \tau(\{a, b\})(\psi(b) - \psi(a)) = 0, \quad (3.1)$$

alors  $\psi(T)$  est une triangulation régulière de  $\psi(v(T))$ .

Le lemme ci-dessous sera utilisé dans la preuve du théorème 6. Ce lemme donne des conditions suffisantes pour l'inversibilité d'une matrice carrée. Des conditions similaires d'inversibilité sont énoncées dans [2]. La preuve de ce lemme, omise ici, est donnée dans [50]. Elle s'appuie sur une analyse élémentaire de la convergence d'une certaine série géométrique de matrices carrées.

**Lemme 1.** *Soit  $M$  une matrice carrée dont la somme des colonnes est un vecteur non nul et non-négatif. Si  $\alpha I - M$  est non-négative et si  $(\alpha I - M)^k$  est positive pour un réel  $\alpha$  positif et un entier naturel quelconque  $k$  alors  $M$  est inversible.*

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il énonce non seulement que toute triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2 est faiblement régulière, mais aussi qu'une telle triangulation peut être rendue régulière par un déplacement de ses sommets le long de droites parallèles. Bien que la preuve de ce théorème soit assez longue, elle est tout de même rapportée ici, car c'est une preuve constructive qui sera illustrée par un exemple dans la prochaine sous-section.

**Théorème 6.** *Si  $T$  est une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2, alors  $T$  est faiblement régulière et  $r(T) \leq 1$ .*

*Preuve.* Soit  $T$  une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2. Si  $T$  n'a aucun sommet intérieur, alors elle est régulière. Dans ce cas  $r(T) = 0$ , et le résultat est immédiat. Nous supposons donc que  $T$  admet au moins un sommet intérieur. Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs unitaires orthogonaux de  $\mathbb{R}^2$  tels que les sommets de  $T$  ont des coordonnées distinctes le long de  $v$ . Dans une première étape, nous allons construire une application  $\tau : e_i(T) \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que pour tout  $a \in v_i(T)$ ,

$$\sum_{b \in l(a, T)} \tau(\{a, b\})(b - a) \cdot v = 0. \quad (3.2)$$

Pour cela, une certaine application  $\sigma : v_i(T) \rightarrow ]0, +\infty[$  va être définie, de laquelle  $\tau$  sera déduite. Pour tout sommet  $a \in v(T)$ , appelons  $v^-(a, T)$  l'ensemble des sommets  $b$  de  $T$  tels que  $b \cdot v \leq a \cdot v$ . Notons également :

$$l^-(a, T) = \{b \in v^-(a, T) : \{a, b\} \in e_i(T)\}.$$

Appelons  $n^+(a, T)$  le nombre d'arêtes intérieures de  $T$  de la forme  $\{a, b\}$  telles que  $a \cdot v < b \cdot v$ . Soit  $a \in v(T)$ . Nous allons prouver par récurrence sur la cardinalité de  $v^-(a, T)$  qu'il existe une application  $\sigma : v^-(a, T) \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que pour tout point  $x$  appartenant à  $v^-(a, T) \cap v_i(T)$ ,

$$n^+(x, T)\sigma(x) = \sum_{y \in l^-(x, T)} \sigma(y). \quad (3.3)$$

Si  $v^-(a, T)$  a un seul élément, cet élément est nécessairement  $a$  lui-même et on obtient une application positive sur  $v^-(a, T)$  en choisissant une valeur positive quelconque pour  $\sigma(a)$ . On remarque que, dans ce cas, l'équation (3.3) n'a pas besoin d'être satisfaite puisque  $a \notin v_i(T)$ . Maintenant supposons que  $v^-(a, T)$  contient au moins deux sommets. Appelons  $a'$  le sommet de  $v^-(a, T)$  tel que  $v^-(a, T) = v^-(a', T) \cup \{a\}$ . Supposons également, d'après le procédé de récurrence, qu'il existe une application  $\sigma : v^-(a', T) \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que pour tout  $x \in v^-(a', T) \cap v_i(T)$ , l'équation (3.3) est satisfaite. Cette application peut être prolongée à tout  $v^-(a, T)$  en choisissant un nombre positif quelconque pour  $\sigma(a)$  si  $a$  est un sommet extérieur de  $T$  et en posant :

$$\sigma(a) = \frac{1}{n^+(a, T)} \sum_{y \in l^-(a, T)} \sigma(y), \quad (3.4)$$

si  $a$  est un sommet intérieur de  $T$ . On observe alors que  $\sigma(a)$  est positif. En outre, l'équation (3.3) est satisfaite pour  $x = a$  d'après (3.4). Ceci termine notre récurrence.

Nous avons donc obtenu une application positive  $\sigma$  sur  $v(T)$  telle que pour tout sommet  $x$  de  $T$ , l'équation (3.3) est satisfaite. Appelons  $a$  et  $b$  les deux sommets d'une arête intérieure de  $T$  avec la convention que  $a \cdot v < b \cdot v$ . Notons :

$$\tau(\{a, b\}) = \frac{\sigma(a)}{(b - a) \cdot v}. \quad (3.5)$$

D'après (3.3) et (3.5), ceci définit une application positive  $\tau$  sur  $e_i(T)$  qui satisfait (3.2) pour tout sommet intérieur  $a$  de  $T$ . Nous allons maintenant construire une injection  $\psi : v(T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que l'équation (3.1) est vraie pour tout  $a \in v_i(T)$ .

Pour tout sommet  $a \in v_i(T)$ , posons  $\beta_a = \sum_{b \in l(a, T)} \tau(\{a, b\})(b - a) \cdot u$ . Considérons le système d'équations linéaires suivant sur les variables  $(x_a)_{a \in v_i(T)}$  :

$$\forall a \in v_i(T), \left[ \sum_{b \in l(a, T)} \tau(\{a, b\}) \right] x_a - \sum_{\substack{b \in l(a, T) \\ b \in v_i(T)}} \tau(\{a, b\}) x_b = \beta_a. \quad (3.6)$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit  $MX = B$ , où  $X$  et  $B$  sont les vecteurs dont les coefficients sont respectivement les  $x_a$  et les  $\beta_a$ , et où  $M$  est la matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont les sommes  $\sum_{b \in l(a, T)} \tau(\{a, b\})$  pour tout  $a \in v_i(T)$  et dont les coefficients non-diagonaux sont nuls ou égaux à  $-\tau(\{a, b\})$  pour une certaine paire  $(a, b) \in v_i(T)^2$ . En particulier, les coefficients diagonaux de  $M$  sont positifs et ses coefficients non-diagonaux sont non-positifs. En outre, la somme des coefficients dans la ligne de  $M$  correspondant au sommet  $a \in v_i(T)$  est nul si  $l(a, T) \subset v_i(T)$  et positif sinon. Puisqu'au moins un élément de  $v_i(T)$  est adjacent à un sommet extérieur de  $T$ , la somme des colonnes de  $M$  est un vecteur non-nul et non-négatif. Soit  $\alpha$  le plus grand coefficient diagonal de  $M$ . La matrice  $\alpha I - M$  est non-négative et ses coefficients non-diagonaux non-nuls correspondent précisément aux arêtes du 1-squelette de  $T$ . Puisque le 1-squelette de  $T$  est connexe, il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(\alpha I - M)^k$  est positive. D'après le lemme 1,  $M$  est inversible et le système (3.6) admet une unique

solution. Soit  $(x_a)_{a \in v_i(T)}$  cette solution. Pour tout  $a \in v_i(T)$ , appelons  $\psi(a) = a + x_a u$  et pour tout  $a \in v(T) \setminus v_i(T)$ , appelons  $\psi(a) = a$ . En utilisant  $\psi$  au lieu de  $(x_a)_{a \in v_i(T)}$  dans le système d'équations (3.6), on trouve que pour tout  $a \in v_i(T)$ ,

$$\sum_{b \in I(a, T)} \tau(\{a, b\})(\psi(b) - \psi(a)) \cdot u = 0. \quad (3.7)$$

Soit  $a$  un sommet intérieur de  $T$ . Puisque  $a$  et  $\psi(a)$  ont la même coordonnée selon  $v$ , on obtient de (3.2) et de (3.7) que l'équation (3.1) est satisfaite pour le sommet  $a$ . Par conséquent, les applications  $\tau$  et  $\psi$  satisfont les hypothèses du théorème 5. D'après ce théorème,  $\psi(T)$  est une triangulation régulière et  $T$  est faiblement régulière. En outre, l'enveloppe affine de  $\{a - \psi(a) : a \in v(T)\}$  est égale à  $\{0\}$  ou à la droite dirigée par le vecteur  $u$ . Par conséquent,  $r(T)$  n'est pas supérieur à 1.  $\square$

La preuve du théorème 6 est constructive puisqu'elle donne un moyen explicite de régulariser une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 2 : d'abord, une application positive  $\tau$  sur les arêtes intérieures de  $T$  est construite en considérant les sommets de  $T$  un à un, selon leur ordre le long d'un axe dirigé par un vecteur  $v$  donné. Après cette étape,  $\tau$  satisfait l'équation (3.2) pour tout  $a \in v_i(T)$ . En d'autres mots  $\tau$  satisfait la composante selon  $v$  de l'équation (3.1) pour tous les points intérieurs de  $T$ . Ensuite, le système d'équations (3.6) est résolu. La solution de ce système fournit l'application  $\psi$  qui déplace les sommets de  $T$  dans la direction orthogonale à  $v$  de telle manière que  $\psi(T)$  est une triangulation régulière de  $\psi(v(T))$ . Cette construction sera effectuée explicitement sur un exemple dans la section 3.3.2. Le résultat suivant est une conséquence directe des théorèmes 4 et 6 :

**Corollaire 3.** *Si  $E$  est un ensemble fini de points de dimension 2, alors toutes les triangulations de  $E$  sont 2-régulières.*

Ce corollaire, qui résout le cas de dimension 2 de la conjecture 2, ferme le cas des ensembles finis de points de dimension 2, puisqu'il existe des triangulations de tels ensembles de points qui ne sont pas régulières (voir, par exemple, la section 3.2). Remarquons que pour les ensembles de points de dimension  $d > 2$ , une réponse positive à la conjecture 2 ne fermerait pas définitivement le problème puisqu'il est possible que toutes les triangulations de tout ensemble fini de points de dimension  $d$  soient  $k$ -régulières pour un entier  $k$  inférieur à  $d$ .

Le théorème 2 énoncé au début de ce chapitre affirme que le sous-graphe induit par les triangulations 2-régulières dans le graphe des flips d'un ensemble fini de points est connexe. Par conséquent, le résultat suivant, obtenu par Charles Lawson [33, 34], peut être prouvé de manière alternative en combinant le corollaire 3 et le théorème 2 :

**Corollaire 4.** *Le graphe des flips de tout ensemble fini de points de dimension 2 est connexe.*

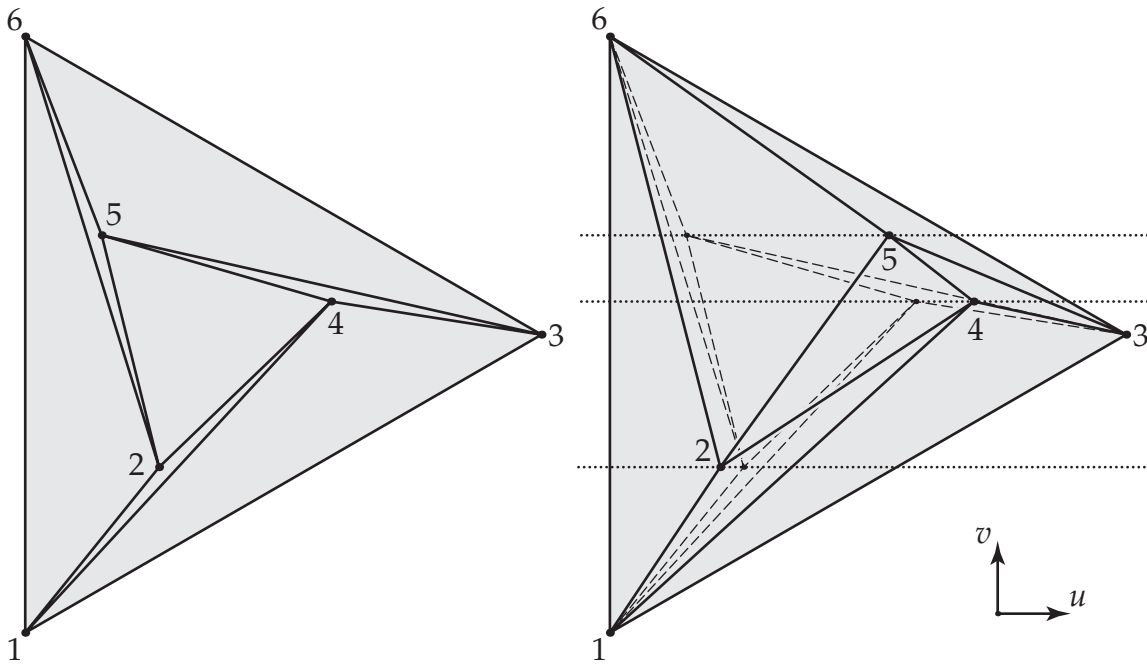


FIGURE 3.4 – Une triangulation non régulière (gauche) et la régularisation de cette triangulation (droite) construite en utilisant la preuve du théorème 6.

### 3.3.2 Exemple et discussion

Dans cette section, la construction utilisée dans la preuve du théorème 6 est explicitement appliquée à l'exemple (I) de la figure 3.1. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels positifs. La matrice ci-dessous donne les coordonnées de six points de  $\mathbb{R}^2$  dans la base canonique  $(u, v)$ . Chaque colonne de la matrice correspond à un point dont les coordonnées selon  $u$  et  $v$  peuvent être respectivement lues dans la première et dans la deuxième ligne :

$$\begin{pmatrix} -\alpha/2 & (\beta - 1)/2 & \alpha & 1 + \beta/2 & -\beta - 1/2 & -\alpha/2 \\ -\sqrt{3}\alpha/2 & -\sqrt{3}(\beta + 1)/2 & 0 & \sqrt{3}\beta/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}\alpha/2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble dont les éléments sont précisément ces six points sera noté  $E$ . Chacun de ces points sera noté en utilisant le numéro de sa colonne dans la matrice ci-dessus. Considérons les sept sous-ensembles de  $E$  suivants :

$$\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\} \text{ et } \{3, 5, 6\}.$$

Si  $\alpha > 1$  et si  $\beta < (\sqrt{\alpha^2 + 6\alpha - 3} - \alpha - 1)/2$  alors ces sous-ensembles sont les sept faces de dimension 2 d'une triangulation  $T_{\alpha, \beta}$  de  $E$ . Cette triangulation est représentée dans la partie gauche de la figure 3.4 avec  $\alpha = 3$  et  $\beta = 1/3$ . Comme il a été expliqué dans la section 3.2 à l'aide du critère d'acyclicité énoncé dans [16],  $T_{\alpha, \beta}$  est non-régulière.

Dans la preuve du théorème 6, une base orthogonale  $(u, v)$  est d'abord choisie avec la contrainte que les éléments de  $E$  ont des coordonnées distinctes selon le vecteur  $v$ . La base  $(u, v)$  qui a été utilisée pour exprimer les coordonnées des points de  $E$  dans la matrice ci-dessus satisfait déjà cette contrainte. Une application  $\sigma : E \rightarrow ]0, +\infty[$  est

construite ensuite de manière à ce que l'équation (3.3) soit satisfaite par tout sommet intérieur  $x$  de  $T_{\alpha,\beta}$ . Si on effectue cette construction comme elle est décrite dans la preuve du théorème 6, en choisissant  $\sqrt{3}/2$  comme image par  $\sigma$  de tout sommet externe de  $T_{\alpha,\beta}$ , on obtient les valeurs suivantes :

$$\sigma(2) = \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad \sigma(4) = \frac{7\sqrt{3}}{6}; \quad \sigma(5) = \frac{11\sqrt{3}}{6}.$$

Une application  $\tau : e_i(T_{\alpha,\beta}) \rightarrow ]0, +\infty[$  est ensuite construite à partir de l'application  $\sigma$  et des coordonnées selon le vecteur  $v$  des sommets de  $T_{\alpha,\beta}$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \tau(\{1,2\}) &= \frac{1}{\alpha - \beta - 1}; & \tau(\{1,4\}) &= \frac{1}{\alpha + \beta}; & \tau(\{2,4\}) &= \frac{1}{3 + 6\beta}; \\ \tau(\{2,5\}) &= \frac{1}{6 + 3\beta}; & \tau(\{2,6\}) &= \frac{1}{3 + 3\alpha + 3\beta}; & \tau(\{3,4\}) &= \frac{1}{\beta}; \\ \tau(\{3,5\}) &= 1; & \tau(\{4,5\}) &= \frac{7}{3 - 3\beta}; & \tau(\{5,6\}) &= \frac{11}{3\alpha - 3}. \end{aligned}$$

Le système (3.6) peut alors être écrit et résolu en utilisant ces valeurs pour l'application  $\tau$ . Bien que cela puisse être fait formellement en fonction de  $\alpha$  et de  $\beta$ , l'expression générale de la solution est très compliquée et sera omise ici. La valeur exacte de cette solution quand  $\alpha = 3$  et  $\beta = 1/3$  est :

$$x_2 = -\frac{214}{1047}, \quad x_4 = \frac{176}{349} \text{ et } x_5 = \frac{1846}{1047}.$$

D'après la preuve du théorème 6, Ces trois valeurs sont des déplacements dans la direction du vecteur  $u$  des sommets 2, 4 et 5 qui régularisent la triangulation. La triangulation régulière obtenue est représentée dans la partie droite de la figure 3.4, où la triangulation originale est esquissée en traits interrompus et où le déplacement des sommets se fait le long des lignes pointillées. On peut voir, en particulier que les arêtes  $\{1,4\}$ ,  $\{2,6\}$  et  $\{3,5\}$  ne forment plus un cycle au sens de [16] après ce déplacement.

Il est naturel de se demander si le théorème 6 reste vrai quand  $T$  est une triangulation d'un ensemble fini de points de dimension supérieur à 2. La réponse à cette question est immédiatement donnée par les deux triangulations de dimension 3 décrites dans la section 3.2.2. En effet, aucune de ces deux triangulations n'est faiblement régulière. Le cas de la triangulation (VII) est discuté par Carl Lee dans [36, 37]. La triangulation de Rudin n'est pas faiblement régulière parce qu'elle n'est pas décortiquable [68]. Cette dernière notion est purement topologique. Ainsi toute triangulation obtenue en déplaçant les sommets de la triangulation de Rudin restera non décortiquable, et donc non régulière [36]. Cependant, ces deux triangulations sont 2-régulières. Remarquons, en particulier, qu'aucune triangulation d'un ensemble fini de points de dimension 3 n'est connue qui ne soit pas 2-régulière.

---

---

# Chapitre 4

---

## Une caractérisation de la $k$ -régularité

Soit  $E$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^d$ . Une conséquence du théorème 1 est la connexité du graphe  $\gamma_1(E)$ . D'après le théorème 2, le graphe  $\gamma_2(E)$  est lui aussi connexe. Ce lien entre la connexité du graphe des flips et la notion de  $k$ -régularité pose la question suivante : *si  $C$  est un complexe simplicial, que vaut  $m(C)$  ?* En d'autres mots, quelle est la plus petite valeur de l'entier  $k$  pour laquelle  $C$  est  $k$ -régulier ?

Les deux critères de  $k$ -régularité donnés par les théorèmes 3 et 4 sont utiles dans les cas particuliers qui ont déjà été passés en revue dans le chapitre 3, c'est-à-dire les exemples de la section 3.2 et les triangulations d'ensembles finis de points de dimension 2. Dans les autres cas, ces critères n'ont, jusqu'ici, pas permis d'obtenir de résultats significatifs, par l'intermédiaire du théorème 2, au sujet de la connexité du graphe des flips.

Une caractérisation de la  $k$ -régularité d'un complexe simplicial est donnée dans la section 4.1 ci-dessous, qui s'appuie sur l'espace des dépendances affines et sur une construction voisine de la transformée de Gale [24, 85]. Cette caractérisation permet d'obtenir des bornes supérieures sur  $m(C)$ , et des résultats de connexité des graphes de flips quand ces bornes sont suffisamment petites. Il a été mentionné dans le chapitre précédent que  $m(C)$  n'est jamais plus grand que  $n - d - 1$  où  $n$  et  $d$  sont respectivement le cardinal et la dimension de  $v(C)$ . Il sera montré dans la section 4.2 qu'en général,  $m(C) \leq n - d - 2$  et que la borne supérieure suivante, plus forte, est toujours vraie :

$$m(C) \leq n - d - 2 - \left\lfloor \frac{n - d - 3}{\lceil d/2 + 1 \rceil} \right\rfloor.$$

On obtiendra aussi la  $(2^{d-1} - d + 1)$ -régularité de toutes les triangulations de l'ensemble des sommets du cube de dimension  $d$ . Les résultats de connexité des graphes de flips sont regroupés dans la section 4.3. Ces résultats concernent principalement les ensembles de dimension  $d$  et de cardinalité  $d + 5$ . En particulier, la connexité du graphe des flips de  $E$  sera établie quand  $E$  est un ensemble de 8 points qui sont les sommets d'un polytope simplicial de dimension 3. Enfin, une question posée dans [49] sera résolue : en utilisant un ensemble de points proposé par Francisco Santos [10],

nous montrerons dans la section 4.4 que le sous-graphe induit par les triangulations 3-régulières dans le graphe des flips n'est pas toujours connexe.

Certaines des preuves présentées dans ce chapitre ne sont que des ébauches, et les preuves de certains résultats sont omises. Tous ces résultats peuvent être retrouvés dans [48] avec leurs preuves complètes.

## 4.1 L'espace des dépendances affines

Soit  $n$  un entier positif. La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  sera notée  $B$  dans ce chapitre. Appelons  $H$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les vecteurs dont la somme des coordonnées dans la base  $B$  est nulle :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{y \in B} x \cdot y = 0\}.$$

Soit  $P(B)$  l'ensemble des projections orthogonales  $\mathbb{R}^n \rightarrow H$  qui n'envoient pas deux vecteurs de  $B$  sur le même point. Ainsi, l'image de  $B$  par une telle projection est un ensemble de  $n$  points dans  $H$ . Remarquons que les éléments de  $P(B)$  sont des applications linéaires, et que par conséquent, l'enveloppe affine de  $\pi(B)$  est un sous-espace vectoriel de  $H$  pour tout  $\pi \in P(B)$ . Plus précisément,

$$\text{aff}(\pi(B)) = \pi(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, la dimension de  $\pi(B)$  est égale au rang de  $\pi$ . Tout sous-ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{R}^d$  peut-être identifié, à une transformation affine près avec l'image de  $B$  par une projection appartenant à  $P(B)$  :

**Proposition 2.** *Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{R}^d$  et  $\xi : B \rightarrow E$  une bijection. Il existe une projection  $\pi$  dans  $P(B)$  et une bijection affine  $\phi$  de  $\pi(\mathbb{R}^n)$  sur  $\text{aff}(E)$  telles que  $\phi \circ \pi$  et  $\xi$  coïncident sur  $B$ .*

En d'autres mots, on peut supposer sans perte de généralité que tout ensemble de  $n$  points est l'image de  $B$  par une projection appartenant à  $P(B)$ . Cette construction fournit un moyen particulièrement élégant de définir l'espace des dépendances affines d'un ensemble de points. En effet, l'espace des dépendances affines de  $\pi(B)$  contient exactement les vecteurs dont les coordonnées dans une certaine base sont les coefficients des dépendances affines de  $\pi(B)$ . Si cette base est  $B$ , on obtient la définition suivante :

**Définition 7.** *Considérons une projection  $\pi$  appartenant à  $P(B)$ . L'espace des dépendances affines de  $\pi(B)$  est le sous-ensemble de  $H$  suivant :*

$$D(\pi) = \{x \in H : \sum_{y \in B} (x \cdot y)\pi(y) = 0\}.$$

L'espace des dépendances affines joue un rôle fondamental dans la construction des diagrammes de Gale [10, 24, 85] : le diagramme de Gale d'un ensemble fini de points est un ensemble de vecteurs qui appartiennent à son espace des dépendances affines. Les outils qui seront présentés dans ce chapitre utilisent l'espace des dépendances affines lui-même, ainsi que ses sous-espaces vectoriels, plutôt que la transformée de Gale, mais le lien entre ces deux constructions sera expliqué à l'aide d'un exemple plus loin dans cette section. Les deux propositions suivantes sont des résultats classiques dans la théorie des diagrammes de Gale. La première de ces propositions est, essentiellement, le lemme 4.1.34. dans [10]. Elle affirme que, pour toute projection  $\pi$  appartenant à  $P(B)$ , le complémentaire orthogonal, dans  $H$ , de l'espace vectoriel engendré par  $\pi(B)$  est l'espace des dépendances affines de  $\pi(B)$  :

**Proposition 3.** *Pour toute projection  $\pi$  appartenant à  $P(B)$ , le complémentaire orthogonal de  $\pi(\mathbb{R}^n)$  dans  $H$  est  $D(\pi)$ .*

La deuxième proposition est une autre remarque qui est classique dans la théorie des diagrammes de Gale (voir par exemple le lemme 4.1.34 dans [10]) qui est une conséquence directe de la proposition 3 :

**Proposition 4.** *Pour tout  $\pi \in P(B)$ , la dimension de  $D(\pi)$  est  $n - \dim(\pi(B)) - 1$ .*

Considérons un complexe simplicial abstrait sur un ensemble de  $n$  points. D'après la proposition 2, ce complexe peut être identifié, à une transformation affine près, à l'image par une projection  $\pi$  appartenant à  $P(B)$  d'un complexe simplicial  $K$  sur  $B$ . Maintenant, supposons que  $\pi(K)$  soit induit par une projection de polytope  $(p, \pi')$ . Il est en fait possible de supposer que cette projection de polytope se produit à l'intérieur de  $H$ , c'est-à-dire que  $p$  est l'enveloppe convexe de  $v(\sigma(K))$  où  $\sigma$  est une projection appartenant à  $P(B)$  telle que  $\pi(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathbb{R}^n)$  et  $\pi = \pi' \circ \sigma$ . Cet énoncé ne sera pas utile dans toute sa généralité dans la suite, et il ne sera pas prouvé ici. La preuve du résultat plus faible suivant pourra être trouvée dans [48] :

**Lemme 2.** *Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$  et  $K$  un complexe simplicial sur  $B$ . Il existe une projection  $\sigma \in P(B)$  de rang  $\dim(\pi(B)) + m(\pi(K))$  telle que  $\pi(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $s \in \sigma(K)$ ,  $\text{conv}(s)$  est une face de  $\text{conv}(v(\sigma(K)))$ .*

Le lien entre l'espace des dépendances affines et la notion de  $k$ -régularité est décrit dans le reste de cette section. En particulier, il sera montré comment la construction de  $D(\pi)$  pour une projection donnée  $\pi \in P(B)$  permet de trouver des projections de polytopes qui induisent un complexe simplicial sur  $\pi(B)$ .

Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$ . Pour tout vecteur  $x$  dans  $D(\pi)$  considérons les deux sous-ensembles de  $\pi(B)$  suivants :

$$s_{\pi}^{-}(x) = \pi(\{y \in B : x \cdot y < 0\}) \text{ et } s_{\pi}^{+}(x) = \pi(\{y \in B : x \cdot y > 0\}).$$

Pour tout  $x \in D(\pi) \setminus \{0\}$ , les ensembles  $s_{\pi}^{-}(x)$  et  $s_{\pi}^{+}(x)$  sont disjoints et les intérieurs relatifs de leurs enveloppes convexes sont non disjoints. En effet, puisque  $x$  appartient à  $D(\pi)$ , alors par définition :

$$\sum_{y \in B} (x \cdot y) \pi(y) = 0. \quad (4.1)$$

Dans cette égalité, les termes non nuls sont ceux qui correspondent aux points  $y$  dans  $s_{\pi}^{+}(x)$  ou dans  $s_{\pi}^{-}(x)$ . Ainsi, on peut la réécrire de la manière suivante :

$$-\frac{1}{\alpha} \sum_{y \in s_{\pi}^{-}(x)} (x \cdot y) \pi(y) = \frac{1}{\alpha} \sum_{y \in s_{\pi}^{+}(x)} (x \cdot y) \pi(y), \quad (4.2)$$

où  $\alpha$  est la somme des coefficients positifs du vecteur  $x$  dans la base  $B$ . Le membre de droite de l'équation (4.2) est un point dans l'intérieur relatif de  $\text{conv}(s_{\pi}^{+}(x))$ , et son membre de gauche est un point dans l'intérieur relatif de  $\text{conv}(s_{\pi}^{-}(x))$ . Par conséquent, l'équation (4.1) affirme que les intérieurs relatifs des enveloppes convexes de  $s_{\pi}^{-}(x)$  et de  $s_{\pi}^{+}(x)$  sont non disjoints.

Si  $x$  est une dépendance affine qui correspond à un circuit  $z$ , alors  $\{s_{\pi}^{-}(x), s_{\pi}^{+}(x)\}$  est exactement la partition de Radon de  $z$  [61].

Considérons un sous-ensemble  $E$  de  $\pi(B)$ . Le lemme suivant caractérise les faces de  $\text{conv}(E)$  en utilisant des conditions sur  $s_{\pi}^{-}(x)$  et sur  $s_{\pi}^{+}(x)$ . Dans le cas particulier où  $E$  est égal à  $\pi(B)$  tout entier et que cet ensemble de points est en position générale, ce lemme affirme que l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $s$  de  $E$  est une face de  $\text{conv}(E)$  si et seulement si aucune dépendance affine  $x \in D(\pi)$  n'est telle que  $s$  admet  $s_{\pi}^{-}(x)$  ou  $s_{\pi}^{+}(x)$  comme sous-ensemble. Afin de caractériser les faces de  $\text{conv}(E)$  également quand  $E$  est un sous-ensemble propre de  $\pi(B)$  ou quand il n'est pas en position générale, cet énoncé doit être légèrement modifié comme on peut le voir ci-dessous. La preuve de ce lemme, donnée dans [48] s'appuie sur un théorème de l'alternative similaire au lemme de Farkas et dû à Erich Stiemke [79].

**Lemme 3.** *Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$  et  $E$  un sous-ensemble de  $\pi(B)$ . Pour tout sous-ensemble  $s$  de  $E$ , l'enveloppe convexe de  $s$  est une face de  $\text{conv}(E)$  si et seulement si pour tout  $x \in D(\pi)$ , au moins l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

- i.  $s_{\pi}^{+}(x)$  n'est pas un sous-ensemble de  $s$ ,
- ii.  $s_{\pi}^{-}(x)$  est un sous-ensemble de  $\text{conv}(s)$ ,
- iii.  $s_{\pi}^{-}(x)$  n'est pas un sous-ensemble de  $E$ .

Ce lemme peut être utilisé pour identifier les projections qui envoient les faces d'un complexe simplicial donné dans le bord d'un polytope. Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$  et  $C$  un complexe simplicial sur  $\pi(B)$ . Considérons les trois conditions données dans l'énoncé du lemme 3. On peut voir que si  $E$  est l'ensemble des sommets de  $C$  et si  $s$  est une face de  $C$ , alors la seconde condition implique la troisième. Ceci suggère la définition suivante :

$$I_{\pi}(C) = \{x \in D(\pi) \setminus \{0\} : s_{\pi}^{+}(x) \in C, s_{\pi}^{-}(x) \subset v(C)\}.$$

Cet ensemble contient exactement les vecteurs  $x$  de  $D(\pi)$  qui ne satisfont aucune des trois conditions de l'énoncé du lemme 3 quand  $E = v(C)$  et  $s = s_{\pi}^{+}(x)$ . Autrement dit, chaque vecteur  $x \in I_{\pi}(C)$  définit une face de  $C$  dont l'enveloppe convexe n'est pas

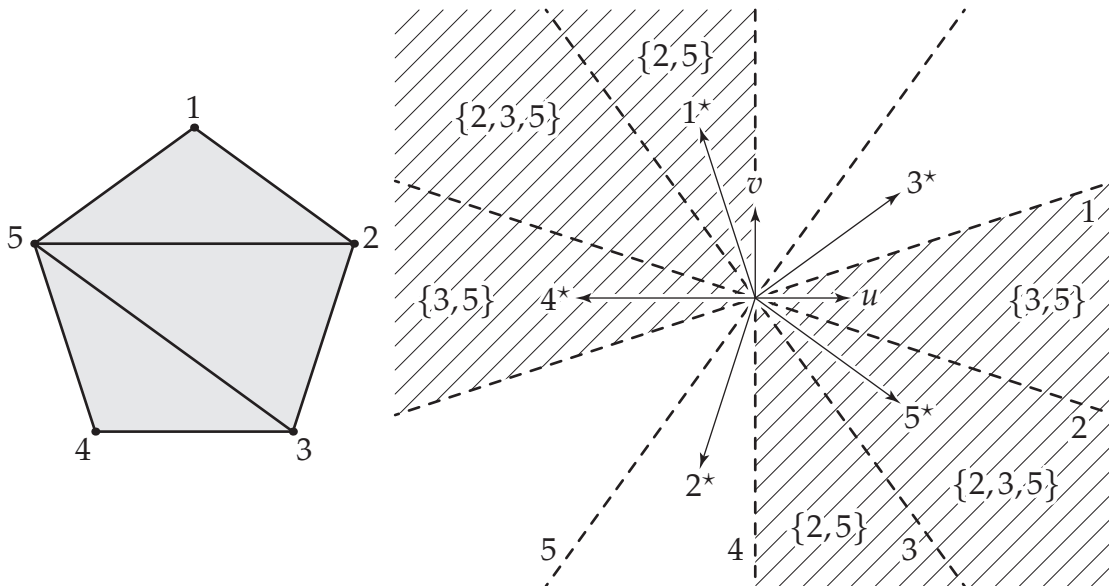


FIGURE 4.1 – Un pentagone régulier (gauche) et sa transformée de Gale (droite) construite dans  $D(\pi)$  en utilisant la base  $(u, v)$ . Chacune des droites en traits longs est indiquée par un sommet du pentagone, et contient les dépendances affines pour lesquelles le coefficient de ce sommet est nul. La surface hachurée est l'ensemble  $I_\pi(T)$ , où  $T$  est la triangulation représentée dans la partie gauche de la figure. La face de  $T$  à cause de laquelle une région conique donnée appartient à la surface hachurée est indiquée à l'intérieur de la région.

une face de  $\text{conv}(v(C))$ . Inversement, une telle face  $s$  de  $C$  provoque la présence d'un vecteur  $x$  dans  $I_\pi(C)$  tel que  $s_\pi^+(x) \subset s$ . La proposition suivante est une conséquence directe de ces observations :

**Proposition 5.** Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$  et  $C$  un complexe simplicial sur  $\pi(B)$ . L'enveloppe convexe de chaque face de  $C$  est une face de  $\text{conv}(v(C))$  si et seulement si l'ensemble  $I_\pi(C)$  est vide.

Afin de donner un peu d'intuition sur la manière dont l'ensemble  $I_\pi(C)$  est placé à l'intérieur de l'espace des dépendances affines, empruntons l'exemple 4.1.41. dans [10] : indiquons de 1 à 5 les sommets du pentagone régulier représenté dans la partie gauche de la figure 4.1. Soient  $E$  l'ensemble de ces cinq points et  $T$  la triangulation de  $E$  représentée sur le même dessin. Il découle de la proposition 2 que  $E$  peut être identifié, à une transformation affine près à l'image par une projection  $\pi$  de la base canonique  $B$  de  $\mathbb{R}^5$ . On peut supposer que l'élément de  $E$  noté  $i$  est l'image du  $i$ ème vecteur de  $B$ . Considérons maintenant les deux vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^5$ , exprimés dans la base  $B$  :

$$u = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2\alpha \\ 0 \\ -2\alpha \end{pmatrix},$$

où  $\alpha = 2 \cos(2\pi/5)$  et  $\beta = 1 + \alpha$ . Ces vecteurs sont deux dépendances affines de  $E$ , c'est-à-dire qu'ils appartiennent tous les deux à  $D(u)$ . La première de ces dépendances

affines affirme que l'enveloppe convexe de  $\{1,2,4\}$  contient le centre de gravité de  $\{3,5\}$  et la deuxième que l'arête  $\{1,3\}$  croise l'arête  $\{2,5\}$ . En outre, les vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthogonaux. Par conséquent, et parce que  $D(\pi)$  est de dimension 2 (voir la proposition 4),  $u$  et  $v$  forment une base orthogonale de  $D(\pi)$ . Maintenant, faisons correspondre au point  $i \in E$  le vecteur  $i^*$  de  $D(\pi)$  dont les coordonnées dans la base  $(u, v)$  sont la  $i$ ème coordonnée de  $u$  dans  $B$  et la  $i$ ème coordonnée de  $v$  dans la même base. Ces vecteurs forment la transformée de Gale de  $E$  [10, 24, 85] qui sera notée  $E^*$  ici. Cette transformée de Gale est dessinée dans la partie droite de la figure 4.1.

Faisons également correspondre, à chaque point  $i$  de  $E$ , l'ensemble des vecteurs dans  $D(\pi)$  dont la  $i$ ème coordonnée est nulle. Ces cinq ensembles sont les droites en traits longs qui sont indiquées par l'élément de  $E$  auquel elles correspondent dans la partie droite de la figure 4.1. Appelons  $\mathcal{H}$  l'ensemble de ces cinq droites. On peut voir dans la figure que la droite correspondant au point  $i$  de  $E$  est orthogonale au vecteur  $i^*$ . Cette propriété est vraie en général quand  $E$  est quelconque, dès que la transformée de Gale de  $E$  est construite et représentée dans la même base orthogonale de  $D(\pi)$ . En particulier,  $\mathcal{H}$  peut être défini en général comme l'arrangement d'hyperplans de  $D(\pi)$  orthogonaux aux vecteurs de  $E^*$ . D'après cette construction, la paire  $\{s_\pi^-(x), s_\pi^+(x)\}$  est identique pour tous les vecteurs  $x$  dans l'intérieur relatif de n'importe quel cône de l'éventail défini par  $\mathcal{H}$ . En particulier  $I_\pi(T)$  est obtenu en enlevant 0 de l'union d'un sous-ensemble  $S$  de ces cônes. L'ensemble  $I_\pi(T)$  est hachuré dans la figure 4.1 et la face de  $T$  à cause de laquelle un cône donné appartient à  $S$  est indiquée.

Comme on peut le voir dans la figure 4.1, la droite appartenant à  $\mathcal{H}$  qui est associée au point 5 est disjointe de  $I_\pi(T)$ . Le lien entre l'existence de tels sous-espaces de  $D(\pi)$  et les valeurs possibles de  $m$  est maintenant décrit. Considérons deux projections  $\pi$  et  $\sigma$  appartenant à  $P(B)$  et un complexe simplicial  $K$  sur  $B$ . Sous certaines conditions, l'ensemble  $I_\sigma(\sigma(K))$  est un sous-ensemble de  $I_\pi(\pi(K))$  :

**Lemme 4.** *Soient  $\pi$  et  $\sigma$  deux projections appartenant à  $P(B)$  et  $K$  un complexe simplicial sur  $B$ . Si  $\pi(K)$  est un complexe simplicial et si  $\pi(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  alors  $I_\sigma(\sigma(K))$  est l'intersection de  $I_\pi(\pi(K))$  et de  $D(\sigma)$ .*

*Preuve.* Supposons que  $\pi(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathbb{R}^n)$  et rappelons que  $\pi$  et  $\sigma$  sont des projections orthogonales. Par conséquent, il existe une autre projection orthogonale  $\pi' : \sigma(\mathbb{R}^n) \rightarrow \pi(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\pi = \pi' \circ \sigma$ . D'autre part, puisque  $\pi(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$ , il découle de la proposition 3 que  $D(\sigma)$  est un sous-ensemble de  $D(\pi)$ .

Maintenant, supposons également que  $\pi(K)$  est un complexe simplicial et considérons un vecteur  $x \in D(\sigma)$ . Puisque  $\pi = \pi' \circ \sigma$ , d'après les définitions de ces ensembles,  $s_\pi^-(x)$  et  $s_\pi^+(x)$  sont les images respectives par  $\pi'$  de  $s_\sigma^-(x)$  et de  $s_\sigma^+(x)$ . En particulier,  $s_\pi^+(x)$  appartient à  $\pi(K)$  si et seulement si  $s_\sigma^+(x)$  appartient à  $\sigma(K)$ . Pour la même raison,  $s_\pi^-(x) \subset v(\pi(K))$  si et seulement si  $s_\sigma^-(x) \subset v(\sigma(K))$ . Autrement dit, les deux conditions sur  $x$  dans la définition de  $I_\pi(\pi(K))$  sont équivalentes aux conditions correspondantes dans la définition de  $I_\sigma(\sigma(K))$ . Puisque  $x$  est un vecteur de  $D(\sigma)$ , cela prouve que  $I_\sigma(\sigma(K))$  est l'intersection de  $I_\pi(\pi(K))$  et de  $D(\sigma)$ .  $\square$

Si  $\pi$  est une projection appartenant à  $P(B)$  et si  $C$  est un complexe simplicial sur  $\pi(B)$ , le prochain théorème permet de caractériser  $m(C)$  en utilisant les sous-espaces linéaires

de  $D(\pi)$  disjoints de  $I_\pi(C)$ . Comme nous le verrons dans la section 4.2, ce théorème permet, en particulier, d'obtenir de nouvelles bornes supérieures sur  $m(C)$ .

**Théorème 7.** *Soit  $\pi$  une projection appartenant à  $P(B)$  et  $C$  un complexe simplicial sur  $\pi(B)$ . Il existe un sous-espace vectoriel de  $D(\pi)$  disjoint de  $I_\pi(C)$  et de dimension  $k$  si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$m(C) \leq n - \dim(\pi(B)) - k - 1.$$

*Preuve.* Puisque  $\pi$  ne projette pas deux vecteurs distincts de  $B$  sur le même point, il y a un unique complexe simplicial  $K$  sur  $B$  dont l'image par  $\pi$  est  $C$ .

Supposons d'abord que  $M$  est un sous-espace vectoriel de  $D(\pi)$  dont l'intersection avec  $I_\pi(C)$  est vide. Appelons  $\sigma$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur le complémentaire orthogonal de  $M$  dans  $H$ . Il découle de cette construction que  $\pi(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Puisque  $\sigma$  et  $\pi$  sont deux projections orthogonales telles que  $\pi(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$ , la projection orthogonale  $\pi'$  de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  sur  $\pi(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $\pi' \circ \sigma = \pi$ . Ceci prouve, en particulier, que la restriction de  $\sigma$  à  $B$  est injective et, donc, que  $\sigma$  appartient à  $P(B)$ . D'après la proposition 3,  $D(\sigma)$  est alors égal à  $M$ . Par hypothèse,  $D(\sigma)$  et  $I_\pi(C)$  sont donc disjoints, et il découle du lemme 4 que l'ensemble  $I_\sigma(\sigma(K))$  est vide. Ainsi, d'après la proposition 5, les enveloppes convexes des faces de  $\sigma(K)$  sont des faces de  $\text{conv}(v(\sigma(K)))$ . Remarquons également que  $\pi'$  envoie  $\sigma(K)$  sur  $C$ . Par conséquent,  $C$  est induit par la projection de polytopes  $(p, \pi')$  où  $p$  est l'enveloppe convexe de  $v(\sigma(K))$ . Puisque  $p$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  et que le rang de  $\sigma$  est  $n - \dim(M) - 1$ , l'inégalité voulue est satisfaite.

Maintenant, supposons que  $m(C) \leq n - \dim(\pi(B)) - k - 1$  pour un certain entier  $k$ . D'après le lemme 2, il existe une projection  $\sigma$  de rang  $\dim(\pi(B)) + m(C)$  appartenant à  $P(B)$  telle que  $\pi(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathbb{R}^n)$  et telle que les enveloppes convexes des faces de  $\sigma(K)$  sont des faces de  $\text{conv}(v(\sigma(K)))$ . Une première conséquence de cela est que la dimension de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  est au plus  $n - k - 1$ . D'autre part, d'après la proposition 5, l'ensemble  $I_\sigma(\sigma(K))$  est vide. Puisque  $\pi(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$ , on obtient du lemme 4 que  $I_\sigma(\sigma(K))$  est l'intersection de  $I_\pi(C)$  et de  $D(\sigma)$ , ce qui prouve que cette intersection est vide. Enfin, il découle de la proposition 3 et de l'inclusion de  $\pi(\mathbb{R}^n)$  dans  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  que  $D(\sigma)$  est un sous-ensemble de  $D(\pi)$ . Par conséquent,  $D(\sigma)$  est un sous-espace vectoriel de  $D(\pi)$  disjoint de  $I_\pi(C)$ . Puisque la dimension de  $\sigma(\mathbb{R}^n)$  est au plus  $n - k - 1$ , celle de  $D(\sigma)$  est au moins  $k$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Revenons à l'exemple représenté dans la figure 4.1. Comme il a déjà été mentionné, la droite appartenant à  $\mathcal{H}$  qui correspond au point 5 est disjointe de  $I_\pi(T)$ . Il découle donc du théorème 7 que  $m(T) \leq 1$ . En d'autres mots,  $T$  est régulière. Ceci n'est pas très surprenant puisque l'ensemble des sommets d'un polygone convexe n'admet que des triangulations régulières. Telle quelle, cette borne sur  $m(T)$  laisse cependant ouverte une autre possibilité :  $T$  ne pourrait-elle pas être 0-régulière ? Dans le cas particulier qui nous occupe, la réponse est non. En effet, un complexe simplicial est 0-régulier quand l'enveloppe convexe de ses faces sont des faces d'un certain polytope, ce qui n'est pas le cas de la triangulation  $T$ . Cette conclusion peut être aussi obtenue du théorème 7. Ce théorème affirme que la 0-régularité de  $T$  est équivalente à l'existence d'un sous-espace

de dimension 2 de  $D(\pi)$  qui est disjoint de  $I_\pi(T)$ . Nous pouvons voir dans la figure 4.1 que tout sous-espace de  $D(\pi)$  disjoint de  $I_\pi(T)$  est de dimension au plus 1. Par conséquent,  $T$  ne peut pas être 0-régulière. Les résultats présentés dans cette section, et particulièrement le théorème 7, vont maintenant être utilisés pour borner  $m$ .

## 4.2 Quelques bornes supérieures sur $m$

Soit  $C$  un complexe simplicial sur un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$ . Des bornes supérieures sur  $m(C)$  sont données dans cette section. Le théorème 8 et le corollaire 5 ci-dessous fournissent des bornes générales qui ne dépendent que de  $n$  et de  $d$ . Le théorème 9 donne des bornes plus fines qui dépendent de la géométrie de  $C$ . Enfin, l'ensemble des sommets du cube de dimension  $d$  est étudié et il sera montré que toutes ses triangulations sont  $(2^{d-1} - d + 1)$ -régulières. D'après la proposition 2, il y a une projection  $\pi$  dans  $P(B)$  telle que  $E$  peut être identifié, à une transformation affine près, avec  $\pi(B)$ . Le premier lemme de cette section affirme que si  $n \geq d + 3$ , alors  $D(\pi)$  contient au moins un vecteur non-nul qui n'appartient pas à  $I_\pi(C)$ .

**Lemme 5.** *Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$  et  $C$  un complexe simplicial sur  $E$ . Si  $n \geq d + 3$  alors  $E$  admet deux sous-ensembles disjoints qui n'appartiennent pas à  $C$  et dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non-disjoints.*

*Preuve.* Supposons que  $n \geq d + 3$ . Comme il a été mentionné ci-dessus, on peut également supposer, sans perte de généralité, que  $E$  est l'image de  $B$  par une projection  $\pi$  appartenant à  $P(B)$ . D'après la proposition 4, la dimension de  $D(\pi)$  est au moins 2. Soient  $y$  et  $z$  deux vecteurs linéairement indépendants de  $D(\pi)$ . Puisque les enveloppes convexes de  $s_\pi^-(y)$  et de  $s_\pi^+(y)$  ont des intérieurs relatifs non disjoints, ces ensembles ne peuvent pas tous les deux appartenir à  $C$ . Quitte à changer le signe de  $y$ , on peut donc supposer que  $s_\pi^-(y)$  n'est pas une face de  $C$ . Pour la même raison, on peut aussi supposer que  $s_\pi^+(z)$  n'est pas non plus une face de  $C$ . Appelons  $N$  l'enveloppe affine de  $\{y, z\}$  et considérons les deux ensembles suivants :

$$I^- = \{x \in N : s_\pi^-(x) \notin C\} \text{ et } I^+ = \{x \in N : s_\pi^+(x) \notin C\}.$$

Ce sont des sous-ensembles relativement ouverts de  $N$ . En effet, soit  $x^*$  un élément de  $I^-$ . Pour tout  $a \in E$ , appelons  $\phi(a)$  le vecteur de  $B$  dont l'image par  $\pi$  est  $a$  et considérons l'application  $f_a : N \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_a(x) = x \cdot \phi(a)$ . Par continuité de  $x \mapsto f_a(x)$  et parce que  $s_\pi^-(x^*)$  est fini, l'ensemble

$$U = \bigcap_{a \in s_\pi^-(x^*)} f_a^{-1}(]-\infty, 0[),$$

est un sous-ensemble relativement ouvert de  $N$ . Par définition,  $x^*$  appartient à  $U$ . En outre,  $f_a(x)$  est négatif pour tout  $x \in U$  et pour tout  $a \in s_\pi^-(x^*)$ . Par conséquent,  $s_\pi^-(x^*)$  est un sous-ensemble de  $s_\pi^-(x)$  pour tout  $x \in U$ . Puisque  $C$  est un complexe simplicial abstrait et puisque  $s_\pi^-(x^*)$  n'appartient pas à  $C$ , alors  $U \subset I^-$ . Ceci prouve que  $I^-$

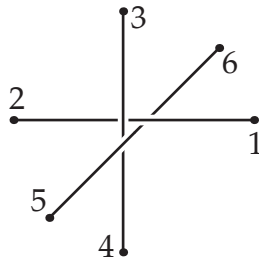


FIGURE 4.2 – Un complexe simplicial sur un ensemble  $E$  de 6 points de dimension 3. Ce complexe ne peut pas être un sous-ensemble d'une triangulation de  $E$  [7].

est relativement ouvert. On prouve que  $I^+$  est relativement ouvert lui aussi par des arguments similaires.

Finalement, on peut voir que la réunion de  $I^-$  et de  $I^+$  est  $N$  tout entier. En effet, si il y avait un vecteur  $x$  dans  $N \setminus (I^- \cup I^+)$ , ce vecteur serait non-nul car  $y$  et  $z$  sont linéairement indépendants. Ainsi,  $s_\pi^-(x)$  et  $s_\pi^+(x)$  seraient deux faces de  $C$  dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non disjoints. Puisque ni  $s_\pi^-(y)$ , ni  $s_\pi^+(z)$  n'est une face de  $C$ ,  $y$  appartient à  $I^-$  et  $z$  à  $I^+$ . Il découle de cela que  $I^-$  et  $I^+$  sont des sous-ensembles de  $N$  relativement ouverts, non-vides, et dont la réunion est  $N$ ; Par conséquent, ils sont non-disjoints. Soit  $x$  un élément de leur intersection. Les ensembles  $s_\pi^-(x)$  et  $s_\pi^+(x)$  sont deux sous-ensembles disjoints de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $C$  et dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non-disjoints.  $\square$

On peut déduire du lemme 5 que  $D(\pi)$  admet un sous-espace linéaire de dimension 1 qui est disjoint de  $I_\pi(C)$ . Ce sous-espace est la droite engendrée par le vecteur  $x$  appartenant à  $D(\pi) \setminus I_\pi(C)$  dont l'existence est obtenue dans la preuve du lemme. En effet, la paire  $\{s_\pi^-(x), s_\pi^+(x)\}$  ne change pas quand on multiplie  $x$  par un scalaire non-nul. Le résultat suivant est donc une conséquence du théorème 7 :

**Théorème 8.** *Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$ . Si  $n \geq d + 3$  alors tout complexe simplicial sur  $E$  est  $(n - d - 2)$ -régulier.*

Un résultat de Carl Lee [36] peut être obtenu comme une conséquence du théorème 8 : toutes les triangulations d'un ensemble de  $d + 3$  points de dimension  $d$  sont régulières. Dans le cas des triangulations, il découle de l'équivalence entre la 1-régularité et la régularité que le théorème 8 se réduit précisément au résultat de Carl Lee quand  $n = d + 3$ . Nous allons montrer, en utilisant un exemple emprunté à [7], que la notion de  $k$ -régularité est une généralisation stricte de la régularité dans le cas plus large des complexes simpliciaux, et ceci même quand  $k = 1$  et  $n = d + 3$ . Soit  $\varepsilon$  un réel positif. Considérons l'ensemble de points  $E$  défini par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice, chaque colonne correspond à un point et chaque ligne à une des coordonnées de ces points dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Les points de  $E$  seront notés par le numéro de leur colonne. Appelons  $C$  le complexe simplicial sur  $E$  dont les faces de

dimension maximale sont les segments  $\{2i - 1, 2i\}$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ce complexe simplicial est représenté dans la figure 4.2. D'après le théorème 8,  $C$  est 1-régulier :  $C$  est induit par une projection de polytope  $(p, \pi)$  telle que  $p \subset \mathbb{R}^4$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $p$  a exactement 6 sommets. Il est montré dans [7] que si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors  $C$  ne peut pas être un sous-ensemble d'une triangulation de  $E$ . Ainsi, pour de telles valeurs de  $\varepsilon$ , les faces de  $p$  dont l'image par  $\pi$  sont les enveloppes convexes de faces de  $C$  ne peuvent pas toutes appartenir au bord inférieur de  $p$ . Cette situation ne se produit jamais avec les triangulations régulières, obtenues en projetant le bord inférieur de  $p$ .

Soit  $C$  un complexe simplicial sur un ensemble fini de points  $E$  de dimension  $d$ . La borne supérieure sur  $m(C)$  donnée par le théorème 8 est obtenue en exhibant deux sous-ensembles disjoints de  $E$  qui ne sont pas des faces de  $C$  et dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non-disjoints. Le théorème 8 peut être généralisé à des suites de sous-ensembles de  $E$  avec des propriétés similaires :

**Théorème 9.** *Soit  $C$  un complexe simplicial sur un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$  et  $\{s_1, \dots, s_k\}$  une partition de  $v(C)$  disjointe de  $C$ . Si pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$ , il existe un sous-ensemble  $t_i$  de  $\cup_{1 \leq j < i} s_j$  tel que  $t_i \not\subset C$  et tel que les enveloppes convexes de  $s_i$  et de  $t_i$  ont des intérieurs relatifs non-disjoints, alors  $m(C) \leq n - d - k$ .*

La preuve de ce théorème, donnée dans [48] consiste à construire une projection de polytopes  $(p, \pi)$  telle que  $p$  est obtenu comme un produit de polytopes bien choisis. En particulier, la preuve de ce théorème utilise les mêmes méthodes que la preuve du théorème 3, qui est elle aussi omise dans ce manuscrit, mais que le lecteur trouvera dans [50]. Bien que l'énoncé du théorème 9 soit relativement technique, ce résultat est très utile en pratique puisqu'il permet d'obtenir le corollaire suivant, mais aussi des bornes sur  $m$  pour les triangulations du cube de dimension  $d$ , et la non-connexité de  $\gamma_3$  pour certains ensembles de points (voir section 4.4).

Remarquons que l'existence de deux sous-ensembles disjoints de  $E$  qui ne sont pas des faces de  $C$  et dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non-disjoints est conditionnée, dans le lemme 5, par la taille de  $E$  : cet ensemble doit contenir au moins  $d + 3$  points. Si le nombre de points de  $E$  augmente encore, il est possible de trouver une suite de sous-ensembles vérifiant les conditions du théorème 9. Le résultat suivant, lui aussi démontré dans [48], est alors obtenu :

**Corollaire 5.** *Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$ . Si  $C$  est un complexe simplicial sur  $E$ , alors :*

$$m(C) \leq n - d - 2 - \left\lfloor \frac{n - d - 3}{\lceil d/2 + 1 \rceil} \right\rfloor. \quad (4.3)$$

Les bornes sur  $m$  données par (4.3) sont reportées dans la table 4.1 pour  $1 \leq d \leq 28$  et  $1 \leq n - d \leq 20$ . Dans cette table, chaque colonne correspond à deux dimensions consécutives. On peut voir que les bornes données dans la première colonne (c'est-à-dire quand  $d \in \{1, 2\}$ ) ne sont pas des maxima. En effet, tous les complexes simpliciaux sur un ensemble de points de dimension 1 sont réguliers. En outre, d'après le corollaire 3, toute triangulation d'un ensemble de points de dimension 2 est 2-régulière. Puisque

$n - d$	$\lceil d/2 \rceil$													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
7	3	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
8	4	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
9	4	5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
10	5	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
11	5	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9
12	6	7	8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10
13	6	8	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11
14	7	9	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12
15	7	9	10	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
16	8	10	11	12	12	13	13	13	13	13	13	13	14	14
17	8	11	12	13	13	13	14	14	14	14	14	14	14	15
18	9	11	13	13	14	14	15	15	15	15	15	15	15	15
19	9	12	13	14	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16
20	10	13	14	15	16	16	16	17	17	17	17	17	17	17

TABLE 4.1 – Les bornes supérieures sur  $m$  données par (4.3) pour des complexes simpliciaux d'ensembles de  $n$  points de dimension  $d$ .

un complexe simplicial sur un ensemble de points  $E$  de dimension 2 est toujours un sous-ensemble d'une triangulation de  $E$ , alors il est, lui aussi, 2-régulier.

La dernière partie de cette section concerne les triangulations du cube de dimension  $d$ . Supposons que  $E$  est l'ensemble des sommets de ce cube. L'ensemble des triangulations de  $E$  a une complexité exponentielle : alors que les triangulations du carré (c'est-à-dire du cube de dimension 2) n'a que deux triangulations, le cube de dimension 3 en a soixante quatorze [9], et il y a plus de quatre-vingt douze millions de manières de trianguler le cube de dimension 4 (voir le chapitre 5). Si  $2 \leq d \leq 3$ , toutes les triangulations de  $E$  sont régulières et, si  $d = 4$ ,  $E$  a des triangulations non-régulières [9].

Nous allons prouver que toutes les triangulations de  $E$  sont  $(2^{d-1} - d + 1)$ -régulières en utilisant les résultats précédemment obtenus dans ce chapitre. Cette borne n'est évidemment pas un maximum (par exemple quand  $d = 3$ ), mais elle est vraie pour tout  $d$  et elle est bien meilleure que celles qui sont données par (4.3) dans le cas général. Rappelons que  $E$  contient  $2^d$  points. Par conséquent, selon le théorème 7, le résultat suivant revient à trouver un sous-espace de dimension  $2^{d-1} - 2$  dans l'espace des dépendances affines de  $E$ .

**Théorème 10.** *Soit  $E$  l'ensemble des sommets du cube de dimension  $d$ . Si  $T$  est une triangulation de  $E$  alors  $m(T) \leq 2^{d-1} - d + 1$*

*Preuve.* Le cube de dimension  $d$  admet  $2^{d-1}$  diagonales qui se rencontrent toutes au centre du cube. En d'autres mots, il existe une partition  $\{s_i : 1 \leq i \leq 2^{d-1}\}$  de  $E$  telle que l'enveloppe convexe de  $s_i$  et de  $s_j$  ont des intérieurs relatifs non-disjoints pour tout  $i \neq j$ . Ainsi, une triangulation  $T$  de  $E$  contient au plus une de ces diagonales. On peut donc supposer que  $s_i \notin T$  pour tout  $2 \leq i \leq 2^{d-1}$ . Comme les éléments de  $E$  sont exactement les sommets de  $T$ , l'ensemble

$$\{s_1 \cup s_2\} \cup \{s_i : 3 \leq i \leq 2^{d-1}\},$$

est une partition de  $v(T)$  en  $2^{d-1} - 1$  sous-ensembles qui n'appartiennent pas à  $T$ . Soit  $i$  un entier tel que  $3 \leq i \leq 2^{d-1}$ . Puisque deux diagonales du cube se rencontrent en leurs milieux, les enveloppes convexes de  $s_i$  et de  $\cup_{1 \leq j < i} s_j$  ont des intérieurs relatifs non-disjoints. Comme  $\cup_{1 \leq j < i} s_j \notin T$ , l'inégalité voulue découle du théorème 9.  $\square$

### 4.3 Résultats de connexité des graphes de flips

Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$ . La quatrième ligne de la table 4.1 indique que si  $n - d = 4$ , alors  $\gamma(E)$  and  $\gamma_2(E)$  sont identiques. Ainsi, par le théorème 2,  $\gamma(E)$  est connexe pour de telles valeurs de  $n$  et de  $d$ . Ce résultat a été obtenu par Miguel Azaola et Francisco Santos en utilisant d'autres méthodes [1]. Ils ont en fait prouvé un énoncé plus fort : si  $n - d = 4$ , alors  $\gamma(E)$  est 3-connexe. La connexité du graphe des flips est un problème ouvert quand  $n - d = 5$ . Des résultats partiels sur ce problème sont donnés dans cette section.

Supposons que  $n - d = 5$ . On peut voir dans la cinquième ligne de la table 4.1 que, dans ce cas, toutes les triangulations de  $E$  sont 3-régulières. Bien que cela n'implique pas la connexité de  $\gamma(E)$  (on montrera dans la prochaine section que  $\gamma_3$  n'est pas toujours connexe), il est tout de même possible de formuler des conditions supplémentaires sous lesquelles certaines triangulations de  $E$  sont 2-régulières. D'après le théorème 2, de telles triangulations peuvent être rendues régulières par une succession de flips.

Le théorème suivant, qui ne sera pas démontré ici mais dont la preuve complète se trouve dans [48] donne de telles conditions. Parmi ces conditions, la plus importante est l'existence d'un certain sous-ensemble  $s$  de  $E$  qui n'appartient pas à une triangulation donnée  $T$  de  $E$ . Cette condition, combinée avec le lemme 5 produit une partition de  $v(T)$  en trois sous-ensembles, à laquelle le théorème 9 peut être appliqué afin d'obtenir la  $(n - d - 3)$ -régularité de la triangulation  $T$  :

**Théorème 11.** *Soient  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$ ,  $T$  une triangulation de  $E$  et  $s$  un sous-ensemble de  $E$  tel que  $s \notin T$  et  $n - |s| \geq d + 3$ . Si les enveloppes convexes de  $s$  et de  $E$  ont des intérieurs relatifs non-disjoints et si tous les sous-ensembles propres de  $s$  sont des faces de  $T$ , alors  $T$  est  $(n - d - 3)$ -régulière.*

Rappelons qu'un ensemble de points  $E$  de dimension  $d$  est en position générale si tous ses sous-ensembles d'au plus  $d + 1$  points sont affinements indépendants. L'énoncé du théorème 11 peut se simplifier de la manière suivante quand  $E$  est en position générale :

**Corollaire 6.** *Soit  $E$  un ensemble de  $n$  points de dimension  $d$  en position générale,  $T$  une triangulation de  $E$  et  $s$  un sous-ensemble de  $E$  qui n'appartient pas à  $T$ . Si  $n - |s| \geq d + 3$  alors  $T$  est  $(n - d - 3)$ -régulière.*

*Preuve.* Supposons que  $n - |s| \geq d + 3$ . Puisque  $T$  contient l'ensemble vide,  $s$  admet un sous-ensemble  $t$  qui n'appartient pas à  $T$  mais dont tous les sous-ensembles sont des faces de  $T$ . Puisque  $E$  est en position générale,  $T$  contient tous les sous-ensembles de  $E$  dont les enveloppes convexes sont disjointes de l'intérieur relatif de  $\text{conv}(E)$ . Par conséquent, les enveloppes convexes de  $t$  et de  $E$  ont des intérieurs relatifs non-disjoints. Puisque  $t$  est un sous-ensemble de  $s$ ,  $n - |t| \geq d + 3$  et le résultat est obtenu en invoquant le théorème 11.  $\square$

Quand l'ensemble  $s$  dans l'énoncé du corollaire 6 est une arête et quand  $n = d + 5$ , ce corollaire affirme la 2-régularité de la triangulation  $T$ . Ainsi, d'après le théorème 2, on obtient le résultat suivant au sujet de la connexité du graphe des flips de  $E$  :

**Corollaire 7.** *Soit  $T$  une triangulation d'un ensemble de  $d + 5$  points de dimension  $d$  en position générale. Si le 1-squelette de  $T$  n'est pas un graphe complet alors il existe un chemin dans  $\gamma(E)$  de  $T$  à n'importe quelle triangulation régulière de  $E$ .*

D'autres résultats comme celui-ci sont donnés dans [48] quand  $n = d + 5$  pour d'autres cas particuliers. Nous nous contenterons dans la fin de cette section de montrer que le graphe des flips de  $E$  est connexe quand  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polytope de dimension 3 avec 8 sommets. Considérons une triangulation  $T$  d'un ensemble de points de dimension 3 et supposons que le 1-squelette de  $T$  est un graphe complet. Par définition si un flip est effectué à l'intérieur de  $T$  alors ce flip enlève au moins une arête de  $T$ . Remarquons que cette propriété est particulière aux ensembles de points de dimension 3 et qu'elle devient fautive en dimension supérieure à 3.

**Proposition 6.** *Soit  $E$  un ensemble fini de points de dimension 3 et  $T$  une triangulation de  $E$ . Si le 1-squelette de  $T$  est un graphe complet, alors le 1-squelette de toute triangulation qui peut être obtenue de  $T$  par un flip n'est pas un graphe complet.*

Supposons qu'en plus,  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polytope simplicial de dimension 3. Il est montré dans [11] qu'il y a alors nécessairement au moins un circuit qui est flippable dans  $T$ . En outre, puisque  $\text{conv}(E)$  est simplicial, l'enveloppe convexe de  $E$  et celle de n'importe quelle arête manquante dans le 1-squelette d'une triangulation de  $E$  doivent avoir des intérieurs relatifs non disjoints. Ainsi, le résultat suivant est une conséquence de la proposition 6 et du théorème 11 :

**Théorème 12.** *Soit  $E$  un ensemble de 8 points de dimension 3. Si  $E$  est l'ensemble des sommets d'un polytope simplicial alors  $\gamma(E)$  est connexe.*

Les résultats obtenus dans cette section, ainsi que ceux qui sont donnés dans [48] mais qui ne sont pas reportés ici fournissent plusieurs sous-graphes connexes dans le graphe des flips de certains ensembles finis de points. Ceci réduit la frontière entre les graphes

des flips connexes et les graphes des flips non connexes. La question suivante est posée dans [49] : *quel est le plus grand entier  $k$  tel que pour tout ensemble fini de points  $E$ , le graphe  $\gamma_k(E)$  est connexe ?* La réponse à cette question est  $k = 2$  comme nous allons le voir dans la prochaine section.

## 4.4 Le graphe $\gamma_3$ n'est pas toujours connexe

Plusieurs ensembles finis de points dont le graphe des flips n'est pas connexe ont été trouvés par Francisco Santos [10, 70, 71]. Dans cette section, il va être prouvé que toutes les triangulations d'un des ensembles de points qu'il décrit dans [10] sont 3-régulières. Appelons  $u_1, \dots, u_6$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^6$  et considérons les quatre vecteurs suivants :

$$b_1 = \sqrt{2}u_5, b_2 = u_5 + u_6, b_3 = \sqrt{2}u_6 \text{ et } b_4 = -u_5 + u_6.$$

Pour chaque entier  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , soient :

$$a_i^+ = u_i + b_i, a_{2i+1}^+ = u_i - b_i, a_i^- = -u_i + b_i, \text{ and } a_{2i+1}^- = -u_i - b_i. \quad (4.4)$$

Il est montré dans [10] que le graphe des flips de l'ensemble de 17 points suivant n'est pas connexe :

$$E = \{0\} \cup \left[ \bigcup_{i=1}^4 \{a_i^-, a_{2i+1}^-, a_i^+, a_{2i+1}^+\} \right],$$

Soit  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . D'après (4.4), les égalités suivantes sont satisfaites :

$$a_i^+ + a_{2i+1}^- = 0 \text{ et } a_i^- + a_{2i+1}^+ = 0.$$

Ces égalités traduisent le fait que  $E$  admet huit sous-ensembles de deux points dont les enveloppes convexes contiennent 0 dans leurs intérieurs relatifs. Remarquons que ces huit sous-ensembles sont deux-à-deux disjoints. Par conséquent, si on enlève de  $E$  un ou plusieurs de ces sous-ensemble, l'enveloppe convexe des points restants contient toujours 0 dans son intérieur relatif. D'autre part, une triangulation de  $E$  admet 0 comme sommet et ne contient aucun de ces sous-ensembles, ou bien contient au plus un de ces sous-ensembles et n'admet pas 0 comme sommet. D'après le théorème 9, toutes les triangulations de  $E$  sont donc 3-régulières. Ceci fournit une nouvelle borne pour le problème de la connexité des graphes de flips : le sous-graphe induit par les triangulations 2-régulières dans le graphe des flips est toujours connexe (d'après le théorème 2), mais pas le sous-graphe induit par les triangulations 3-régulières.

---

---

# Chapitre 5

---

## Le cube de dimension 4

Il est bien connu que l'ensemble des sommets du cube de dimension 3 admet exactement 74 triangulations qui sont toutes régulières, organisées en 6 classes de symétrie [3, 9, 10]. Le cas du cube de dimension 4 est beaucoup plus compliqué. L'ensemble des sommets de ce cube admet des triangulations non-régulières [9], et le nombre total de ses triangulations était, jusqu'à très récemment, inconnu. En effet, la seule méthode suffisamment efficace pour énumérer les triangulations du cube de dimension 4 consiste à explorer la composante connexe contenant les triangulations régulières dans son graphe des flips [10]. Le succès de la méthode est donc conditionné par la connexité de ce graphe. Ce problème a été résolu récemment dans [52]. L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes qui ont été utilisées pour cela. Bien que les preuves soient omises (elle sont très techniques!), les intuitions sous-jacentes à leur fonctionnement seront données. Le lecteur pourra trouver toutes les preuves dans [52].

Le cube de dimension 4 est identifié dans ce chapitre au polytope  $[0, 1]^4$ , et l'ensemble de ses sommets à  $\{0, 1\}^4$ . En d'autres termes, les 16 vecteurs colonne de la matrice suivante, exprimés dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ , sont les sommets de notre cube :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque élément de  $\{0, 1\}^4$  est noté en utilisant le numéro de sa colonne (de 1 à 16) dans cette matrice. Les coordonnées du sommet  $i$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  sont donc les chiffres de l'écriture binaire de  $i - 1$ . Considérons un point  $x \in \{0, 1\}^4$ . On peut voir que  $x$  est adjacent à quatre sommets de  $\{0, 1\}^4$  dans le graphe de  $[0, 1]^4$ . L'ensemble, dont les éléments sont  $x$  et ces quatre sommets, est un simplexe de dimension 4 appelé le *simplexe de coin* de  $\{0, 1\}^4$  au sommet  $x$  et noté  $\kappa(x)$  dans la suite de ce chapitre.

Une triangulation de  $\{0, 1\}^4$  ne peut pas contenir plus de huit simplexes de coin [40]. En effet, parmi neuf simplexes de coin de  $\{0, 1\}^4$ , on peut toujours en trouver deux

dont les enveloppes convexes ont des intérieurs relatifs non-disjoints. Une triangulation de  $\{0,1\}^4$  qui contient huit simplexes de coin est dite *coupe coins* [10]. Nous verrons dans la section 5.1 que ces triangulations sont régulières.

Pour prouver que  $\gamma(\{0,1\}^4)$  est connexe, nous allons transformer par des flips une triangulation  $T$  quelconque de  $\{0,1\}^4$  en une triangulation coupe coins. Pour cela, il faut effectuer une suite de flips qui introduit un nouveau simplexe de coin dans  $T$ . Considérons l'hyperplan affine  $H$  de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $\kappa(x) \setminus \{x\}$  et la triangulation  $U$  induite dans  $H$  par  $T$ , c'est à dire obtenue dans l'hyperplan  $H$  en coupant  $T$  par  $H$ . Nous allons montrer que  $x$  peut toujours être choisi de telle façon que  $U$  appartient à un ensemble bien défini de 1588 triangulations. D'autre part, des conditions seront formulées, sous lesquelles un flip dans la triangulation  $U$  induit un flip dans la triangulation  $T$  qui réduit l'étoile de  $\{x\}$  dans  $T$  quand il est effectué. Une succession suffisamment longue de tels flips introduit nécessairement le simplexe de coin au sommet  $x$ . Ainsi le problème se réduit à vérifier que les 1588 triangulations déjà mentionnées ont une certaine propriété concernant les flips. Cette vérification peut être faite en quelques minutes sur un ordinateur, sans utiliser d'opérations arithmétiques.

On trouve, par conséquent, que l'ensemble des sommets du cube de dimension 4 admet 92487256 triangulations, organisées en 247451 classes de symétrie. Ce résultat à été obtenu en utilisant le logiciel TOPCOM [65] programmé par Jörg Rambau. Mentionnons que bien avant la publication de [52], le nombre de triangulations régulières du cube de dimension 4 était connu [28], et que le nombre total de ses triangulations pouvait déjà être conjecturé à l'aide de TOPCOM.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Les triangulations coupe coins de  $\{0,1\}^4$  sont étudiées dans la section 5.1. On y verra en particulier que toutes ces triangulations sont régulières. Dans la section 5.2, on explique comment les flips dans une triangulation  $T$  de  $\{0,1\}^4$  sont liés aux flips dans une triangulation obtenue en intersectant  $T$  par un hyperplan qui coupe un coin du cube de dimension 4. On montrera comment cela peut être utilisé pour transformer toute triangulation de  $\{0,1\}^4$  en une triangulation coupe coins dans la section 5.3. La connexité du graphe des flips de  $\{0,1\}^4$  découle alors de la régularité de ses triangulations coupe coins et du théorème 1 par lequel deux triangulations régulières de  $\{0,1\}^4$  peuvent toujours être transformées l'une en l'autre par une succession de flips.

## 5.1 Les triangulations coupe coins

Appelons  $E$  l'ensemble des sommets de  $\{0,1\}^4$  dont la somme des coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  est paire. On notera  $O$  l'ensemble  $\{0,1\}^4 \setminus E$ . Les ensembles  $E$  et  $O$  peuvent être déterminés à l'aide de la matrice donnée plus haut. On obtient :

$$E = \{1,4,6,7,10,11,13,16\} \text{ et } O = \{2,3,5,8,9,12,14,15\}.$$

On peut remarquer que le carré de la distance de deux éléments de  $\{0,1\}^4$  est pair si et seulement si ils appartiennent tous les deux à  $E$  ou tous les deux à  $O$ . En d'autres mots,

$\{E, O\}$  est la seule partition de  $\{0, 1\}^4$  en deux sous-ensembles dont les sommets ont des distances carrées paires. Remarquons également que  $E$  et  $O$  peuvent être obtenus l'un de l'autre par une isométrie et que leurs enveloppes convexes sont des polytopes croisés de dimension 4 [10]. En fait, si  $s \in \{E, O\}$ , on obtient l'intérieur du polytope croisé  $\text{conv}(s)$  en enlevant de  $[0, 1]^4$  les enveloppes convexes de tous les simplexes de coin aux sommets appartenant à  $\{0, 1\}^4 \setminus s$ . Puisque les polytopes croisés sont simpliciaux, on peut donc construire une triangulation de  $\{0, 1\}^4$  comme la réunion d'une triangulation de  $s$  et de l'ensemble des parties de ces simplexes de coins. Par définition, une telle triangulation de  $\{0, 1\}^4$  est coupe coins puisque  $\{0, 1\}^4 \setminus s$  a 8 éléments. En fait, toutes les triangulations coupe coins peuvent être construites ainsi [10]. En particulier,  $\{0, 1\}^4$  admet exactement huit triangulations coupe coins ; quatre d'entre elles admettent une triangulation de  $E$  comme sous-ensemble et les quatre autres admettent une triangulation de  $O$  comme sous-ensemble. En outre, chaque diagonale du cube  $[0, 1]^4$  est contenue dans exactement une des triangulations coupe coins de  $\{0, 1\}^4$  [10]. Ces huit triangulations de  $\{0, 1\}^4$  sont régulières :

**Lemme 6.** *Toutes les triangulations coupe coins de  $\{0, 1\}^4$  sont régulières.*

La preuve de ce lemme consiste à exhiber des fonctions de hauteur  $w : \{0, 1\}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  qui réalisent chaque triangulation coupe coins de  $\{0, 1\}^4$ . En fait, une seule fonction de hauteur est nécessaire car les huit triangulations coupe coins de  $\{0, 1\}^4$  sont identiques à une transformation isométrique près. La preuve complète de ce lemme peut être trouvée dans [52].

Rappelons que le sous-graphe induit par les triangulation régulières dans  $\{0, 1\}^4$  est connexe. Ceci découle du théorème 1. Ainsi, une des conséquences du lemme 6 est que, si on peut transformer toute triangulation de  $\{0, 1\}^4$  en une triangulation coupe coins par des flips, alors le graphe des flips de  $\{0, 1\}^4$  est connexe. Dans les prochaines sections, nous allons voir comment introduire des simplexes de coin par des flips dans une triangulation de  $\{0, 1\}^4$ .

## 5.2 Des flips dans les coins du cube de dimension 4

Soit  $x$  un élément de  $\{0, 1\}^4$ . On remarque que  $\kappa(x) \setminus \{x\}$  est un tétraèdre régulier. L'enveloppe affine de ce tétraèdre est un hyperplan affine  $H$  de  $\mathbb{R}^4$  qui admet  $p - 2x$  comme vecteur normal. Cet hyperplan sépare le point  $x$  des sommets de  $\{0, 1\}^4$  qui n'appartiennent pas à  $\kappa(x)$ . Par conséquent, tous les sommets  $y$  de  $\{0, 1\}^4$  autres que  $x$  admettent une projection centrale  $y/x$  sur  $H$  par rapport au point  $x$  :

$$y/x = x + \frac{1}{(y-x) \cdot (p-2x)}(y-x).$$

Pour tout sous-ensemble  $s$  de  $\{0, 1\}^4$ , l'ensemble suivant est appelé la *contraction homogène* de  $s$  au point  $x$  :

$$s/x = \{y/x : y \in s \setminus \{x\}\}.$$

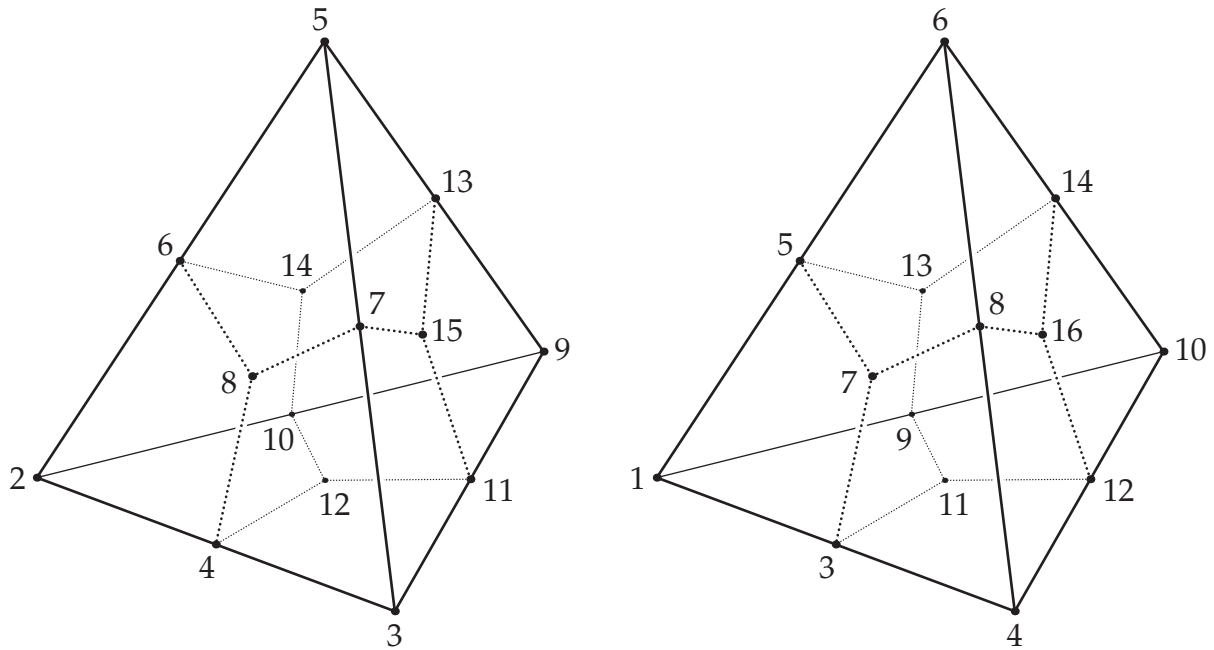


FIGURE 5.1 – Les ensembles  $\{0,1\}^4/1$  (à gauche) et  $\{0,1\}^4/2$  (à droite) dans lesquels le point au centre de chaque tétraèdre a été omis. Chaque point dans cette figure est désigné par le sommet de  $\{0,1\}^4$  duquel il est projeté par la contraction homogène. Les segments tracés dans cette figure permettent de déterminer le point qui est au centre de chaque face.

Cette terminologie, introduite dans [10], est due à la similarité de cette notion avec l'opération de contraction dans les matroïdes orientées. La notation donnée dans [10] est faite de deux barres de division au lieu d'une seule afin de faire la distinction entre ces deux types de contractions. Cette précaution n'est pas nécessaire ici puisque seules des contractions homogènes seront utilisées. Remarquons qu'il n'est pas généralement requis que les contractions homogènes appartiennent à un espace affine donné [10]. Ici  $s/x$  est placé dans l'enveloppe affine de  $\kappa(x) \setminus \{x\}$  pour fixer les idées. Remarquons que trois éléments de  $\{0,1\}^4$  ne sont jamais colinéaires. Par conséquent, la contraction homogène au point  $x$  induit une bijection  $\{0,1\}^4 \setminus \{x\} \rightarrow \{0,1\}^4/x$ .

Si  $x$  et  $y$  sont deux sommets de  $\{0,1\}^4$ , les ensembles  $\{0,1\}^4/x$  et  $\{0,1\}^4/y$  sont isométriques. On peut voir cela dans la figure 5.1 où les contractions homogènes de  $\{0,1\}^4$  aux points 1 et 2 sont représentées. Les sommets 16/1 et 15/2 qu'on devrait voir au centre des tétraèdres ont été omis pour ne pas surcharger la figure.

Il est possible de généraliser la contraction homogène au point  $x \in \{0,1\}^4$  de la manière suivante à tout ensemble  $S$  dont les éléments sont des sous-ensembles de  $\{0,1\}^4$  :

$$S/x = \{s/x : s \in S\}.$$

D'après cette construction, si  $x$  est un sommet de  $\{0,1\}^4$  et  $T$  une triangulation de  $\{0,1\}^4$ , la contraction homogène de  $\text{coque}_T(\{x\})$  au point  $x$  est une triangulation de  $\{0,1\}^4/x$ . Cette triangulation peut également être obtenue en coupant  $T$  par l'hyperplan  $H$  ou (ce qui revient au même) en coupant étoile $_T(\{x\})$  par cet hyperplan.

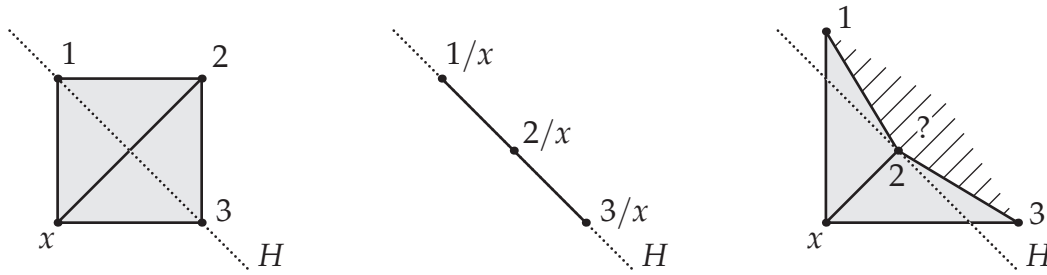


FIGURE 5.2 – Une triangulation  $T$  d'un carré (à gauche), la triangulation  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  dans l'hyperplan  $H$  (au centre) et une triangulation  $T'$  telle que  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  et  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  sont identiques (à droite).

Dans la suite de cette section, nous allons expliquer le lien entre les flips qui modifient l'étoile de  $\{x\}$  dans  $T$  et certains des flips qui peuvent être effectués dans la triangulation  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ . Pour cela, il nous faut examiner les circuits de  $\{0,1\}^4$  qui contiennent  $x$  : notons  $Z(x)$  l'ensemble de ces circuits.

Les deux éléments de la partition de Radon d'un circuit  $z \in Z(x)$  seront appelés  $\varepsilon_x^-(z)$  et  $\varepsilon_x^+(z)$  avec la convention que le point  $x$  appartient à  $\varepsilon_x^-(z)$ . D'après le lemme suivant, la contraction homogène de  $z$  au point  $x$  est encore un circuit :

**Lemme 7.** *Soit  $x$  un sommet de  $\{0,1\}^4$ . Pour tout  $z \in Z(x)$ ,  $z/x$  est un circuit dont la partition de Radon est  $\{\varepsilon_x^-(z), \varepsilon_x^+(z)\}/x$ .*

La preuve de ce lemme, donnée dans [52] s'appuie sur le fait que  $x$  appartient à tout circuit  $z \in Z(x)$ . Dans ce cas, la contraction homogène au point  $x$  enlève un élément de  $z$  (le sommet  $x$ ) et diminue sa dimension de 1. La preuve du lemme 7 est omise ici, mais nous allons illustrer son énoncé en utilisant un exemple en dimension 2. Considérons la triangulation  $T$  du carré  $\{x, 1, 2, 3\}$  montrée dans la partie gauche de la figure 5.2. On remarque que ce carré est également un circuit dont la partition de Radon est  $\{\{x, 2\}, \{1, 3\}\}$ . Appelons ce circuit  $z$ . Dans ce cas, l'hyperplan  $H$  est l'enveloppe affine des points 1 et 3. La contraction homogène de  $z$  au point  $x$  est la projection centrale par rapport à  $x$  de  $z \setminus \{x\}$  sur l'hyperplan  $H$ , c'est-à-dire  $z/x = \{1/x, 2/x, 3/x\}$ . En particulier,  $z/x$  est bien un circuit, comme on peut le voir au centre de la figure 5.2 dont la partition de Radon est  $\{\{2/x\}, \{1/x, 3/x\}\}$ . En d'autres termes, la partition de Radon de  $z/x$  est bien la contraction homogène au point  $x$  de la partition de Radon de  $z$ .

Remarquons que, d'après la figure 5.2, le circuit  $z$  est flippable dans  $T$  et le circuit  $z/x$  est flippable dans  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ . En général, si un circuit  $z \in Z(x)$  est flippable dans une triangulation  $T$  de  $\{0,1\}^4$ , alors le circuit  $z/x$  sera flippable dans la triangulation  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ , ce qui est un résultat élémentaire. La proposition inverse n'est pas vraie en général, mais elle devient vraie sous certaines conditions :

**Théorème 13.** *Soit  $x$  un sommet de  $\{0,1\}^4$ ,  $T$  une triangulation de  $\{0,1\}^4$  et  $z \in Z(x)$  un circuit. Si  $z/x$  est flippable dans  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  et si  $\varepsilon_x^-(z)/x$  appartient à  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ , alors  $z$  est flippable dans  $T$  et  $\varepsilon_x^-(z)$  appartient à  $T$ .*

La preuve de ce théorème, donnée dans [52] ne sera pas rapportée ici mais nous allons illustrer son fonctionnement en utilisant de nouveau la figure 5.2. Rappelons que  $\varepsilon_x^-(z)$

est l'élément de la partition de Radon de  $z$  qui contient  $x$ . Dans le cas de la triangulation  $T$  représentée à gauche de la figure 5.2,  $\varepsilon_x^-(z) = \{x, 2\}$  et  $\varepsilon_x^-(z)/x = \{2/x\}$ . En particulier  $\varepsilon_x^-(z)/x$  appartient à  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ , et le circuit  $z/x$  satisfait donc les hypothèses du théorème 13. On peut déduire de ces hypothèses que  $z$  est flippable dans  $T$  parce que dans ce cas, les faces de dimension maximale de la triangulation de  $z/x$  contenant  $\varepsilon_x^-(z)/x$  sont exactement les contractions homogènes des faces maximales de la triangulation  $\tau^-$  de  $z$  contenant  $\varepsilon_x^-(z)$ . Ainsi, si  $z/x$  est flippable dans  $\text{coque}_T(\{x\})/x$ ,  $\tau^-$  est nécessairement un sous-ensemble de  $T$ . La preuve du théorème est bien sûr rendue plus compliquée par la condition sur les coques dans la définition des flips.

Considérons maintenant la triangulation  $T'$  représentée dans la partie droite de la figure 5.2. Dans ce cas,  $z = \{x, 1, 2, 3\}$  est toujours un circuit dont la contraction homogène au point  $x$  est  $\{1/x, 2/x, 3/x\}$ . Ainsi,  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  et  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  sont identiques, et le circuit  $z/x$  est toujours flippable dans  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$ . Cependant, le circuit  $z$  n'est pas nécessairement flippable dans  $T'$  car la triangulation  $T'$  n'admet peut-être pas de triangulation de  $z$  comme sous-ensemble ! En effet, le triangle  $\{1, 2, 3\}$  n'appartient pas forcément à  $T'$ , comme le montrent la partie hachurée et le point d'interrogation. Plus précisément, dans ce cas,  $\varepsilon_x^-(z) = \{x, 1, 3\}$  et  $\varepsilon_x^-(z)/x$  est l'arête  $\{1/x, 3/x\}$  qui n'appartient pas à  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$ . Pour cette raison, le triangle  $\{1, 2, 3\}$  ne laisse pas de trace dans l'hyperplan  $H$ . Ainsi, même si  $z/x$  est flippable dans  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$ , on ne peut pas savoir si une triangulation de  $z$  est un sous-ensemble de  $T'$ . Autrement dit,  $z$  n'est peut être pas flippable dans  $T'$ .

Remarquons maintenant que, si on flippe  $z$  dans la triangulation  $T$  montrée dans la partie gauche de la figure 5.2, le domaine de étoile $_T(\{x\})$  devient plus petit. Cette propriété est très générale comme l'affirme le prochain théorème. Appelons  $x$  un sommet de  $\{0, 1\}^4$  et  $T$  une triangulation de  $\{0, 1\}^4$ . Notons :

$$D_x(T) = \text{dom}(\text{étoile}_T(\{x\})).$$

Soit  $z \in Z(x)$  un circuit flippable dans  $T$  et tel que  $\varepsilon_x^-(z)$  appartient à  $T$  (ces conditions correspondent aux conclusions du théorème 13). Le théorème suivant affirme que le domaine de étoile $_T(\{x\})$  devient plus petit quand  $z$  est flippé dans  $T$  :

**Théorème 14.** *Soient  $x$  un sommet de  $\{0, 1\}^4$ ,  $T$  une triangulation de  $\{0, 1\}^4$ , et  $z$  un circuit appartenant à  $Z(x)$ . Si  $z$  est flippable dans  $T$  et si  $\varepsilon_x^-(z)$  appartient à  $T$ , alors  $D_x(\mathfrak{F}(T, z))$  est un sous-ensemble propre de  $D_x(T)$ .*

Soit  $x$  un sommet de  $\{0, 1\}^4$  et  $S$  un sous-ensemble de  $\{0, 1\}^4/x$  tel que  $\kappa(x) \setminus \{x\} \subset S$ . Appelons  $L_x(S)$  l'ensemble de toutes les triangulations  $U$  de  $S$  telles que pour tout circuit  $z \in Z(x)$ , soit  $z/x$  n'est pas flippable dans  $U$ , soit  $\varepsilon_x^-(z)/x$  n'appartient pas à  $U$ . En d'autres mots,  $L_x(S)$  contient toutes les triangulations de  $S$  pour lesquelles aucun circuit ne satisfait les conditions du théorème 13. Le corollaire suivant des théorèmes 13 et 14 énonce qu'on peut toujours faire une succession de flips dans une triangulation  $T$  de  $\{0, 1\}^4$  qui n'enlève que des faces qui contiennent  $x$  et qui se termine par une triangulation  $T'$  telle que  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  appartient à  $L_x(V_x(T))$  où  $V_x(T)$  est l'ensemble des sommets de la triangulation  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  :

**Corollaire 8.** *Soit  $T$  une triangulation de  $\{0,1\}^4$ . Pour tout  $x \in \{0,1\}^4$ , il existe un chemin dans  $\gamma(\{0,1\}^4)$  de  $T$  jusqu'à une triangulation  $T'$  telle que  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  appartient à  $L_x(V_x(T))$  et pour tout  $t \in T$ , si  $x \notin t$  alors  $t \in T'$ .*

La preuve de ce corollaire, donnée dans [52] consiste à invoquer le théorème 13 tant qu'il peut l'être. Quand les conditions de ce théorème ne sont plus satisfaites, alors on a obtenu la triangulation  $T'$ . Remarquons d'autre part, que, d'après le théorème 14, chaque flip effectué avant d'arriver à  $T'$  rend plus petit le domaine de l'étoile de  $\{x\}$ , ce qui empêche la procédure de boucler. Remarquons également que tous ces flips n'enlèvent que des faces qui admettent  $x$  comme sommet.

Soit  $s$  un élément de  $\{E, O\}$ ,  $x$  un sommet de  $s$  et  $T$  une triangulation de  $\{0,1\}^4$ . Remarquons que  $\kappa(x)$  est une face de  $T$  si et seulement si  $\text{coque}_T(\{x\})/x$  est la triangulation  $U_0$  de  $\kappa(x) \setminus \{x\}$  dont l'unique face de dimension 3 est le tétraèdre  $\kappa(x) \setminus \{x\}$ . Ainsi, d'après le corollaire 8, si  $\kappa(x) \notin T$  et si  $L_x(V_x(T))$  ne contient que la triangulation  $U_0$ , alors il est possible d'introduire le simplexe de coin au sommet  $x$  par une succession de flips. Le succès de cette méthode dépend du contenu de  $L_x(V_x(T))$ . Une méthode simple pour énumérer  $L_x(S)$  est donnée au début de la prochaine section.

### 5.3 Le graphe des flips de $\{0,1\}^4$ est connexe

Les résultats des sections précédentes vont maintenant être utilisés pour établir la connexité de  $\gamma(\{0,1\}^4)$ . Comme il a été discuté à la fin de la section précédente, le corollaire 8 fournit des conditions sous lesquelles une suite de flips peut être utilisée pour augmenter le nombre de simplexes de coin dans une triangulation de  $\{0,1\}^4$ . Nous allons montrer que ces conditions sont toujours vérifiées si le point  $x$  est choisi avec suffisamment de soin.

Rappelons que la méthode discutée à la fin de la section 5.2 dépend du contenu de  $L_x(S)$ . Une méthode pour énumérer  $L_x(S)$  est d'abord présentée ci-dessous. Ensuite, il sera montré que, selon le choix de  $x$ , l'ensemble  $V_x(T)$  peut être suffisamment petit pour permettre une énumération rapide de  $L_x(V_x(T))$ .

Soit  $x$  un sommet de  $\{0,1\}^4$  et  $S$  un sous-ensemble de  $\{0,1\}^4/x$  tel que  $\kappa(x) \setminus \{x\} \subset S$ . Si  $S$  est suffisamment petit, une liste complète de ses triangulations peut être obtenue avec TOPCOM [65], ainsi qu'une liste des circuits de  $S$ . Il est ensuite possible d'énumérer  $L_x(S)$  à l'aide de l'algorithme 2. Cet algorithme est décrit de manière plus précise dans [52], où il est expliqué comment tester qu'un circuit est flippable dans une triangulation. Remarquons qu'il est possible d'implémenter cet algorithme de façon qu'aucune opération arithmétique ne soit utilisée.

L'algorithme 2 est linéaire en le nombre de triangulations de  $S$ . La difficulté réside donc dans l'énumération complète des triangulations de  $V_x(T)$  pour un certain sommet  $x$ . Si  $V_x(T) = \{0,1\}^4/x$ , cette énumération est presque aussi difficile que celle de toutes les triangulations de  $\{0,1\}^4$ . Heureusement, nous avons encore la liberté de choisir le sommet  $x$ . Un examen minutieux des triangulations de  $\{0,1\}^4$  montre qu'on peut

**Algorithme 2** Énumération de  $L_x(S)$ .

---

```

 $L_x(S) \leftarrow \emptyset$ 
for toute triangulation  $T$  de  $S$  do
   $f \leftarrow 0$ 
  for tout circuit  $z \in Z(x)/x$  do
    if  $z$  est flippable dans  $T$  et  $\varepsilon_x^-(z)$  est une face de  $T$  then
       $f \leftarrow 1$ 
    end if
  end for
  if  $f == 0$  then
     $L_x(S) \leftarrow L_x(S) \cup \{T\}$ 
  end if
end for

```

---

choisir ce sommet de façon que  $V_x(T)$  soit suffisamment petit pour permettre une énumération rapide de  $L_x(V_x(T))$ . Cet examen est fait en détails dans [52]. Nous nous contenterons ici de l'esquisser. Rappelons tout d'abord qu'une triangulation de  $\{0,1\}^4$  contient au plus une diagonale de  $\{0,1\}^4$  parce que toutes les diagonales d'un cube se croisent en leur centre. D'autre part, une diagonale de  $\{0,1\}^4$  ne peut pas avoir une de ses extrémités dans  $E$  et l'autre dans  $O$ . Ainsi, pour toute triangulation  $T$  de  $\{0,1\}^4$ , il est possible de choisir  $s$  dans  $\{E,O\}$  tel qu'aucun élément de  $s$  n'est incident, dans le 1-squelette de  $T$  à une diagonale de  $\{0,1\}^4$ . Ceci se traduit par le fait que pour tout  $x \in s$ ,  $V_x(T)$  ne contient pas le sommet au centre du tétraèdre  $\kappa(x) \setminus \{x\}$ . Ainsi, nous avons restreint le choix de  $x$  de manière à assurer que  $V_x(T)$  ne contienne pas un certain sommet. En fait, on peut utiliser des arguments similaires (en utilisant le fait que les faces de  $[0,1]^4$  sont aussi des cubes) pour choisir  $x$  à l'intérieur de  $S$  de manière à ce que  $V_x(T)$  soit encore plus petit :

**Lemme 8.** *Soit  $T$  une triangulation de  $\{0,1\}^4$  et  $s$  un élément de  $\{E,O\}$ . Si  $T$  n'est pas coupe coins et si le 1-squelette de  $T$  ne contient pas de diagonale de  $\{0,1\}^4$  incidente à un sommet de  $s$ , alors il existe un sommet  $x$  de  $s$  tel que  $\kappa(x)$  n'appartient pas à  $T$  et  $V_x(T)$  est isométrique à un sous-ensemble d'un des trois ensembles suivants :*

$$\begin{cases} S_1 = [\{0,1\}^4 \setminus \{8,14,15,16\}]/1, \\ S_2 = [\{0,1\}^4 \setminus \{4,10,11,16\}]/1, \\ S_3 = [\{0,1\}^4 \setminus \{6,7,10,11,16\}]/1. \end{cases}$$

La preuve de ce lemme est donnée en détails dans [52]. Remarquons que  $S_1$  est obtenu de  $\{0,1\}^4/1$  en enlevant le centre du tétraèdre  $\kappa(1) \setminus \{1\}$  (c'est-à-dire le sommet 16/1) et les centres de trois faces triangulaires de ce tétraèdre (c'est-à-dire les sommets 8/1, 14/1 et 15/1). Ceci peut être vérifié dans la partie gauche de la figure 5.1. Les deux autres ensembles  $S_2$  et  $S_3$  sont obtenus en enlevant 16/1 de  $\{0,1\}^4/1$  ainsi que les centres de respectivement trois et quatre arêtes du tétraèdre  $\kappa(1) \setminus \{1\}$ . Les trois arêtes de  $\kappa(1) \setminus \{1\}$  dont les centres ne sont pas dans  $S_2$  sont les cotés du triangle  $\{2,3,9\}/1$  (en bas dans la partie gauche de la figure 5.1). Les deux arêtes de  $\kappa(1) \setminus \{1\}$  dont le centre est dans  $S_3$  sont opposées : il s'agit de  $\{2,3\}/1$  et de  $\{5,9\}/1$ .

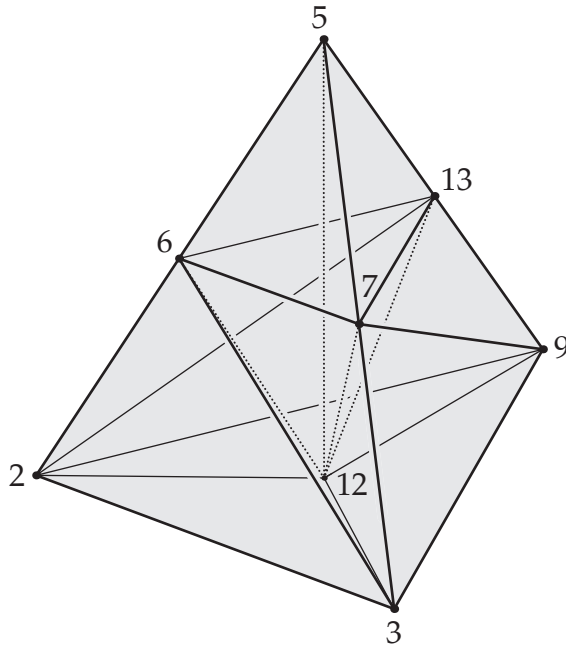


FIGURE 5.3 – La triangulation  $U_1^-$ . Chaque point est désigné par le sommet de  $\{0,1\}^4$  dont il est la contraction homogène au point 1.

Le nombre de triangulations de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  est petit. On trouve, en utilisant TOPCOM que  $S_1$  a 4494 triangulations réparties dans 842 classes de symétrie, que  $S_2$  a 3214 triangulations réparties dans 628 classes de symétrie et que  $S_3$  a 596 triangulations réparties dans 118 classes de symétrie. Ainsi, à symétrie près, on obtient en tout 1588 triangulations. L'algorithme 2 peut donc être utilisé pour énumérer  $L_1(S_1)$ ,  $L_1(S_2)$  et  $L_1(S_3)$ . Remarquons que, par définition, ces trois ensembles contiennent la triangulation  $U_0$  de  $\{0,1\}^4/1$  dont l'unique face de dimension 3 est  $\kappa(1) \setminus \{1\}$  : en effet,  $Z(1)$  ne contient aucun circuit  $z$  tel que  $\varepsilon_x^-(z)$  appartient à cette triangulation. Il se trouve que  $U_0$  est l'unique élément de  $L_1(S_3)$ . Les cas de  $L_1(S_1)$  et de  $L_1(S_2)$  sont un peu plus compliqués puisque ces deux ensembles contiennent, en plus de  $U_0$ , deux autres triangulations que nous allons maintenant décrire. Considérons la triangulation  $U_1^-$  de  $\{0,1\}^4/1$  dont les tétraèdres sont les suivants :

$$\begin{aligned} &\{2,3,6,12\}/1, & \{2,6,12,13\}/1, & \{2,9,12,13\}/1, \\ &\{3,6,7,12\}/1, & \{3,7,9,12\}/1, & \{5,6,7,12\}/1, \\ &\{5,6,12,13\}/1, & \{5,7,12,13\}/1, & \{7,9,12,13\}/1. \end{aligned}$$

Cette triangulation est dessinée dans la figure 5.3. On peut voir en particulier que les circuits  $\{2,3,6,7\}/1$ ,  $\{2,6,9,13\}/1$  et  $\{3,7,9,13\}/1$  sont flippables dans  $U_1^-$  de façon indépendante. Appelons  $U_1^+$  la triangulation obtenue de  $U_1^-$  en flippant ces trois circuits. Les triangulations  $U_1^-$  et  $U_1^+$  sont symétriques par rapport au plan contenant le triangle  $\{2,5,12\}/1$  et par conséquent, elles sont isométriques.

Le résultat suivant est obtenu en quelques minutes avec TOPCOM et avec une implémentation de l'algorithme 2 :

**Proposition 7.** *Les ensembles  $L_1(S_1)$  et  $L_1(S_2)$  sont tous les deux égaux à  $\{U_0, U_1^-, U_1^+\}$ , et l'ensemble  $L_1(S_3)$  est le singleton contenant  $U_0$ .*

Trois implémentations de l'algorithme 2, dont une en bash et une en C, ainsi que toutes les données nécessaires à la vérification de la proposition 7 peuvent être téléchargées

à l'adresse : <http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~lionel/Proposition3.zip>. Remarquons que cette archive se nomme *Proposition3.zip* afin de correspondre à la numérotation des résultats dans [52].

Soient  $s$  un élément de  $\{E, O\}$ ,  $T$  une triangulation de  $\{0, 1\}^4$  et  $x$  un sommet de  $s$  tel que  $\kappa(x)$  n'appartient pas à  $T$ . Supposons que  $V_x(T)$  est isométrique à un sous-ensemble de  $S_1$ , de  $S_2$  ou de  $S_3$ . D'après le corollaire 8 et la proposition 7,  $T$  peut être transformée par une suite de flips en une triangulation  $T'$  qui contient toutes les faces  $f$  de  $T$  telles que  $x \notin f$ . En outre,  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  est isométrique à  $U_0$  ou à  $U_1^-$ . Dans le premier cas, le simplexe de coin  $\kappa(x)$  a donc été introduit par cette suite de flips. Remarquons que, parmi les huit simplexes de coin aux sommets dans  $s$ , le seul qui contient  $x$  est  $\kappa(x)$ . Ainsi,  $T'$  contient alors  $\kappa(x)$  et tous les simplexes de coin de  $\{0, 1\}^4$  aux sommets dans  $s$  qui étaient déjà des faces de  $T$ . La triangulation  $T'$  est donc plus proche d'une triangulation coupe coins que  $T$ , si on mesure cette proximité en nombre de simplexes de coin aux sommets dans  $s$ .

La propriété énoncée à la fin du paragraphe précédent devient fautive si  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  n'est pas isométrique à  $U_0$  mais à  $U_1^-$ . Un examen soigneux des triangulations  $T'$  de  $\{0, 1\}^4$  telles que  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  est isométrique à  $U_1^-$  permet de montrer qu'on peut tout de même introduire  $\kappa(x)$  par une suite de flips qui n'enlèvent que des faces de  $T'$  contenant au moins un sommet de  $\{0, 1\}^4 \setminus s$ . En effet, lorsque  $\text{coque}_{T'}(\{x\})/x$  est isométrique à  $U_1^-$ , l'étoile de  $\{x\}$  dans  $T'$  couvre un domaine assez grand pour qu'il soit possible d'identifier certains sommets  $y \in s$  pour lesquels un circuit  $z \in Z(y)$  est flipable dans  $T'$  de façon que  $\varepsilon_y^-(z) \in T'$ . Ceci permet de trouver une succession de flips bien précise qui transforme  $T'$  en une triangulation  $T''$  et qui n'enlève que des faces contenant  $y$ . Le dernier de ces flips va également enlever un sommet de la coque de  $\{x\}$ . Ainsi, dans ce cas,  $V_x(T'')$  est strictement plus petit que  $V_x(T')$  et  $L_x(V_x(T''))$  ne contient plus de triangulation isométrique à  $U_1^-$ . Il est alors possible d'introduire  $\kappa(x)$  dans  $T''$  en effectuant des flips qui n'enlèvent que des faces contenant  $x$ . On obtient donc le théorème suivant, dont la preuve complète est donnée dans [52] :

**Théorème 15.** *Soit  $T$  une triangulation de  $\{0, 1\}^4$ ,  $s$  un élément de  $\{E, O\}$  et  $x$  un sommet de  $s$ . Si  $V_x(T)$  est isométrique à un sous-ensemble de  $S_1$ , de  $S_2$  ou de  $S_3$ , alors il existe un chemin dans  $\gamma(\{0, 1\}^4)$  qui relie  $T$  à une triangulation  $T'$  contenant le simplexe de coin de  $\{0, 1\}^4$  au sommet  $x$  et toutes les faces de  $T$  disjointes de  $s$ .*

En combinant le lemme 8 et le théorème 15, on obtient qu'une triangulation  $T$  de  $\{0, 1\}^4$  peut toujours être transformée en une triangulation coupe coins par une suite de flips. Il faut tout de même être prudent ici : d'après le lemme 8,  $s$  doit être choisi dans  $\{E, O\}$  de façon que le 1-squelette de la triangulation  $T$  ne contient pas de diagonale de  $\{0, 1\}^4$  incidente à un sommet de  $s$ . Comme il a été discuté plus haut, ce choix est toujours possible. Si  $T$  contient une diagonale de  $\{0, 1\}^4$  (dont les deux sommets sont alors dans  $\{0, 1\}^4 \setminus s$ ), cette diagonale ne sera jamais enlevée par un flip parce qu'elle est disjointe de  $s$ . Puisqu'une triangulation de  $\{0, 1\}^4$  ne contient jamais plus qu'une diagonale de  $\{0, 1\}^4$ , toutes les triangulations rencontrées vérifieront nécessairement les hypothèses du lemme 8, et le résultat est alors obtenu directement. Si, au contraire  $T$  ne contient aucune diagonale de  $\{0, 1\}^4$  ( $s$  peut alors être indifféremment pris égal à  $E$  ou à  $O$ ), il

est possible que l'un des flips introduise une diagonale de  $\{0,1\}^4$  dont les deux sommets sont dans  $s$  ! Dans ce cas, il suffit de remplacer  $s$  par  $\{0,1\}^4 \setminus s$  et de continuer la procédure. On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 16.** *Le graphe des flips de  $\{0,1\}^4$  est connexe.*

Il a été mentionné au début de ce chapitre que le seul algorithme suffisamment efficace pour énumérer toutes les triangulations de  $\{0,1\}^4$  consiste à explorer la composante connexe de  $\gamma(\{0,1\}^4)$  qui contient les triangulations régulières. La convergence de cet algorithme est donc conditionnée par la connexité du graphe des flips de  $\{0,1\}^4$ . Le théorème 16 résout ce problème et, en utilisant TOPCOM, toutes les triangulations de  $\{0,1\}^4$  peuvent être obtenues en quelques minutes. Ainsi :

**Corollaire 9.** *L'ensemble des sommets du cube de dimension 4 a 92487256 triangulations, réparties à l'intérieur de 247451 classes de symétrie.*

## 5.4 Discussion

La preuve que  $\gamma(\{0,1\}^4)$  est connexe, donnée dans [52], a été esquissée ici, en mettant l'accent sur les détails les plus importants. Cette preuve demande l'aide de l'ordinateur, en particulier pour obtenir la proposition 7 : il s'agit de vérifier que 1588 triangulations de  $\{0,1\}^4/1$  vérifient une certaine propriété. Ce nombre est suffisamment petit pour qu'il soit possible de faire cette vérification « à la main », mais cette tâche serait fastidieuse. Remarquons que l'ordinateur est certainement plus fiable, et beaucoup plus rapide pour ce genre de travaux ! La connexité de  $\gamma(\{0,1\}^4)$  permet d'énumérer toutes les triangulations de  $\{0,1\}^4$  : il y en a 92487256. Il a été établi précédemment que  $\{0,1\}^4$  admet 87959448 triangulations régulières [28]. Par conséquent, plus de 95% des triangulations de  $\{0,1\}^4$  sont régulières. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il est difficile de trouver des triangulations de  $\{0,1\}^4$  qui ne sont pas régulières [9].

Puisque le cube de dimension 4 admet si peu de triangulations non-régulières, il semble naturel de formuler la conjecture suivante :

**Conjecture 3.** *Toutes les triangulations de  $\{0,1\}^4$  sont 2-régulières.*

D'après le théorème 2, une preuve de cet énoncé fournirait, de surcroît, une autre preuve de la connexité du graphe des flips de  $\{0,1\}^4$ . Il est envisageable, pour se donner une idée, d'utiliser la caractérisation donnée par le théorème 7 pour chacune des triangulations non-régulières du cube de dimension 4, puisque celles-ci sont maintenant connues. Pour cela, l'utilisation de l'ordinateur serait de nouveau certainement requise. En outre, cette méthode s'appuie sur le théorème 16 énoncé ci-dessus. Il est donc intéressant d'envisager également une preuve directe de la conjecture 3 qui utiliserait le théorème 7, le théorème 3 ou le théorème 4, mais qui ne s'appuierait pas sur la connexité de  $\gamma(\{0,1\}^4)$ . Pour cela, il faudrait comprendre la structure des triangulations du cube de dimension 4 de manière synthétique. Cela permettrait également de

mieux comprendre la structure des triangulations des cubes de dimension supérieure à 4, puisque certaines de leurs faces sont précisément des cubes de dimension 4. Une telle étude pourrait en particulier améliorer la borne supérieure sur  $m(T)$  donnée par le théorème 10 lorsque  $T$  est une triangulation d'un cube de dimension quelconque.

Il serait surprenant que les triangulations des cubes de dimension supérieure à 4 soient toujours 2-régulières. Toutefois, une autre question naturelle est celle de la connexité des graphes de flips de ces cubes : il n'est pas déraisonnable de penser que ces graphes puissent être connexes. Cependant, alors que les méthodes présentées dans la section 5.2 peuvent être généralisées sans difficulté aux cubes de dimension supérieure à 4, il est probable que les parties de la preuve qui demandent l'aide de l'ordinateur ne puissent pas être utilisées dans ce cas. Pour généraliser la preuve présentée dans ce chapitre, il faudrait en particulier que le lemme 8 et la proposition 7 soient remplacés par des énoncés plus généraux ne nécessitant pas l'aide de l'ordinateur.

---

---

## Chapitre 6

---

### Le diamètre des associaèdres

Il a été mentionné au chapitre 2 que le graphe des flips d'un polygone de  $n$  sommets (représenté dans la figure 2.5 quand  $n$  vaut 4, 5 ou 6) est le graphe d'un polytope de dimension  $n - 3$  appelé *associaèdre*.

La première mention de ce polytope remonte à 1951, quand Dov Tamari introduit le treillis des parenthésages dans sa thèse [81, 82]. Il remarque que ce treillis possède la structure du complexe des faces d'un polytope et dessine les associaèdres de dimension 1, 2 et 3 [78]. Le treillis de Tamari est redécouvert une dizaine d'années plus tard par James Stasheff pour l'étude de l'associativité dans les espaces de lacets [77]. Il faut attendre 1984 pour que Mark Haiman construise l'associaèdre comme un polytope dont le complexe des faces est le treillis de Tamari [25]. Mark Haiman ne publie pas son manuscrit, mais une construction due à Carl Lee est publiée en 1989 [35]. Parmi les constructions plus récentes de l'associaèdre, mentionnons celles de Jean-Louis Loday [39] et Christophe Holweg et Carsten Lange [27]. L'associaèdre a été généralisé par Israel Gel'fand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky [22, 23], Frédéric Chapoton, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky [8] et par Satyan Devadoss [14]. Les multi-triangulations [45] pourraient également conduire à une autre généralisation.

En travaillant sur la conjecture d'optimalité dynamique [74], Daniel Sleator, Robert Tarjan et William Thurston obtiennent le résultat suivant en 1988 [75] :

**Théorème 17.** *Le diamètre du graphe des flips d'un polygone convexe de  $n$  sommets,*

- i. n'est jamais plus grand que  $2n - 10$  quand  $n$  est supérieur à 12,*
- ii. est égal à  $2n - 10$  dès que  $n$  est « suffisamment grand ».*

Puisque le graphe des flips d'un polygone de  $n$  sommets est le graphe de l'associaèdre de dimension  $n - 3$ , le théorème 17 permet aussi de caractériser le diamètre de cet associaèdre. Dans [75], la preuve de la deuxième assertion ne donne pas de valeur explicite à « suffisamment grand ». Le diamètre  $\Delta_n$  du graphe des flips d'un polygone convexe de  $n$  sommets, obtenu à l'aide de l'ordinateur est reporté dans le même article pour les 16 plus petites valeurs de  $n$  :

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Delta_n$	0	1	2	4	5	7	9	11	12	15	16	18	20	22	24	26

On peut voir dans ce tableau que  $\Delta_n = 2n - 10$  quand  $n = 11$  et quand  $13 \leq n \leq 18$ . En outre,  $\Delta_n > 2n - 10$  pour toutes les autres valeurs de  $n$  inférieures à 19. Pour cette raison, les auteurs de [75] formulent la conjecture suivante :

**Conjecture 4.**  $\Delta_n = 2n - 10$  pour tout entier  $n$  supérieur à 12.

D'autre part, dans [75], la preuve de la deuxième assertion du théorème 17 utilise une construction de géométrie hyperbolique. Une construction similaire a été utilisée plus tard pour estimer la simplicité d'un cube de dimension quelconque [76]. Les auteurs de [75] s'étonnent de la présence de la géométrie dans la preuve d'un énoncé purement combinatoire. Cette remarque a conduit à considérer l'existence d'une preuve combinatoire du théorème 17 comme un autre problème ouvert [10, 12, 15]. Il y a trois ans, Patrick Dehornoy a progressé dans la résolution de ce problème en obtenant une borne inférieure sur  $\Delta_n$  de la forme  $2n - O(\sqrt{n})$  [12].

Les deux problèmes mentionnés ci-dessus ont été résolus récemment [47]. En d'autres mots, il a été prouvé par des arguments combinatoires que  $\Delta_n = 2n - 10$  pour tout entier  $n$  supérieur à 12. Une ébauche de cette preuve est donnée dans ce chapitre.

Deux triangulations dont la distance, en nombre de flips, est maximale vont être décrites dans la section 6.2. La preuve que ces deux triangulations sont bien à distance maximale est ébauchée dans la section 6.3, et les méthodes combinatoires nécessaires à cela (c'est-à-dire des inégalités sur les distances de flips) sont présentées dans la section 6.1. À certains endroits, les preuves sont omises, mais le lecteur pourra trouver une démonstration complète dans [47].

## 6.1 Égalités et inégalités sur les distances de flip

Dans cette section, plusieurs égalités et inégalités générales sont obtenues sur les distances de flip. Soient  $U$  et  $V$  deux triangulations d'un même polygone convexe. Un chemin de longueur  $k$  entre  $U$  et  $V$  est une succession de  $k$  flips qui transforme  $U$  en  $V$ . Un tel chemin est dit *minimal* si sa longueur est minimale parmi tous les chemins entre  $U$  et  $V$ . Dans la suite, la longueur de n'importe quel chemin minimal entre  $U$  et  $V$  sera notée  $\delta(\{U, V\})$ . La partie (a) du lemme 3 dans [75] énonce que, si une arête de  $V$  peut être introduite dans  $U$  par un flip, alors il y a un chemin minimal de  $U$  à  $V$  qui commence par ce flip. Ce résultat est généralisé par le théorème suivant, dont la preuve est donnée dans [47] :

**Théorème 18.** Soient  $T$ ,  $U$  et  $V$  trois triangulations d'un polygone convexe. Si :

- i.  $T$  est rencontrée le long d'un chemin minimal entre  $U$  et  $V$ ,
- ii. Une arête de  $T$  peut être introduite dans  $U$  par un flip,

alors il y a un chemin minimal de  $U$  à  $V$  qui commence par ce flip.

Ce théorème permet d'exhiber un chemin minimal entre deux triangulations qui commence par un certain flip. Sa conclusion peut aussi être réécrite comme une égalité entre deux distances de flips. En effet, si  $\varepsilon$  est l'arête enlevée par le flip dont il est question au point *ii.* dans l'énoncé du théorème 18, alors la conclusion du théorème peut être réécrite de la manière suivante :

$$\delta(\{U, V\}) = \delta(\{\mathfrak{F}(U, \varepsilon), V\}) + 1.$$

Remarquons que le théorème 18 peut être encore généralisé à une succession de flips [47]. Cette généralisation est ici omise.

La preuve qui sera ébauchée dans la section 6.3 nécessite de pouvoir comparer les distances de flips dans le cas de polygones dont le nombre de sommets est différent. Afin d'obtenir de telles inégalités, il est possible d'utiliser l'opération de contraction d'arête qui est décrite dans le paragraphe suivant.

Soit  $\varepsilon$  une arête extérieure d'un polygone convexe  $\pi$  donné. Contracter  $\varepsilon$  dans une triangulation  $T$  de  $\pi$  consiste à remplacer les deux sommets de  $\varepsilon$  par un point  $v$  à l'intérieur de chaque face de  $T$ . Si  $v$  appartient à  $\text{conv}(\varepsilon)$ , alors cette opération produit une triangulation de  $(\pi \setminus \varepsilon) \cup \{v\}$  (une preuve de cela est donnée dans [47]). Dans la suite de ce chapitre, il sera supposé que  $v$  hérite le nom des deux sommets de  $\varepsilon$ . Il sera donc noté indifféremment en utilisant l'un ou l'autre de ces sommets. Cette convention est différente de celles qui sont adoptées dans [47]. On appellera  $T \Upsilon \varepsilon$  la triangulation obtenue en contractant  $\varepsilon$  dans une triangulation  $T$  de  $\pi$ .

L'effet d'une telle contraction sur un chemin entre deux triangulations est maintenant décrit sur un exemple. Appelons  $U$  et  $V$  les deux triangulations de l'hexagone dont les arêtes intérieures forment un triangle. Un chemin (minimal) entre ces deux triangulations est représenté en haut de la figure 6.1. Appelons  $\varepsilon$  l'arête extérieure qui est en haut de l'hexagone. Si  $\varepsilon$  est contractée dans toutes les triangulations rencontrées le long de ce chemin, on obtient la suite de triangulations du pentagone qui est dessinée en bas de la figure. Dans cette suite de triangulations du pentagone, deux triangulations consécutives sont identiques ou sont obtenues l'une de l'autre par un flip. On peut voir en particulier que la deuxième et la troisième triangulation sont identiques parce que les triangulations correspondantes avant la contraction se transforment l'une en l'autre par un flip qui *modifie le triangle incident à  $\varepsilon$* . Par conséquent, la longueur du chemin entre  $U \Upsilon \varepsilon$  et  $V \Upsilon \varepsilon$  qui résulte de la contraction est égale à la différence entre la longueur du chemin avant la contraction et le nombre de flips qui modifient le triangle incident à  $\varepsilon$  le long de ce chemin. D'après le théorème suivant, dont la preuve est donnée dans [47], cette propriété est vraie en général :

**Théorème 19.** *Soient  $U$  et  $V$  deux triangulations du même polygone et  $\varepsilon$  une arête extérieure de ce polygone. Si  $\psi$  est un chemin de longueur  $k$  entre  $U$  et  $V$ , alors il existe un chemin de longueur  $k - j$  entre  $U \Upsilon \varepsilon$  et  $V \Upsilon \varepsilon$ , où  $j$  est le nombre de flips le long de  $\psi$  qui modifient le triangle incident à l'arête  $\varepsilon$ .*

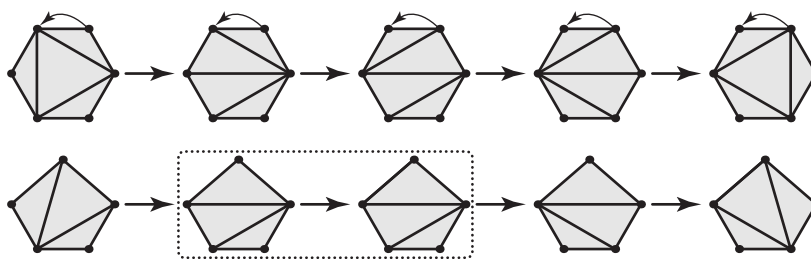


FIGURE 6.1 – Un chemin minimal entre les deux triangulations de l’hexagone dont les arêtes intérieures forment un triangle (en haut) et la suite de triangulations du pentagone obtenue en contractant l’arête extérieure qui est en haut de l’hexagone (en bas).

Considérons une paire  $P$  de triangulations d’un polygone  $\pi$  et une arête externe  $\varepsilon$  de  $\pi$ . Appelons  $P \vee \varepsilon$  la paire de triangulations obtenue en contractant  $\varepsilon$  dans les deux triangulations appartenant à  $P$ . Le théorème 19 fournit un moyen de comparer les distances de flips des paires  $P$  et  $P \vee \varepsilon$ . Considérons le nombre de flips qui modifient le triangle incident à  $\varepsilon$  le long d’un chemin minimal entre les deux éléments de  $P$ . La valeur maximale de ce nombre, obtenue pour un tel chemin, sera notée  $\vartheta(P, \varepsilon)$ . Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 19 :

**Corollaire 10.** *Soit  $P$  une paire de triangulations d’un polygone  $\pi$ . Si  $\varepsilon$  est une arête externe de  $\pi$ , alors :*

$$\delta(P) \geq \delta(P \vee \varepsilon) + \vartheta(P, \varepsilon).$$

Ce corollaire fournit des bornes inférieures sur  $\delta(P)$  qui dépendent de  $\vartheta(P, \varepsilon)$ . Le reste de cette section est dédié à l’obtention de bornes inférieures sur  $\vartheta(P, \varepsilon)$ .

Soit  $T$  une triangulation d’un polygone  $\pi$  et  $\varepsilon$  une arête externe de ce polygone. Appelons  $a$  et  $b$  les deux sommets de  $\varepsilon$ , et  $c$  le sommet de  $\pi$  tel que  $\{a, c\}$  et  $\{b, c\}$  appartiennent à  $T$ . En d’autres mots,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les trois sommets du triangle incident à l’arête  $\varepsilon$  dans  $T$ . On rappelle que la coque de  $\varepsilon$  dans  $T$  est le singleton  $\{c\}$ . Le théorème suivant est emprunté à [47] :

**Théorème 20.** *Soient  $U$  et  $V$  deux triangulations d’un polygone  $\pi$ . Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois sommets de  $\pi$  tels que :*

- i.  $\{a, b\}$  et  $\{b, c\}$  sont deux arêtes externes de  $\pi$  et la triangulation  $V$  contient  $\{a, c\}$ ,
- ii. Les coques de  $\{a, b\}$  et  $\{b, c\}$  dans  $U$  sont deux sous-ensembles distincts de  $\pi \setminus \{a, c\}$ ,

alors  $\vartheta(\{U, V\}, \{a, b\}) \geq 2$  ou  $\vartheta(\{U, V\}, \{b, c\}) \geq 2$ .

*Preuve.* Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois sommets de  $\pi$ . Supposons que  $\{a, b\}$  et  $\{b, c\}$  sont des arêtes extérieures de  $\pi$  et que  $\{a, c\}$  est une arête de  $V$ . Dans ce cas, le triangle  $\{a, b, c\}$  appartient à la triangulation  $V$ . Supposons également que les coques de  $\{a, b\}$  et de  $\{b, c\}$  dans  $U$  sont des sous-ensembles distincts de  $\pi \setminus \{a, c\}$ . Il découle de cela que les

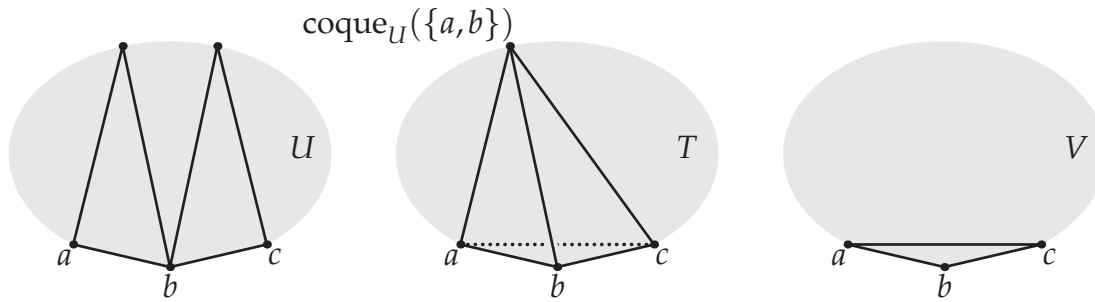


FIGURE 6.2 – Deux triangulations  $U$  (gauche) et  $V$  (droite) satisfaisant les conditions du théorème 20 et la triangulation  $T$  (centre) utilisée dans la preuve de ce théorème. L'arête introduite quand  $\{b\} \cup \text{coque}_U(\{a,b\})$  est flippée dans  $T$  est représentée en pointillés.

triangles de  $U$  incidents aux arêtes  $\{a,b\}$  et  $\{b,c\}$  sont distincts et admettent  $b$  comme leur unique sommet commun. Les triangulations  $U$  et  $V$  sont respectivement représentées dans la partie gauche et dans la partie droite de la figure 6.2.

Maintenant, supposons que  $\vartheta(\{U,V\},\{a,b\}) \leq 1$ . Puisque les triangles de  $U$  incidents à  $\{a,b\}$  et à  $\{b,c\}$  sont distincts, l'arête  $\{a,b\}$  ne peut être incidente au même triangle dans  $U$  et dans  $V$ . Ainsi, il y a exactement un flip qui modifie le triangle incident à  $\{a,b\}$  le long de tout chemin minimal de  $U$  à  $V$ . Considérons un tel chemin  $\psi$  et appelons  $T$  la triangulation dans laquelle ce flip est effectué le long de  $\psi$ . Puisqu'il n'y a qu'un seul flip comme celui-là le long de  $\psi$ , ce flip remplace nécessairement l'arête  $\{b\} \cup \text{coque}_U(\{a,b\})$  par l'arête  $\{a,c\}$  comme illustré au centre de la figure 6.2. En outre, puisque  $\text{coque}_U(\{a,b\})$  et  $\text{coque}_U(\{b,c\})$  sont distinctes, alors le triangle incident à  $\{b,c\}$  doit avoir été modifié au moins une fois le long du chemin  $\psi$  avant que  $T$  soit atteinte. Puisque le flip effectué dans  $T$  modifie lui aussi le triangle incident à  $\{b,c\}$ , ce triangle est donc modifié au moins deux fois le long du chemin  $\psi$ . Par conséquent,  $\vartheta(\{U,V\},\{b,c\})$  n'est pas inférieur à 2.  $\square$

Le théorème 18, le corollaire 10 et le théorème 20 sont les ingrédients principaux de la méthode combinatoire qui sera utilisée dans la section 6.3 pour obtenir de bonnes bornes inférieures sur les distances de flip. Bien que ces résultats doivent être généralisés pour permettre une preuve rigoureuse (voir [47]), de telles généralisations ne seront pas données ici, et seront remplacées par des explications plus intuitives.

## 6.2 Deux triangulations à distance maximale

Soit  $\pi$  un polygone convexe avec  $n$  sommets numérotés de 0 à  $n-1$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Considérons les triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$  de  $\pi$  représentées dans la figure 6.3 selon la parité de  $n$ . Il est montré dans [47] que la distance de ces deux triangulations est  $2n-10$  quand  $n$  est supérieur à 12. Comme on peut le voir dans la figure,  $W_n^-$  a trois arêtes intérieures incidentes au sommet  $n-1$ . Un tel ensemble d'arêtes sera appelé un *peigne de trois dents au sommet  $n-1$* . La triangulation  $W_n^-$  a un autre peigne au sommet  $\lfloor n/2 \rfloor - 1$  avec trois ou quatre dents selon la parité de  $n$ . La

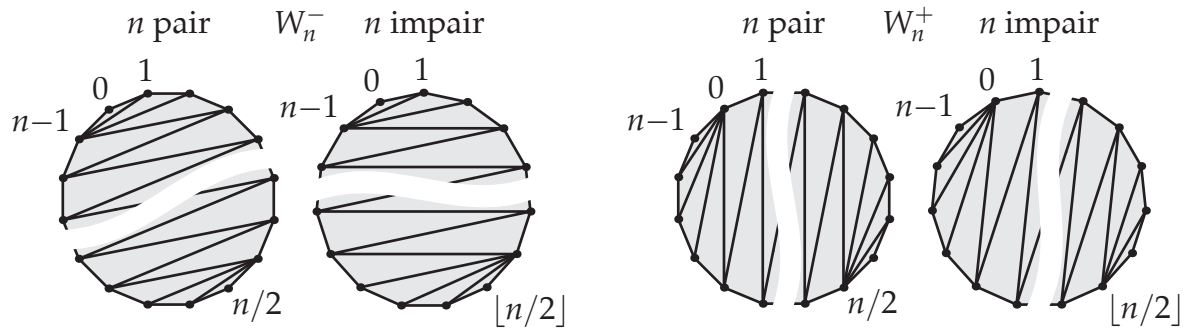


FIGURE 6.3 – Les triangulations  $W_n^-$  (à gauche) et  $W_n^+$  (à droite) représentées quand  $n > 8$ .

triangulation  $W_n^+$  contient un peigne de quatre dents au sommet 0, et un deuxième peigne au sommet  $\lfloor n/2 \rfloor$  avec trois ou quatre dents selon la parité de  $n$ . Les autres arêtes intérieures de  $W_n^-$  et de  $W_n^+$  forment un zigzag (c'est-à-dire un chemin simple dont les sommets alternent entre deux parties opposées du polygone) qui relie les deux peignes contenus dans ces triangulations. On peut voir dans la figure 6.3 que la taille de ces zigzags dépend de  $n$ . Quand  $n$  est égal à 9, le polygone est tout juste assez grand pour contenir les deux peignes. Ces peignes ont alors une dent en commun et le zigzag disparaît. Pour cette raison, la description des triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$  donnée ci-dessus, et leurs représentations dans la figure 6.3 ne sont correctes que si  $n$  est strictement supérieur à 8.

La définition de  $W_n^-$  et de  $W_n^+$  donnée dans [47] est plus générale. En particulier, ces deux triangulations y sont définies de façon consistante pour tout  $n$  supérieur ou égal à 3. Quand  $3 \leq n \leq 8$ , les peignes qu'elles contiennent perdent des dents, ou disparaissent. Malgré cela, pour ces petites valeurs de  $n$ , les triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$  définies dans [47] gardent certaines des propriétés importantes qui sont nécessaires à la preuve. Ces triangulations sont représentées dans la figure 6.4 quand  $4 \leq n \leq 8$ . Si  $n$  est égal à 3,  $W_n^-$  et  $W_n^+$  se réduisent à un simple triangle, et pour cette raison, elles sont omises dans la figure. Pour tout  $n$  supérieur ou égal à 3, notons :

$$A_n = \{W_n^-, W_n^+\}.$$

Quand  $3 \leq n \leq 12$ , la distance de  $W_n^-$  et  $W_n^+$  peut être calculée facilement en utilisant un ordinateur. Il est toutefois aussi possible de trouver  $\delta(A_n)$  par une preuve traditionnelle. En particulier, les distances reportées dans la table suivante sont obtenues dans [47] en utilisant les méthodes présentées dans la section 6.1, et leurs généralisations :

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\delta(A_n)$	0	1	2	4	5	7	8	10	12	14

D'après ces valeurs,  $\delta(A_n)$  est strictement supérieur à  $2n - 10$  quand  $3 \leq n \leq 8$  et égal à cette valeur quand  $9 \leq n \leq 12$ . Remarquons, en particulier, que  $W_n^-$  et  $W_n^+$  ne sont pas à distance maximale quand  $n$  vaut 9, 10 ou 12. En utilisant les résultats donnés dans les sections précédentes, une borne inférieure récursive sur  $\delta(A_n)$  va être obtenue dans la

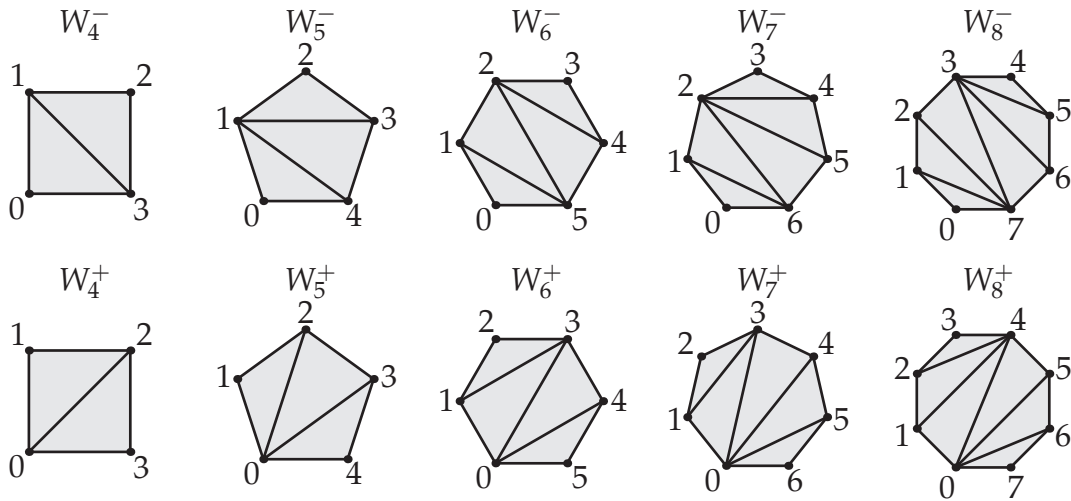


FIGURE 6.4 – Les triangulations  $W_n^-$  (en haut) et  $W_n^+$  (en bas) dessinées quand  $4 \leq n \leq 8$ .

prochaine section pour tout  $n$  supérieur à 12. En utilisant cette borne inférieure et les valeurs de  $\delta(A_n)$  reportées dans le tableau ci-dessus, nous allons prouver que  $\delta(A_n)$  est supérieur ou égal à  $2n - 10$  dès que  $n$  est supérieur à 12.

### 6.3 Ébauche de la preuve

Il peut être vu dans les figures 6.3 et 6.4 que si l'arête  $\{n - 2, n - 1\}$  est contractée dans les triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$ , la paire de triangulations obtenue est  $A_{n-1}$ , à renumérotation des sommets près. Cette observation est vraie pour tout  $n$  supérieur à 3. Ainsi, le résultat suivant est obtenu comme conséquence du corollaire 10 :

**Théorème 21.** *Soit  $n$  un entier supérieur à 3. Si  $\vartheta(A_n, \{n - 2, n - 1\}) \geq 2$ , alors :*

$$\delta(A_n) \geq \delta(A_{n-1}) + 2.$$

Si l'inégalité  $\delta(A_n) \geq \delta(A_{n-1}) + 2$  était vraie en général pour tout  $n$  supérieur à 3, le problème serait immédiatement résolu. Malheureusement, cette inégalité est obtenue sous une condition assez forte : l'existence d'un chemin minimal entre  $W_n^-$  et  $W_n^+$  le long duquel le triangle incident à  $\{n - 2, n - 1\}$  est modifié au moins deux fois. En fait, un tel chemin minimal n'existe pas nécessairement. Afin de contourner cette difficulté d'autres contractions vont être envisagées.

Pour commencer, remarquons que la contraction utilisée pour obtenir le théorème 21 peut être itérée. Si  $n$  est plus grand que 4, contracter l'arête  $\{n - 2, n - 1\}$  dans les deux triangulations de la paire  $A_n$ , puis l'arête  $\{0, 1\}$  dans les deux triangulations obtenues produit la paire  $A_{n-2}$ , à une renumérotation des sommets près. Ceci reste vrai si on échange l'ordre de ces deux contractions : contracter d'abord l'arête  $\{0, 1\}$ , puis l'arête  $\{n - 2, n - 1\}$  dans les deux triangulations de la paire  $A_n$  produit toujours une paire

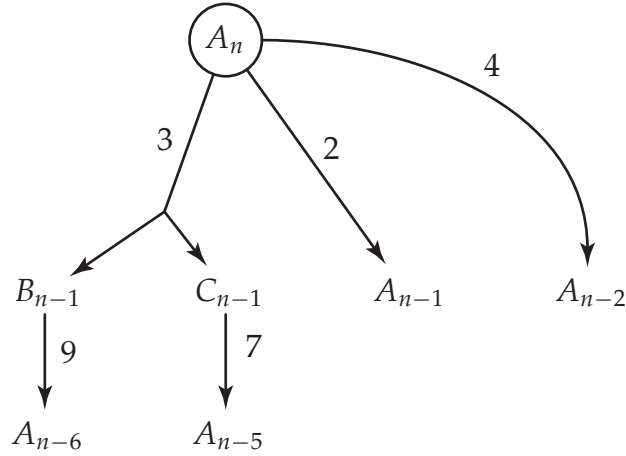


FIGURE 6.5 – Représentation de la preuve du théorème 26. Un arc de poids  $w$  d'une paire  $P$  vers une paire  $Q$  représente l'inégalité  $\delta(P) \geq \delta(Q) + w$  obtenue sous une certaine condition. Ces conditions sont omises ici mais peuvent être trouvées dans les énoncés des théorèmes correspondant à chaque arc.

de triangulations dont la distance est  $\delta(A_{n-2})$ . Il peut être vu dans les figures 6.3 et 6.4 que le triangle incident à l'arête  $\{n-2, n-1\}$  n'est pas le même dans les triangulations  $W_n^- \curlywedge \{0,1\}$  et  $W_n^+ \curlywedge \{0,1\}$ . Ceci est vrai pour tout  $n$  supérieur à 5. Ainsi, au moins un flip modifie ce triangle le long de tout chemin minimal entre  $W_n^- \curlywedge \{0,1\}$  et  $W_n^+ \curlywedge \{0,1\}$ . Par conséquent, le corollaire 10 produit l'inégalité suivante :

$$\delta(A_n \curlywedge \{0,1\}) \geq \delta(A_{n-2}) + 1.$$

En combinant cette inégalité avec celle qui est obtenue du corollaire 10 pour la contraction de l'arête  $\{0,1\}$  dans la paire  $A_n$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 22.** Soit  $n$  un entier supérieur à 5. Si  $\vartheta(A_n, \{0,1\}) \geq 3$ , alors :

$$\delta(A_n) \geq \delta(A_{n-2}) + 4.$$

Comme dans le cas du théorème 21, l'inégalité énoncée par le théorème 22 est obtenue sous la condition qu'il existe un certain chemin entre  $W_n^-$  et  $W_n^+$ . Là non plus, rien ne nous assure qu'un tel chemin existe. À cause de cela, la condition complémentaire aux conditions énoncées par les théorèmes 21 et 22 va être examinée. Avant d'aller plus loin, regardons la figure 6.5, dans laquelle la preuve du résultat final est schématisée par un arbre. Dans cette figure, chaque arc correspond à une inégalité obtenue sous une certaine condition. L'inégalité correspondant à un arc de poids  $w$  de la paire  $P$  vers la paire  $Q$  est la suivante :

$$\delta(P) \geq \delta(Q) + w.$$

Par exemple, les arcs de  $A_n$  vers  $A_{n-1}$  et vers  $A_{n-2}$  correspondent respectivement aux théorèmes 21 et 22. Puisque les inégalités représentées par ces arcs sont obtenues sous la condition de l'existence de certains chemins entre  $W_n^-$  et  $W_n^+$ , le troisième arc dont

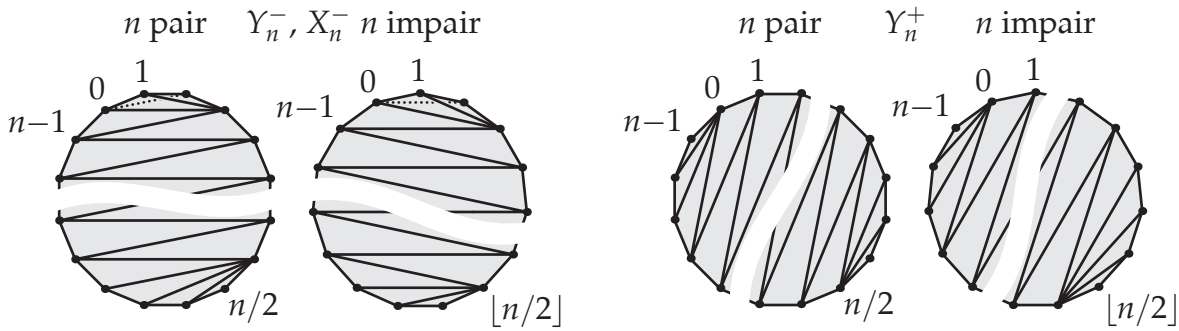


FIGURE 6.6 – Les triangulations  $Y_n^-$  (à gauche) et  $Y_n^+$  (à droite) représentées en lignes continues quand  $n$  est supérieur à 8. La triangulation  $X_n^-$ , obtenue en flippant  $\{1, 3\}$  dans  $Y_n^-$  est esquissée par une ligne pointillée (à gauche).

l'origine est  $A_n$  (dans la figure 6.5) sera considéré sous la condition complémentaire aux deux premiers. Remarquons que ce troisième arc pointe vers deux paires. Ceci est dû au fait que cet arc compare  $\delta(A_n)$  avec  $\delta(B_{n-1})$  ou avec  $\delta(C_{n-1})$ . Les deux paires de triangulations  $B_n$  et  $C_n$  sont définies pour tout entier  $n$  supérieur à 8 par :

$$B_n = \{Y_n^-, Y_n^+\} \text{ et } C_n = \{X_n^-, Y_n^+\},$$

où  $Y_n^-$ ,  $Y_n^+$  et  $X_n^-$  sont représentées dans la figure 6.6. La triangulation  $Y_n^-$  est dessinée en traits continus dans la partie gauche de la figure. Cette triangulation contient deux peignes aux sommets 3 et  $\lceil n/2 \rceil - 1$ . Le peigne au sommet 3 a toujours trois dents, et l'autre peigne a quatre dents si  $n$  est pair et seulement trois si  $n$  est impair. Les autres arêtes intérieures de  $Y_n^-$  forment un zigzag entre ces deux peignes. Quand  $n$  vaut 9 ou 10, le zigzag disparaît et les deux peignes deviennent adjacents. La triangulation  $X_n^-$  est obtenue en flippant l'arête  $\{1, 3\}$  dans la triangulation  $Y_n^-$ . Elle est esquissée par une ligne pointillée dans la partie gauche de la figure 6.6. On peut voir que ce flip élimine le peigne au sommet 3. La triangulation  $Y_n^+$  est dessinée dans la partie droite de la figure. On peut voir que  $Y_n^+$  peut être obtenue en renumérotant les sommets de  $W_n^-$ . En particulier,  $Y_n^+$  contient un peigne de trois dents au sommet 0 et un autre peigne au sommet  $\lceil n/2 \rceil$  dont le nombre de dents (trois ou quatre) dépend de la parité de  $n$ .

Les paires  $B_n$  et  $C_n$  sont aussi définies pour  $7 \leq n \leq 8$  dans [47], ce qui est nécessaire pour prouver que  $\delta(A_n) \geq 2n - 10$  quand  $3 \leq n \leq 12$ . Ce résultat a déjà été donné sans preuve ci-dessus. Les paires  $B_n$  et  $C_n$  ne seront donc pas définies pour  $7 \leq n \leq 8$  ici. Pour la même raison, le théorème suivant est énoncé ici quand  $n$  est supérieur à 9 plutôt que quand  $n$  est supérieur à 7. Il fournit l'inégalité correspondant à l'arc le plus à gauche dont l'origine est  $A_n$  dans la figure 6.5 :

**Théorème 23.** Soit  $n$  un entier supérieur à 9. Si  $\vartheta(A_n, \{n-2, n-1\})$  et  $\vartheta(A_n, \{0, 1\})$  sont respectivement inférieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 2, alors il existe  $P \in \{B_{n-1}, C_{n-1}\}$  tel que  $\delta(A_n)$  est égal à  $\delta(P) + 3$  et  $\vartheta(P, \{0, 1\})$  est inférieur ou égal à 1.

*Preuve (ébauche).* Supposons que  $\vartheta(A_n, \{n-2, n-1\}) \leq 1$  et que  $\vartheta(A_n, \{0, 1\}) \leq 2$ . Puisque  $\{n-2, n-1\}$  n'est pas incident au même triangle dans  $W_n^-$  et dans  $W_n^+$ , il y a exactement un flip qui modifie le triangle incident à cette arête le long de tout chemin

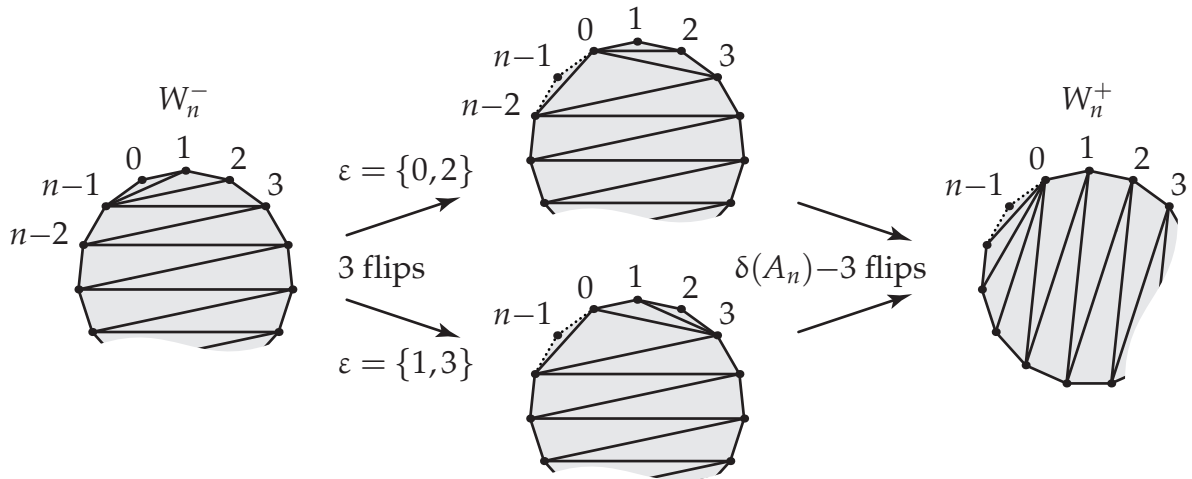


FIGURE 6.7 – La triangulation  $U$  (au centre) utilisée dans la preuve du théorème 23, et représentée ici selon la valeur de  $\varepsilon$ . Dans cette preuve la triangulation  $U$  est atteinte au bout de trois flips le long du chemin minimal  $\phi$  de  $W_n^-$  à  $W_n^+$ .

minimal de  $W_n^-$  à  $W_n^+$ . Soit  $\psi$  un tel chemin. Appelons  $T$  la triangulation qui résulte du flip le long de ce chemin qui modifie le triangle incident à  $\{n-2, n-1\}$ . Puisqu'il n'y a qu'un seul de ces flips le long du chemin  $\psi$ , ce flip remplace nécessairement l'arête  $\{3, n-1\}$  par l'arête  $\{0, n-2\}$ . En particulier,  $T$  contient les arêtes  $\{0, n-2\}$  et  $\{0, 3\}$ . Par conséquent, toutes les arêtes extérieures du quadrilatère  $\{0, 1, 2, 3\}$  sont contenues dans  $T$  et l'une des diagonales de ce quadrilatère ( $\{0, 2\}$  ou  $\{1, 3\}$ ) doit aussi être dans  $T$ . Notons  $\varepsilon$  cette diagonale.

On peut voir dans la figure 6.3 que les arêtes  $\{0, 2\}$ ,  $\{0, 3\}$  et  $\{0, n-2\}$  peuvent être introduites dans  $W_n^-$  en flippant successivement  $\{1, n-1\}$ ,  $\{2, n-1\}$  et  $\{3, n-1\}$  dans cet ordre. Si l'ordre des deux premiers flips est inversé, les arêtes introduites seront  $\{1, 3\}$ ,  $\{0, 3\}$  et  $\{0, n-2\}$ . Ceci prouve qu'on peut introduire les arêtes  $\varepsilon$ ,  $\{0, 3\}$  et  $\{0, n-2\}$  dans  $W_n^-$  en effectuant trois flips consécutifs. Comme nous l'avons vu ces trois arêtes appartiennent à  $T$ . Ainsi, il découle du théorème 18 que cette suite de trois flips est le début d'un chemin minimal  $\phi$  de  $W_n^-$  à  $W_n^+$ .

La triangulation  $U$  obtenue après les trois premiers flips le long du chemin  $\phi$  est représentée dans la figure 6.7 selon que  $\varepsilon$  est égal à  $\{0, 2\}$  ou à  $\{1, 3\}$ . On peut voir que  $U$  et  $W_n^+$  contiennent toutes les deux le triangle  $\{0, n-1, n-2\}$ . Par conséquent, il découle de la partie (b) du lemme 3 dans [75] que ce triangle sera contenu dans toutes les triangulations rencontrées le long de tout chemin minimal entre  $U$  et  $W_n^+$ . Par conséquent, on peut retirer de  $U$  et de  $W_n^+$  ce triangle et ses deux arêtes incidentes au sommet  $n-1$  sans changer la distance de ces deux triangulations. La paire de triangulations ainsi obtenue est égale à  $B_{n-1}$  (si  $\varepsilon = \{1, 3\}$ ) ou à  $C_{n-1}$  (si  $\varepsilon = \{0, 2\}$ ). Notons qu'il est inutile de renuméroter les sommets du polygone dans ce cas.

Appelons  $P = B_{n-1}$  si  $\varepsilon = \{1, 3\}$  et  $P = C_{n-1}$  si  $\varepsilon = \{0, 2\}$ . Nous avons prouvé que :

$$\delta(A_n) = \delta(\{U, W_n^+\}) + 3 \text{ et } \delta(\{U, W_n^+\}) = \delta(P).$$

Il suffit de combiner ces deux égalités pour obtenir  $\delta(A_n) = \delta(P) + 3$ . Remarquons

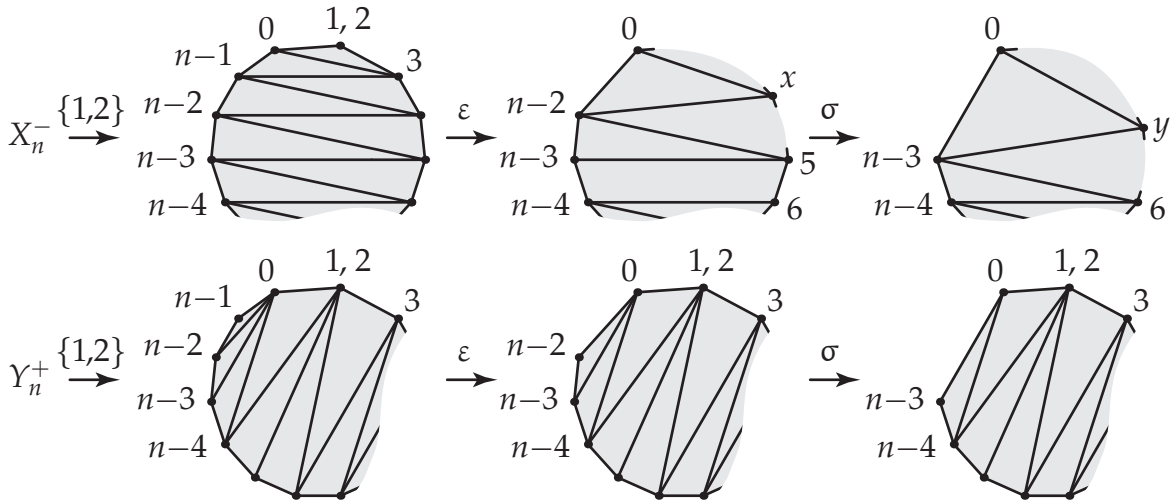


FIGURE 6.8 – Les trois premières contractions utilisées dans la preuve du théorème 24. Les flèches indiquent les contractions successives des arêtes  $\{1,2\}$ ,  $\varepsilon$  et  $\sigma$  dans les triangulations  $X_n^-$  et  $Y_n^+$ . Le sommet résultant de la contraction de l'arête  $\{1,2\}$  est numéroté 1 et 2 selon la convention introduite dans la section 6.1. Le sommet appelé  $x$  est égal à 3 ou à 4, et le sommet appelé  $y$  est égal à 3, à 4 ou à 5 selon les valeurs de  $\varepsilon$  et de  $\sigma$ .

enfin que l'un des trois premiers flips le long du chemin  $\phi$  modifie le triangle incident à  $\{0,1\}$ . Puisque un chemin minimal entre  $W_n^-$  et  $W_n^+$  peut être construit en combinant les trois premiers flips le long de  $\phi$  avec un chemin minimal quelconque entre les deux éléments de  $P$ , on obtient :

$$\vartheta(A_n, \{0,1\}) \geq \vartheta(P, \{0,1\}) + 1.$$

Puisque  $\vartheta(A_n, \{0,1\}) \leq 2$ , ceci prouve que  $\vartheta(P, \{0,1\})$  n'est pas plus grand que 1.  $\square$

Deux autres inégalités doivent encore être obtenues qui correspondent aux arcs dont les origines sont les paires  $B_{n-1}$  et  $C_{n-1}$  dans la figure 6.5. D'après l'énoncé du théorème 23, ces deux inégalités peuvent être prouvées sous l'hypothèse que  $\vartheta(P, \{0,1\})$  est au plus 1, où  $P$  est a paire à l'origine de l'arc. Les preuves de ces inégalités s'appuient sur le théorème 20. Ici, seule la plus simple de ces inégalités sera prouvée. D'autre part, au lieu d'utiliser la généralisation du théorème 20 donnée dans [47], la preuve sera esquissée en mettant l'accent sur les intuitions qui lui sont sous-jacentes.

**Théorème 24.** Soit  $n$  un entier plus grand que 11. Si  $\vartheta(C_n, \{0,1\}) \leq 1$ , alors :

$$\delta(C_n) \geq \delta(A_{n-4}) + 7.$$

*Preuve (ébauche).* Supposons que  $\vartheta(C_n, \{0,1\}) \leq 1$ . On remarque que si on contracte successivement les arêtes  $\{1,2\}$ ,  $\{n-3, n-2\}$ ,  $\{n-2, n-1\}$  et  $\{0, n-1\}$  dans  $C_n$ , on obtient la paire  $A_{n-4}$  à une renumérotation des sommets près. Il peut être vu dans la figure 6.6 que, dans la paire  $C_n$ , les sommets 0, 1 et 2 satisfont les conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  requises par le théorème 20. Puisque  $\vartheta(C_n, \{0,1\}) \leq 1$  alors, selon ce théorème,

$$\vartheta(C_n, \{1,2\}) \geq 2. \quad (6.1)$$

Les deux triangulations de la paire  $C_n \vee \{1, 2\}$  sont représentées dans la partie gauche de la figure 6.8. On peut voir que les coques des arêtes  $\{n-3, n-2\}$ ,  $\{n-2, n-1\}$  et  $\{0, n-1\}$  dans la triangulation  $X_n^- \vee \{1, 2\}$  sont respectivement  $\{5\}$ ,  $\{4\}$  et  $\{3\}$ . Ceci vient du fait que  $n$  est plus grand que 11. En effet, rappelons que la triangulation  $X_n^-$  a un peigne au sommet  $\lceil n/2 \rceil - 1$  (voir la figure 6.6). Puisque  $n$  est plus grand que 11 alors  $5 \leq \lceil n/2 \rceil - 1$  et, parmi des arêtes  $\{n-3, n-2\}$ ,  $\{n-2, n-1\}$  et  $\{0, n-1\}$ , seule la première peut être placée entre deux dents du peigne au sommet  $\lceil n/2 \rceil - 1$ . Ainsi, ces trois coques sont nécessairement distinctes.

Remarquons maintenant que si on contracte les arêtes  $\{n-3, n-2\}$ ,  $\{n-2, n-1\}$  et  $\{0, n-1\}$  dans n'importe quel ordre dans la paire  $C_n \vee \{1, 2\}$  on obtient toujours la paire  $A_{n-4}$  (rappelons que le sommet résultant de la contraction d'une arête hérite les noms des deux sommets de l'arête contractée). Nous pouvons prouver, en utilisant le théorème 20 que l'un de ces ordres produit l'inégalité voulue. En effet, on peut voir dans la figure 6.8 que, dans la paire  $C_n \vee \{1, 2\}$ , les sommets  $0$ ,  $n-1$  et  $n-2$  satisfont les conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans l'énoncé de ce théorème. Par conséquent, l'inégalité suivante est vraie avec  $\varepsilon = \{0, n-1\}$  ou avec  $\varepsilon = \{n-2, n-1\}$  :

$$\vartheta(C_n \vee \{1, 2\}, \varepsilon) \geq 2. \quad (6.2)$$

Les deux triangulations appartenant à  $C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon$  sont représentées au centre de la figure 6.8. Dans cette figure,  $x$  est égal à 3 si  $\varepsilon = \{n-2, n-1\}$  ou à 4 si  $\varepsilon = \{0, n-1\}$ . On peut voir que, dans la paire  $C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon$ , les sommets  $0$ ,  $n-2$  et  $n-3$  satisfont les conditions sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans l'énoncé du théorème 20. Ainsi l'inégalité suivante est satisfaite avec  $\sigma = \{0, n-2\}$  ou  $\sigma = \{n-3, n-2\}$  :

$$\vartheta(C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon, \sigma) \geq 2. \quad (6.3)$$

Les deux triangulations appartenant à  $C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon \vee \sigma$  sont dessinées dans la partie droite de la figure 6.8. Le sommet  $y$  est égal à 3, à 4 ou à 5 selon les valeurs de  $\varepsilon$  et de  $\sigma$ . Maintenant rappelons que  $n$  est supérieur à 11. À cause de cela,  $y < n-4$ . On peut voir dans la figure 6.8 que, dans ce cas, le triangle incident à l'arête  $\{0, n-3\}$  n'est pas le même dans les deux triangulations appartenant à  $C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon \vee \sigma$ . Ainsi, il y a au moins un flip dans tout chemin minimal entre ces deux triangulations qui modifie le triangle incident à  $\{0, n-3\}$ . Par conséquent :

$$\vartheta(C_n \vee \{1, 2\} \vee \varepsilon \vee \sigma, \{0, n-3\}) \geq 1. \quad (6.4)$$

L'inégalité voulue est donc obtenue en invoquant quatre fois le corollaire 10 et en utilisant conjointement (6.1), (6.2), (6.3) et (6.4).  $\square$

Le théorème 24 peut être prouvé en utilisant une généralisation du corollaire 10 qui évite d'invoquer ce corollaire quatre fois (voir [47]). La preuve alternative ci-dessus explique comment cette généralisation marche. Remarquons en particulier que la suite de contractions utilisées dans la preuve ci-dessus est construite de manière à ce que chacune de ces contractions, sauf la dernière, « élimine » au moins deux flips.

En utilisant un argument similaire, on obtient le résultat suivant qui correspond à l'arc dont l'origine est  $B_{n-1}$  dans la figure 6.5. Le lecteur trouvera une preuve rigoureuse de ce résultat dans [47]. Remarquons que cette preuve requiert cinq contractions au lieu de seulement quatre.

**Théorème 25.** *Soit  $n$  un entier supérieur à 11. Si  $\vartheta(B_n, \{0, 1\}) \leq 1$ , alors :*

$$\delta(B_n) \geq \delta(A_{n-5}) + 9.$$

Ce théorème fournit la dernière des inégalités correspondant aux arcs dessinés dans la figure 6.5. Chacune de ces inégalités est obtenue sous une certaine condition. Les conditions associées aux différents arcs ayant la même origine épuisent toutes les possibilités, et cette figure peut être lue comme la borne inférieure récursive suivante sur la distance en nombre de flips des triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$  :

**Théorème 26.** *Pour tout entier  $n$  supérieur à 12,*

$$\delta(A_n) \geq \min(\delta(A_{n-1}) + 2, \delta(A_{n-2}) + 4, \delta(A_{n-5}) + 10, \delta(A_{n-6}) + 12).$$

Ce théorème peut être utilisé pour prouver par récurrence que  $\delta(A_n) \geq 2n + O(1)$  pour tout  $n$  supérieur ou égal à 3. Comme nous l'avons mentionné dans la section 6.2, la distance de  $W_n^-$  et de  $W_n^+$  est au moins  $2n - 10$  quand  $3 \leq n \leq 12$ . Par conséquent, on obtient que  $\delta(A_n) \geq 2n + 10$  pour tout  $n$  supérieur ou égal à 3. Rappelons aussi qu'il est prouvé dans [75] par des arguments combinatoires que la distance en nombre de flips de deux triangulations d'un polygone de  $n$  sommets est au plus  $2n - 10$  quand  $n$  est supérieur à 12. On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 27.** *Pour tout entier  $n$  supérieur à 12,*

- i. *La distance en nombre de flips des triangulations  $W_n^-$  et  $W_n^+$  est  $2n - 10$ ,*
- ii. *Le diamètre du graphe des flips d'un polygone de  $n$  sommets est  $2n - 10$ .*

## 6.4 Discussion

La méthode donnée dans [47] pour obtenir de bonnes bornes inférieures sur les distances de flip a été présentée ici en mettant l'accent sur les intuitions sous-jacentes, parfois au dépend de la complétude. Le lecteur trouvera les preuves complètes dans [47]. Cette méthode fournit un moyen de résoudre les deux problèmes ouverts formulés dans [75]. En d'autres mots, elle peut être utilisée pour obtenir une preuve combinatoire que le diamètre du graphe des flips d'un polygone de  $n$  sommets est  $2n - 10$  quand  $n$  est supérieur à 12. Une conséquence directe de ce résultat est que le diamètre de l'associaèdre de dimension  $d$  est  $2d - 4$  pour tous les entiers  $d$  supérieurs à 9.

Il est naturel de se demander si cette méthode, ou une généralisation de celle-ci pourrait être appliquée aux différentes généralisations des triangulations et des flips qu'on

peut trouver dans la littérature. Le cas des triangulations régulières d'ensembles finis de points quelconques, qui a été introduit dans la section 2.1 peut sembler être un bon candidat. En effet, d'après le théorème 1 prouvé par Israel Gel'fand, Mikhail Kapranov et Andrei Zelevinsky [22, 23], le sous-graphe induit par ces triangulations dans le graphe des flips est polytopal et donc connexe. Malheureusement, généraliser l'opération de contraction est délicat, même dans le cas d'ensembles de points de dimension 2, lorsque ceux-ci admettent plus d'un sommet intérieur [47]. Une possible étape préliminaire pourrait être la recherche d'ensembles de points avec de bonnes propriétés.

En revanche, les méthodes présentées dans ce chapitre pourraient être appliquées directement aux cycloèdres. Les graphes de ces polytopes sont les graphes de flips construits avec les triangulations centralement symétriques d'un polygone convexe [20]. Dans ce cas, l'opération de flip est modifiée afin de conserver la symétrie centrale. Ainsi, les contractions doivent elles-aussi porter sur deux arêtes opposées du polygone. Il n'y a pas d'indication (à ma connaissance) sur le diamètre des cycloèdres. En outre, des paires de triangulations centralement symétriques qui pourraient réaliser ces diamètres sont encore à trouver.

Une autre possibilité serait de considérer les graphes de flips construits avec les multitriangulations des polygones convexes. Vincent Pilaud et Francisco Santos ont montré que ces objets ont beaucoup de propriétés qui ressemblent à celles des triangulations [45]. En particulier, la première assertion dans l'énoncé du théorème 17 admet une généralisation élégante. Bien que les contractions d'arêtes puissent être effectuées dans ce cas, le lemme 3 de [75] semble ne pas se généraliser aux multitriangulations, et il faudrait trouver des arguments pour le remplacer.

---

---

# Chapitre 7

---

## Conclusions et perspectives

Plusieurs résultats sur les graphes de flips ont été rapportés dans ce mémoire. Ces résultats concernent la connexité et le diamètre de ces graphes. Les résultats de connexité découlent principalement du théorème 2, prouvé dans [49], d'après lequel le sous-graphe  $\gamma_2(E)$  induit par les triangulations 2-régulières dans le graphe des flips d'un ensemble fini de points  $E$  est connexe. Ceci pose la question suivante : *quelles triangulations de  $E$  sont 2-régulières ?* Cette question a été partiellement résolue dans les chapitres 3 et 4, qui présentent les résultats de [48, 49, 50]. Les deux autres résultats importants qui ont été présentés dans les chapitres 5 et 6 sont la connexité du graphe des flips du cube de dimension 4 et le diamètre des graphes de flips des polygones convexes. Ces résultats sont rapidement discutés ci-dessous, et quelques-unes des directions de recherche possibles, dont certaines ont déjà été mentionnées plus haut, sont données.

### 7.1 Géométrie discrète

En particulier, toutes les triangulations de  $E$  sont 2-régulières quand  $E$  est de dimension 2, et deux exemples classiques de triangulations non-régulières d'ensembles de points de dimension 3 (la triangulation de Rudin [68] et la triangulation représentée dans la figure 3.2 [10, 36, 55]) sont 2-régulières. Les ensembles de points dont le graphe des flips n'est pas connexe, trouvés par Francisco Santos [10, 70, 71] montrent qu'à partir de la dimension 5, il existe des triangulations de certains ensembles de points qui ne sont pas 2-régulières. En utilisant un de ces ensembles de points, il a été montré dans la section 4.4 que le sous-graphe induit dans le graphe des flips par les triangulations 3-régulières n'est pas toujours connexe. Il n'y a pas, à ma connaissance d'exemple de triangulation d'un ensemble de points de dimension 3 ou 4 qui ne soit pas 2-régulière. La recherche d'une telle triangulation permettrait de mieux connaître le lien entre 2-régularité et connexité des graphes de flips. La conjecture 2, qui affirme que *toutes les triangulations d'un ensemble fini  $E$  de points sont  $\dim(E)$ -régulières*, permet de guider les idées à ce sujet. En particulier, cette conjecture n'interdit pas que toutes les triangulations de  $E$  soient

2-régulières dès que  $E$  est de dimension 3. Ce cas particulier est d'une très grande importance puisque la dimension 3 est privilégiée dans les modèles mathématiques de phénomènes physiques (voir par exemple [19, 38, 53, 55, 84]).

La preuve de la connexité du graphe des flips du cube de dimension 4 a été présentée dans le chapitre 5 (voir aussi [52]). Ceci a permis de montrer que ce cube admet 92487256 triangulations, et que plus de 95% de ces triangulations sont régulières. À la fin du chapitre 5, l'extension de cette preuve aux cubes de dimension supérieure à 4 a été discutée. Une telle extension paraît difficile puisque cette preuve comporte une partie informatisée. Cependant, une autre question découle naturellement du fait que la grande majorité des triangulations du cube sont 2-régulières. D'après la conjecture 3, toutes les triangulations de ce cube sont 2-régulières. Une preuve de cette conjecture fournirait, par le théorème 2 une autre preuve de la connexité du graphe des flips du cube de dimension 4. D'autre part, elle permettrait peut-être d'obtenir des bornes supérieures sur  $m(T)$  plus précises que celles qui sont fournies par le théorème 10 quand  $T$  est une triangulation du cube de dimension  $d$ .

## 7.2 Géométrie algorithmique

Les triangulations régulières fournissent une méthode élégante pour la détection de contacts dans le cadre de la simulation de milieux granulaires par éléments distincts [19, 53, 55]. Cette méthode nécessite de pouvoir régulariser efficacement une triangulation initiale donnée. Dans le cadre particulier de la détection de contacts, cette triangulation initiale n'est pas tout à fait quelconque puisqu'elle est faiblement régulière. Remarquons maintenant que la triangulation initiale pour laquelle l'algorithme de régularisation 1 ne converge pas (voir figure 3.2 et [55]) n'est pas faiblement régulière [36] ! Il n'y a pas, à ma connaissance de triangulation initiale faiblement régulière pour laquelle cet algorithme ne converge pas. Une telle triangulation ou la preuve de la conjecture 1, serait donc d'un grand intérêt dans le contexte des algorithmes de régularisation, et plus généralement en géométrie algorithmique. Remarquons que la notion de régularité faible a été utilisée dans la section 3.3 pour montrer que toute triangulation d'un ensemble de points de dimension 2 est 2-régulière.

## 7.3 Combinatoire géométrique

L'algorithme de régularisation 1 pose une autre question que celle de la connexité des graphes de flips, c'est-à-dire celle de leurs diamètres lorsqu'ils sont connexes. La preuve que le diamètre du graphe des flips d'un polygone convexe de  $n$  sommets est  $2n - 10$  quand  $n$  est supérieur à 12 a été ébauchée dans le chapitre 6 (la preuve complète se trouve dans [47]). Cette preuve résout deux problèmes issus de [75] et restés longtemps ouverts. Ces diamètres sont aussi les diamètres des associaèdres [25, 35, 77, 81, 82]. Plus précisément, le diamètre du graphe des flips d'un polygone convexe de  $n$  sommets est le diamètre de l'associaèdre de dimension  $d$  avec

$d = n - 3$  [35]. Ce problème est donc lié à celui des diamètres de polytopes, qui fournit certaines des questions les plus importantes en combinatoire géométrique et en optimisation mathématique. Remarquons, en particulier que l'associaèdre de dimension  $d$  admet  $d(d + 3)/2$  facettes. Ainsi, les associaèdres satisfont largement la conjecture de Hirsch, par ailleurs récemment infirmée par Francisco Santos [72].

Comme il est discuté à la fin du chapitre 6, les techniques utilisés pour trouver les diamètres des graphes de flips des polygones convexes pourraient être utilisées pour étudier les diamètres d'autres graphes de flips ou de leurs sous-graphes connexes. Parmi de tels graphes figurent les graphes de nombreux polytopes : les cycloèdres [20], les polytopes secondaires [4, 22, 23], les associaèdres graphiques [14] et les associaèdres généralisés [8]. Nous pouvons ajouter les multiassociaèdres [45] à cette liste, même si il s'agit de treillis dont on ne connaît pas à ce jour de réalisation polytopale.



---

# Bibliographie

- [1] Miguel AZAOLA et Francisco SANTOS : The graph of triangulations of a point configuration with  $d + 4$  vertices is 3-connected. *Discrete & Computational Geometry*, 23:489–536, 2000.
- [2] Abraham BERMAN et Robert J. PLEMMONS : *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, volume 9 de *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 1994.
- [3] Fariba BIGDELI : *Triangulations of Convex Polytopes and d-Cubes*. Phd thesis, University of Kentucky, 1991.
- [4] Louis J. BILLERA, Paul FILLIMAN et Bernd STURMFELS : Construction and complexity of secondary polytopes. *Advances in Mathematics*, 83:155–179, 1990.
- [5] Louis J. BILLERA, Mikhail M. KAPRANOV et Bernd STURMFELS : Cellular strings on polytopes. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122:549–555, 1994.
- [6] Louis J. BILLERA et Bernd STURMFELS : Fiber polytopes. *Annals of Mathematics*, 135:527–549, 1992.
- [7] Jean-Daniel BOISSONNAT et Mariette YVINEC : *Algorithmic geometry*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] Frédéric CHAPOTON, Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Polytopal realizations of generalized associahedra. *Canadian Mathematical Bulletin*, 45:537–566, 2002.
- [9] Jesús A. de LOERA : Nonregular triangulations of products of simplices. *Discrete & Computational Geometry*, 15:253–264, 1996.
- [10] Jesús A. de LOERA, Jörg RAMBAU et Francisco SANTOS : *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, volume 25 de *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, 2010.
- [11] Jesús A. de LOERA, Francisco SANTOS et Jorge URRUTIA : The number of geometric bistellar neighbors of a triangulation. *Discrete & Computational Geometry*, 21:131–142, 1999.
- [12] Patrick DEHORNOY : On the rotation distance between binary trees. *Advances in Mathematics*, 223:1316–1355, 2010.
- [13] René DESCARTES : *Principia philosophiae*. 1644.

- [14] Satyan L. DEVADOSS : A realization of graph associahedra. *Discrete Mathematics*, 309:271–276, 2009.
- [15] Satyan L. DEVADOSS et Joseph O’ROURKE : *Discrete and Computational Geometry*. Princeton University Press, 2011.
- [16] Herbert EDELSBRUNNER : An acyclicity theorem for cell complexes in  $d$  dimension. *Combinatorica*, 10:251–260, 1990.
- [17] Herbert EDELSBRUNNER et Nimish R. SHAH : Incremental topological flipping works for regular triangulations. *Algorithmica*, 15:223–241, 1996.
- [18] Jean-Albert FERREZ : *Dynamic Triangulations for Efficient 3D Simulation of Granular Materials*. Thèse N° 2432, EPFL, 2001.
- [19] Jean-Albert FERREZ et Thomas. M. LIEBLING : Dynamic triangulations for efficient detection of collisions between spheres with applications in granular media simulations. *Philosophical Magazine Series B*, 82(8):905–929, 2002.
- [20] Sergey FOMIN et Nathan READING : *Geometric combinatorics*, volume 13 de *IAS/Park City Mathematics Series*, chapitre Root systems and generalized associahedra, pages 63–131. American Mathematical Society, 2007.
- [21] Sergey FOMIN, Michael SHAPIRO et Dylan THURSTON : Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes. *Acta Mathematica*, 201(1):83–146, 2008.
- [22] Israel M. GEL’FAND, Mikhail M. KAPRANOV et Andrei V. ZELEVINSKY : *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Birkhäuser, 1994.
- [23] Israel M. GEL’FAND, Andrei V. ZELEVINSKY et Mikhail M. KAPRANOV : Discriminants of polynomials of several variables and triangulations of newton polyhedra. *Leningrad Mathematical Journal*, 2:449–505, 1990.
- [24] Branko GRÜNBAUM : *Convex Polytopes*, volume 221 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2003.
- [25] Mark HAIMAN : Constructing the associahedron. Unpublished manuscript, MIT, 1984.
- [26] Thomas C. HALES : A proof of the kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162: 1065–1185, 2005.
- [27] Christophe HOLWEG et Carsten E. M. C. LANGE : Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete & Computational Geometry*, 37:517–543, 2007.
- [28] Peter HUGGINS, Bernd STURMFELS, Josephine YU et Debbie S. YUSTER : The hyperdeterminant and triangulations of the 4-cube. *Mathematics of Computation*, 77:1653–1679, 2008.
- [29] Danièle HUGUET et Dov TAMARI : La structure polyédrale des complexes de parenthésages. *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences*, 3:69–81, 1978.

- [30] Barry JOE : Three-dimensional triangulations from local transformations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 10(4):718–741, 1989.
- [31] Barry JOE : Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations. *Computer Aided Geometric Design*, 8:123–142, 1991.
- [32] Johannes KEPLER : *Strena seu de nive sexangula*. 1611.
- [33] Charles L. LAWSON : Transforming triangulations. *Discrete Mathematics*, 3:365–372, 1972.
- [34] Charles L. LAWSON : *Mathematical Software III*, chapitre Software for  $C^1$  interpolation, pages 161–194. Academic Press, New York, 1977.
- [35] Carl W. LEE : The associahedron and triangulations of the  $n$ -gon. *European Journal of Combinatorics*, 10:551–560, 1989.
- [36] Carl W. LEE : *Applied Geometry and Discrete Mathematics—The Victor Klee Festschrift*, volume 4 de *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, chapitre Regular triangulations of convex polytopes, pages 443–456. American Mathematical Society, New York, 1991.
- [37] Carl W. LEE : *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapitre Subdivisions and triangulations of polytopes, pages 383–406. CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [38] Thomas M. LIEBLING et Lionel POURNIN : *Optimization Stories*, volume supplémentaire de *Documenta Mathematica*, chapitre Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations: Ubiquitous Siamese Twins, pages 419–431. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012.
- [39] Jean-Louis LODAY : Realization of the stasheff polytope. *Archiv der Mathematik*, 83:267–278, 2004.
- [40] Patrick S. MARA : Triangulations for the cube. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 20:170–177, 1976.
- [41] James C. MAXWELL : On reciprocal figures and diagrams of forces. *Philosophical Magazine Series 4*, 27:250–261, 1864.
- [42] James C. MAXWELL : On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 26:1–40, 1869.
- [43] Lee MOSHER : Tiling the projective foliation space of a punctured surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306(1):1–70, 1988.
- [44] Didier MÜLLER : *Techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts*. Thèse N° 1545, EPFL, 1996.
- [45] Vincent PILAUD et Francisco SANTOS : Multitriangulations as complexes of star polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 41:284–317, 2009.

- [46] Lionel POURNIN : *On the behavior of spherical and non-spherical grain assemblies, its modeling and numerical simulation*. Thèse N° 3378, EPFL, 2005.
- [47] Lionel POURNIN : The diameters of associahedra. arXiv:1207.6296, soumis, 2012.
- [48] Lionel POURNIN : Lifting simplicial complexes to the boundary of convex polytopes. *Discrete Mathematics*, 312:2849–2862, 2012.
- [49] Lionel POURNIN : A result on flip-graph connectivity. *Advances in Geometry*, 12:63–82, 2012.
- [50] Lionel POURNIN : Weakly regular subdivisions. *Discrete & Computational Geometry*, 47:106–116, 2012.
- [51] Lionel POURNIN : A combinatorial method to find sharp lower bounds on flip distances. In *FPSAC 2013*, pages 33–44, 2013.
- [52] Lionel POURNIN : The flip-graph of the 4-dimensional cube is connected. *Discrete & Computational Geometry*, 49:511–530, 2013.
- [53] Lionel POURNIN et Thomas M. LIEBLING : A generalization of distinct element method to tridimensional particles with complex shapes. In R. GARCÍA-ROJO, H. J. HERRMANN et S. MCNAMARA, éditeurs : *Powders and Grains 2005*, volume II, pages 1375–1378, Rotterdam, 2005. A.A.Balkema.
- [54] Lionel POURNIN et Thomas M. LIEBLING : Constrained paths in the flip-graph of regular triangulations. *Computational Geometry*, 37(2):134–140, 2007.
- [55] Lionel POURNIN et Thomas M. LIEBLING : *Research Trends in Combinatorial Optimization*, chapitre From Spheres to Spheropolyhedra: Generalized Distinct Element Methodology and Algorithm Analysis, pages 347–363. Springer, 2009.
- [56] Lionel POURNIN, Thomas M. LIEBLING et Alain MOCELLIN : Molecular-dynamics force models for better control of energy dissipation in numerical simulations of dense granular media. *Physical Review E*, 65(1):011302, 2002.
- [57] Lionel POURNIN, Marco RAMAIOLI, Patrick FOLLY et Thomas M. LIEBLING : About the influence of friction and polydispersity on the jamming behavior of bead assemblies. *European Physical Journal E*, 23(2):229–235, 2007.
- [58] Lionel POURNIN, Michel TSUKAHARA et Thomas M. LIEBLING : Particle shape versus friction in granular jamming. In Masami NAKAGAWA et Stefan LUDING, éditeurs : *Powders and Grains 2009*, volume 1145, pages 499–502, 2009.
- [59] Lionel POURNIN, Michel TSUKAHARA et Thomas M. LIEBLING : Simple probabilistic modeling of granular jamming and validation using dem. In Masami NAKAGAWA et Stefan LUDING, éditeurs : *Powders and Grains 2009*, volume 1145, pages 507–510, 2009.
- [60] Lionel POURNIN, Mats WEBER, Michel TSUKAHARA, Jean-Albert FERREZ, Marco RAMAIOLI et Thomas M. LIEBLING : Three-dimensional distinct element simulation of spherocylinder crystallization. *Granular Matter*, 7(2–3):119–126, 2005.

- [61] Johann RADON : Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83(1):113–115, 1921.
- [62] Marco RAMAIOLI, Lionel POURNIN et Thomas M. LIEBLING : Numerical and experimental investigation of alignment and segregation of vibrated granular media composed of rods and spheres. In R. GARCÍA-ROJO, H. J. HERRMANN et S. MCNAMARA, éditeurs : *Powders and Grains 2005*, volume II, pages 1359–1363, Rotterdam, 2005. A.A.Balkema.
- [63] Marco RAMAIOLI, Lionel POURNIN et Thomas M. LIEBLING : Vertical ordering of rods under vertical vibration. *Physical Review E*, 76(2):021304, 2007.
- [64] Jörg RAMBAU : Triangulations of cyclic polytopes and higher Bruhat orders. *Mathematika*, 44:162–194, 1997.
- [65] Jörg RAMBAU : *Mathematical Software – ICMS 2002*, chapitre TOPCOM: Triangulations of Point Configurations and Oriented Matroids, pages 330–340. World Scientific, 2002.
- [66] Jörg RAMBAU : *Combinatorial and computational geometry*, volume 52 de *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, chapitre On a generalization of Schönhardt’s polyhedron, pages 501–516. Cambridge University Press, 2005.
- [67] Jörg RAMBAU et Günter M. ZIEGLER : Projections of polytopes and the generalized Baues conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 16:215–237, 1996.
- [68] Mary Ellen RUDIN : An unshellable triangulation of a tetrahedron. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64:90–91, 1958.
- [69] Konstantin RYBNIKOV : Stresses and liftings of cell-complexes. *Discrete & Computational Geometry*, 21:481–517, 1999.
- [70] Francisco SANTOS : A point configuration whose space of triangulations is disconnected. *Journal of the American Mathematical Society*, 13(3):611–637, 2000.
- [71] Francisco SANTOS : Non-connected toric Hilbert schemes. *Mathematische Annalen*, 332(3):645–665, 2005.
- [72] Francisco SANTOS : A counterexample to the hirsch conjecture. *Annals of Mathematics*, 176(1):383–412, 2012.
- [73] Erich SCHÖNHARDT : Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder. *Mathematische Annalen*, 98:309–312, 1928.
- [74] Daniel D. SLEATOR et Robert E. TARJAN : Self-adjusting binary search trees. *Journal of the ACM*, 32:652–686, 1985.
- [75] Daniel D. SLEATOR, Robert E. TARJAN et William P. THURSTON : Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *Journal of the American Mathematical Society*, 1:647–681, 1988.

- [76] Warren D. SMITH : A lower bound for the simplicity of the  $n$ -cube via hyperbolic volumes. *European Journal of Combinatorics*, 21:131–137, 2000.
- [77] James D. STASHEFF : Homotopy associativity of H-spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 108:275–312, 1963.
- [78] James D. STASHEFF : *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures*, volume 299 de *Progress in Mathematics*, chapitre How I ‘met’ Dov Tamari, pages 45–63. Springer, 2012.
- [79] Erich STIEMKE : Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen. *Mathematische Annalen*, 76:340–342, 1915.
- [80] Fumihiko TAKEUCHI : *Discrete and computational geometry*, volume 2098 de *Lecture Notes in Computer Science*, chapitre Nonregular Triangulations, View Graphs of Triangulations, and Linear Programming Duality, pages 330–338. Springer, 2001.
- [81] Dov TAMARI : *Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev*. Thèse de mathématiques, Paris, 1951.
- [82] Dov TAMARI : Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 82:53–96, 1954.
- [83] Walter WHITELEY : Motions and stresses of projected polyhedra. *Structural Topology*, 7:13–38, 1982.
- [84] Xinjian XUE, Franco RIGHETTI, Hubert TELLEY, Thomas M. LIEBLING et Alain MOCELLIN : The Laguerre model for grain growth in three dimensions. *Philosophical Magazine Series B*, 75(4):567–585, 1997.
- [85] Günter M. ZIEGLER : *Lectures on polytopes*, volume 152 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 1995.