

UNIVERSITÉ PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD

École Doctorale Galilée

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

**Constructions quasipériodiques :
ensembles apériodiques de tuiles et sous-arbres induits
optimaux dans des pavages substitutifs**

Quasiperiodic constructions :
from aperiodic tilesets to optimal induced subtrees in substitutive tilings

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Carole PORRIER

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN INFORMATIQUE

Soutenance le 03/11/2023 devant le jury composé de :

Alexandre BLONDIN MASSÉ Directeur de thèse
Olivier BODINI Examineur
Émilie CHARLIER Rapportrice
Thomas FERNIQUE Directeur de thèse
Samuel PETITE Rapporteur
Christophe REUTENAUER Examineur
Laurent VUILLON Examineur

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

CONSTRUCTIONS QUASIPÉRIODIQUES : ENSEMBLES
APÉRIODIQUES DE TUILES ET SOUS-ARBRES INDUITS
OPTIMAUX DANS DES PAVAGES SUBSTITUTIFS

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

CONCENTRATION INFORMATIQUE

PAR

CAROLE PORRIER

NOVEMBRE 2023

Remerciements

En premier lieu, je remercie bien sûr mes directeurs de recherche, Alexandre Blondin Massé et Thomas Fernique, tant pour nos échanges scientifiques que pour leur implication, leur confiance et leur bienveillance, notamment quand j'avais du mal à avancer. Les conditions de travail ont pourtant été très particulières : confinement pendant plus d'un an en raison de la pandémie, à partir du milieu de ma première année, qui a rendu mes deux charges de cours plus prenantes (enseignement à distance), puis les deux dernières années en France, alors qu'Alexandre était à Montréal et Thomas à Moscou. Durant tout ce temps, nos rencontres en visio ont été régulières et ils ne m'ont mis que le peu de pression dont j'avais besoin pour avancer, me traitant davantage comme une collaboratrice que comme une étudiante. J'aurai plaisir à travailler à nouveau avec eux, sur ces objets fascinants que sont les pavages quasipériodiques.

Je remercie également Sébastien Labbé, avec qui j'ai collaboré sur le dernier chapitre de cette thèse. Il s'est montré pédagogue sur des notions qui étaient nouvelles pour moi et la communication s'est faite assez facilement, de sorte que nous avons trouvé des résultats très encourageants, ouvrant de belles perspectives de recherche. Thierry Monteil m'a également apporté une aide précieuse pour mieux comprendre les systèmes dynamiques, me permettant d'avancer de façon plus autonome sur le chapitre 5 pendant l'été. En outre, c'est toujours un plaisir de se croiser au labo ou de faire de la musique ensemble.

Mes derniers remerciements concernant la thèse elle-même vont aux membres du jury. Je remercie d'abord les rapporteurs, Émilie Charlier et Samuel Petite, qui m'ont donné de précieux conseils permettant d'améliorer la présentation de mon travail, afin de me donner les meilleures chances pour mon avenir en recherche. Leurs questions ainsi que celles des autres membres du jury pendant la soutenance m'ont permis de passer un agréable moment, oubliant même le stress.

Dans le même ordre d'idée, je remercie les chercheurs et laboratoires qui m'ont invitée à présenter mon travail lors de séminaires, ainsi que ceux avec qui j'ai pu discuter lors de conférences, ateliers, groupes de travail ou écoles. Toutes ces occasions et rencontres m'ont permis à la fois de m'entraîner à présenter, d'ouvrir des perspectives de recherche et de me sentir à ma place, y compris sur le plan humain, parmi les chercheurs en mathématiques et informatique théorique.

Bien sûr, tout ceci n'aurait pas été possible sans les personnes qui ont contribué à ma formation scientifique, tout au long de mon parcours en zigzag. Pour n'en citer qu'un, outre les cours qu'il m'a donnés, Pascal Gourdel m'a initiée à la recherche et permis de voir à quoi ressemblait un laboratoire de recherche, bien loin de ce que j'imaginai à l'époque! J'ai pu à cette occasion constater à quel point je préférais les mathématiques fondamentales plutôt que les applications, ce qui m'a permis de faire le bon choix de spécialité quand j'ai repris des études à Montréal, de longues années après.

Le début de ma nouvelle vie à Montréal a été marqué par de belles expériences en enseignement à l'UQAM, notamment au début avec Louise Laforest et Marie-Jean Meurs, qui m'ont permis de reprendre goût à l'enseignement loin de l'Éducation Nationale française. Par la suite, Marie-Jean m'a aussi permis, avec Florence Maas-Gariépy, de gérer au mieux le passage à l'enseignement à distance en milieu de session. J'ai aussi particulièrement apprécié de travailler avec Éric Beaudry et Jaël Champagne-Gareau, me rapprochant davantage de l'informatique. Plus généralement, mes enseignements à l'UQAM ainsi que les rencontres qu'ils ont permises m'ont apporté beaucoup.

Je remercie bien sûr les membres du LACIM et personnels des départements de mathématiques et d'informatique, notamment ceux que je voyais assez souvent à l'université, tant pour les discussions scientifiques que pour les échanges humains, aussi bien quand je vivais à Montréal que lors des quelques semaines que j'y ai passées en 2023. J'ai une pensée particulière pour Florence et pour Linda, dont la gentillesse et la bonne humeur ont illuminé de labo pendant un temps, et à Kaveh qui était le seul à rester aussi tard que moi au labo, puis m'a offert quelques moments de vie sociale pendant la pandémie.

Je finis ce tour professionnel avec le LIPN, où je me suis très vite sentie chez moi. D'abord, l'accueil chaleureux de Brigitte et Mehdi, par écrit avant même mon arrivée, m'a fait chaud au cœur. Moi qui craignais le retour en société après un an enfermée seule chez moi, j'ai au contraire voulu venir tous les jours au bureau, notamment pour partager mes repas et pauses café avec les autres doctorants. Même quand il y a eu des moments difficiles, les bons côtés l'ont toujours emporté, grâce aux personnes merveilleuses que j'ai rencontrées ici – qui sont trop nombreuses pour les citer, même si mes liens ne sont pas les mêmes avec toutes. Merci à tous!

Enfin, toute personne ayant fait un doctorat sait à quel point il est important de se sentir soutenu, non seulement par les pairs dans les moments de découragement, mais aussi par les personnes qui nous sont chères et nous apportent tant sur le plan humain. Je remercie tout particulièrement Meliha et Laila, que j'ai rencontrées au LIPN mais qui sont devenues bien plus que de simples collègues, ainsi que Ruth et Isabelle, que je connais depuis près de 25 ans maintenant et qui ont été bien présentes pendant cette période. Besma a aussi été une amie proche, en plus d'être ma cousine.

Et bien sûr, *last but not least*, je remercie ma famille, avec mention spéciale pour ma mère sans qui je n'aurais peut-être pas fait grand chose de ma vie, et mon frère qui me nourrit d'une façon que je ne saurais décrire. Les moments passés avec eux ainsi qu'avec mon oncle Éric et sa smala m'avaient manqué, et je les remercie chaleureusement pour tous ces moments de vie simple, loin du tumulte parisien. Je n'oublie pas non plus le reste de ma famille, notamment ma tante Odile qui m'a grandement inspirée, forgée dans mes jeunes années. Je vous aime.

Table des matières

Remerciements	ii
Liste des Figures	vii
Liste des Tableaux	x
Liste des abbréviations	xi
Résumé	xiii
Introduction	1
1 Pavages quasipériodiques : méthodes de définition et caractérisations	14
1.1 Symétries et apériodicité	14
1.2 Méthode par coupe et projection	17
1.3 Règles locales	21
1.4 Pavages de Penrose et dérivabilité locale	22
2 Pavages HBS : état de l’art et renouveau	26
2.1 Pavages HBS : état de l’art	28
2.1.1 Construction naturelle à partir des losanges de Penrose	28
2.1.2 Construction simple à partir des cerfs-volants et fléchettes	29
2.1.3 Dualité entre pavages HBS et P1	30
2.1.4 Propriétés connues des pavages HBS	31
2.2 Le jeu de tuiles Star	32
2.2.1 Construction	32
2.2.2 Substitutions	32
2.2.3 Observations additionnelles	35
2.3 Jeu de tuiles Gemstones	37

3	Fonction feuille des pavages P2	39
3.1	Fonction feuille et arbres de Penrose	40
3.2	Borne supérieure pour la fonction feuille	43
3.3	Chenilles pleinement feuillues	51
3.3.1	Les chenilles élémentaires C_{14} et C_{116}	51
3.3.2	Relation avec les pavages Star	53
3.3.3	Chemins optimaux dans les pavages Star	56
3.3.4	Construction de la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$	58
3.4	Remarques finales	59
4	Ensembles apériodiques et barres d’Ammann pour des pavages $4 \rightarrow 2$	61
4.1	Ombres et sous-périodes	61
4.2	Barres d’Ammann et sous-périodes de Penrose	63
4.2.1	Sous-périodes de Penrose	64
4.2.2	Liens avec les barres d’Ammann	65
4.3	La FP-méthode	65
4.3.1	Bonnes projections	66
4.3.2	Trouver des bonnes projections	67
4.3.3	Définir les prototyles	69
4.4	Paver avec des FP-tuiles	71
5	Tuiles de Wang et partition de Markov pour des pavages $4 \rightarrow 2$	76
5.1	Systèmes dynamiques et partition de Markov	78
5.1.1	Compléments sur la fenêtre et motifs interdits	78
5.1.2	Systèmes dynamiques de pavages	80
5.1.3	Sous-décalages de type fini	81
5.1.4	Automates finis et transducteurs	84
5.1.5	Partition de Markov	85
5.2	Construction du jeu de tuiles de Wang	86
5.2.1	Découpage des pavages <i>golden octagonal</i> en 15 formes	86
5.2.2	Recodage des motifs en 21 tuiles de Wang	89
5.2.3	Partition de la fenêtre	92
5.2.4	\mathbb{Z}^2 -action associée	93
5.2.5	Génération du jeu de tuiles à partir de \mathcal{P}_G, R_G	95
5.3	Structure substitutive	98
	Conclusion	102

Bibliographie	105
Annexes	111
A Calculs pour le chapitre 4	112
A.1 Génération de pavages par coupe et projection	112
A.2 Sous-périodes	113
A.2.1 Trouver les coordonnées entières d'une sous-période	113
A.2.2 Déterminer si une pente est caractérisée par ses sous-périodes . . .	115
A.2.3 Trouver les coordonnées non-entières des sous-périodes	115
A.3 Construction d'un ensemble de tuiles décorées	115
A.3.1 Calculer le r -atlas	115
A.3.2 Calcul des tuiles décorées	117
B Calculs pour le chapitre 5	118
B.1 Induction de Rauzy	118
B.2 Désubstitution des tuiles de Wang	122
Index	131

Table des figures

1	Pavage de Penrose avec l'ensemble P1 de 6 tuiles.	2
2	Pavage de Penrose avec l'ensemble P2 de 2 tuiles (<i>kite and dart</i>).	3
3	Pavage de Penrose de la Figure 2 et le graphe dual en bleu.	7
4	Chenille de Penrose le long d'un <i>ver de Conway</i>	7
5	Ensemble de tuiles HBS avec nouvelles décorations.	8
6	Ensemble \mathcal{C} de 36 prototiles correspondant aux pavages cyrénaïques.	10
7	Jeu de tuiles de Wang \mathcal{T}_G correspondant aux pavages <i>golden octagonal</i>	12
8	Partition de la fenêtre.	12
1.1	Exemples : pavages de Rauzy, Ammann-Beenker et Penrose	16
1.2	Exemples de relevés.	17
1.3	Illustration d'une coupe et projection avec $n = 2$ et $d = 1$	19
1.4	Pavage <i>golden octagonal</i> et projection non valide	19
1.5	Losanges de Penrose et barres d'Ammann	22
1.6	Jeux de tuiles de Penrose.	22
1.7	Les sept configurations de sommets dans un pavage P2 de Penrose.	23
1.8	Les sept royaumes dans un pavage P2 de Penrose.	24
1.9	Exemples de décompositions parfaites.	25
1.10	Décomposition de P2 et P3.	25
2.1	Tuiles HBS : hexagone, bateau et étoile (<i>Hexagon-Boat-Star</i>).	26
2.2	Jeu de tuiles Star, décoré par de petits cerfs-volants et fléchettes.	27
2.3	Superposition de pavages HBS et P3.	28
2.4	Tuiles HBS composées de tuiles P2 et P3	29
2.5	Superposition de pavages HBS et P2.	29
2.6	Superposition de pavages HBS et P1.	30
2.7	Simple correspondance entre tuiles HBS et P1.	30
2.8	Tuiles HBS avec segments d'Ammann et φ^2 -décomposition.	31
2.9	Pavages P2 et Star superposés.	33

2.10	Décomposition des tuiles de l'ensemble Star.	33
2.11	Dualité entre tuiles P1 et Star.	34
2.12	Pavages Star et P1 superposés.	35
2.13	Configurations de sommets dans les pavages HBS et Star.	36
2.14	Royaumes de l'orchidée et de la campanule.	36
2.15	Royaumes des étoiles.	36
2.16	Pavages Gemstones et HBS superposés, avec la φ^2 -composition en vert. . .	37
2.17	Jeu de tuiles Gemstones : saphir, rubis et topazes.	38
2.18	φ -décomposition des Gemstones.	38
3.1	Sous-arbres induits pleinement feuillus.	40
3.2	Pavage de Penrose et le P2-graphe associé en bleu.	42
3.3	Les six voisinages possibles, à isométrie près, d'une tuile P2.	44
3.4	L'unique élément de $\mathcal{F}'(2)$	46
3.5	Les cinq éléments de $\mathcal{F}'(3)$ (en marron), avec leurs voisinages possibles. . .	47
3.6	Les extensions dans $\mathcal{E}'(4)$ qui ne sont pas des chemins.	47
3.7	Poset des chenilles 3-internes-régulières.	48
3.8	Exemple de factorisation $I = I_1 \diamond I_2$ à (t_1, t_2)	49
3.9	Chenille optimale C_{116}	52
3.10	Chenille C_{116} , avec observations supplémentaires sur sa structure.	54
3.11	Longue chenille pleinement feuillue.	55
3.12	Long chemin optimal dans un pavage Star.	57
3.13	Décomposition d'un segment magenta et du chemin correspondant	58
4.1	Ombres de pavages d'Ammann-Beenker et de Penrose.	62
4.2	Sous-périodes de Penrose et barres d'Ammann	65
4.3	Les segments alignés dans un motif restent alignés dans l'ombre correspon- dant à la direction de la droite.	66
4.4	Pavage cyrénaïque avec $\pi(\lfloor p_i \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_i \rceil)$ pour chaque sous-période p_i . . .	67
4.5	Pavage cyrénaïque décoré suivant les sous-périodes.	70
4.6	Illustration de la preuve de la Proposition 4.	71
4.7	Diagramme résumant les notations utilisées dans le lemme 5.	72
4.9	Périodes des 4 ombres des pavages réalisables avec l'ensemble \mathcal{C}	75
5.1	Rappel du schéma de coupe et projection.	79
5.2	Motifs interdits des pavages <i>golden octagonal</i>	80
5.3	Partition de Markov du tore \mathbb{T}_1	85

5.4	Découpage des pavages <i>golden octagonal</i>	87
5.5	Les motifs et leur assemblage.	87
5.6	Les 15 motifs servant de base aux tuiles de Wang.	88
5.7	Bords horizontaux et verticaux naïfs.	89
5.8	Partie d'un pavage périodique composé de motifs F1.	89
5.9	Bords horizontaux augmentés.	90
5.10	Bords verticaux augmentés.	90
5.11	Automate correspondant à l'adjacence horizontale des tuiles	91
5.12	Automate correspondant à l'adjacence verticale des tuiles	91
5.13	Ensemble \mathcal{T}_G de 21 tuiles de Wang.	92
5.14	Partition de la fenêtre.	93
5.15	Partition affinée de la fenêtre.	94

Liste des tableaux

5.1	Correspondance entre les étiquettes des régions de la partition.	96
5.2	Correspondance entre les étiquettes des bords verticaux.	98
5.3	Correspondance entre les étiquettes des bords horizontaux.	98

Liste des abréviations

A5	. . .	ensemble 2 tuiles d’Ammann-Beenker : carré et losange
CP	. . .	<i>Cut and Project</i> : coupe et projection
E_A	. . .	penne des pavages d’Ammann-Beenker
E_C	. . .	penne des pavages cyrénaïques
E_G	. . .	penne des pavages <i>golden octagonal</i>
E_P	. . .	penne des pavages de Penrose (P3)
E_R	. . .	penne des pavages de Rauzy
FLIS	. .	<i>Fully Leafed Induced Subtree</i> : sous-arbre induit pleinement feuillu
FP	. . .	<i>Fine Projection</i> : “bonne” projection (et la méthode associée)
HBS	. .	ensemble de 3 tuiles <i>Hexagon-Boat-Star</i> : hexagone, bateau et étoile
LI	<i>Local Isomorphism</i> : isomorphisme local
LR	. . .	(<i>weak</i>) <i>Local Rules</i> : règles locales (faibles)
MLD	. .	mutuellement localement dérivables
P1	. . .	ensemble de 6 tuiles de Penrose : étoile, bateau, losange et pentagones
P2	. . .	ensemble de 2 tuiles de Penrose : cerf-volant et fléchette
P3	. . .	ensemble de 2 tuiles de Penrose : losanges fin et épais
\mathcal{P}_G	. . .	partition de la fenêtre des pavages <i>golden octagonal</i>
QC	. . .	quasicristal, ou quasicristallin
SFT	. .	<i>Subshift of Finite Type</i> : sous-décalage de type fini
\mathcal{T}_G	ensemble de tuiles de Wang associé aux pavages <i>golden octagonal</i>
Ω_G	. . .	décalage de Wang de l’ensemble \mathcal{T}_G

Résumé

Un pavage du plan est composé d'ensembles fermés qui couvrent le plan entier sans trou ni chevauchement. Cette thèse est centrée sur les pavages quasipériodiques : bien qu'ils ne soient pas périodiques, on y trouve partout les mêmes motifs finis et leurs propriétés peuvent être assez fortes. On commence par se pencher sur les pavages "HBS", dérivés des pavages de Penrose, dont on fait un état de l'art avant de décrire de nouvelles propriétés.

Ces pavages et des substitutions sont ensuite utilisés pour trouver la "fonction feuille" des pavages *kites and darts* de Penrose : on construit dans les graphes de Penrose une famille de sous-arbres induits "pleinement feuillus" arbitrairement grands, c'est-à-dire ayant le plus grand nombre possible de feuilles à nombre de sommets n fixé. On note ce nombre de feuilles $L_{P_2}(n)$ pour tout entier naturel n , et la suite $(L_{P_2}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée fonction feuille des graphes de Penrose. On en donne la formule.

Les barres d'Ammann ayant également joué un rôle dans l'étude du problème ci-dessus, on tente de mieux les comprendre via la notion de sous-périodes. Ces dernières découlent d'un schéma de coupe et projection permettant de définir certains pavages, dont les pavages de Penrose par losanges. On définit alors une méthode permettant de trouver des barres d'Ammann pour de nombreux pavages, en construisant des jeux de tuiles décorées, qui sont apériodiques.

Enfin, la question des règles locales, également liée aux sous-périodes et substitutions, permet par ailleurs de construire un jeu de tuiles de Wang associé aux pavages *golden octagonal*, ainsi qu'une partition de Markov pour une \mathbb{Z}^2 -rotation sur un tore, offrant une représentation symbolique de ces pavages.

Mots clés : graphe, sous-arbre induit, fonction feuille, pavages de Penrose, substitutions, barres d'Ammann, coupe et projection, sous-périodes, règles locales, pavages golden octagonal, tuiles de Wang, dynamique symbolique, partition de Markov.

Abstract

A tiling of the plane is made up of closed sets that cover the entire plane without gaps or overlaps. We study quasiperiodic tilings : although they are not periodic, the same finite patterns can be found in them everywhere, and their properties can be quite strong. We start by looking at "HBS" tilings, derived from Penrose tilings, of which we review the state of the art before describing new properties.

These tilings together with substitutions are then used to find the “leaf function” of Penrose tilings : in Penrose graphs, we construct a family of arbitrarily large “fully leafed” induced subtrees, i.e. with as many leaves as possible for a fixed number n of vertices. We denote this number of leaves $L_{P_2}(n)$ for any natural number n , and the sequence $(L_{P_2}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ is called the leaf function of Penrose graphs. The formula is given.

Since Ammann bars also played a role in the study of the above problem, we’re trying to understand them better via the notion of subperiods. The latter are derived from a cut-and-project scheme used to define certain tilings, including Penrose tilings by rhombuses. We then define a method for finding Ammann bars for many tilings, by constructing sets of decorated tiles, which are aperiodic.

Finally, the question of local rules, also related to subperiods and substitutions, enables us to construct a Wang tileset associated with *golden octagonal* tilings, as well as a Markov partition for a \mathbb{Z}^2 -rotation on a torus, offering a symbolic representation of these tilings.

Keywords : graph, induced subtree, leaf function, Penrose tilings, substitutions, Ammann bars, cut and project, subperiods, local rules, golden octagonal tilings, Wang tiles, symbolic dynamics, Markov partition.

Introduction

“Comment, en fait, décide-t-on de ce qui est important ou non en mathématiques ? Au bout du compte, les critères doivent être esthétiques. Il existe d’autres valeurs en mathématiques, telles que la profondeur, la généralité et l’utilité. Mais ce ne sont pas des fins en soi. Leur importance semble reposer sur les valeurs d’autres choses auxquelles elles sont liées. Les valeurs ultimes semblent être simplement esthétiques, c’est-à-dire des valeurs artistiques telles que celles que l’on trouve dans la musique, la peinture ou toute autre forme d’art.”^a [Pen74]

a. “How, in fact, does one decide which things in mathematics are important or not ? Ultimately, the criteria have to be aesthetic ones. There are other values in mathematics, such as depth, generality and utility. But these are not so much ends in themselves. Their significance would seem to rest on the values of other things to which they relate. The ultimate values seem simply to be aesthetic ; that is, artistic values such as one has in music or painting or any other art form.”

Ces propos ainsi que les citations suivantes sont extraits d’un article de Roger Penrose, éminent mathématicien et physicien, intitulé “The Rôle of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research”, et ne sont guère surprenants pour qui a vu ses pavages (Figure 1). En effet, indépendamment des applications qu’ils ont permises, ces derniers fascinent immédiatement par leur beauté et intriguent sans que l’on sache vraiment pourquoi au premier abord. Dans cet article, Penrose mentionne aussi la beauté de certaines équations, ou systèmes d’équations dans lesquels des symétries apparaissent ; il fait aussi référence à la beauté qu’il peut y avoir dans la simplicité d’une preuve ou formule qui résout un problème complexe.

Or ses pavages, en plus de leur attrait visuel, semblent correspondre au cas le plus simple parmi des exemples complexes. Ils combinent des propriétés remarquables, au point de pouvoir illustrer toutes les notions abordées dans cette thèse. Ils ont joué un rôle dans la découverte des quasicristaux, c’est-à-dire des cristaux dont le schéma de diffraction admet des symétries (notamment des rotations) mais pas de translation.

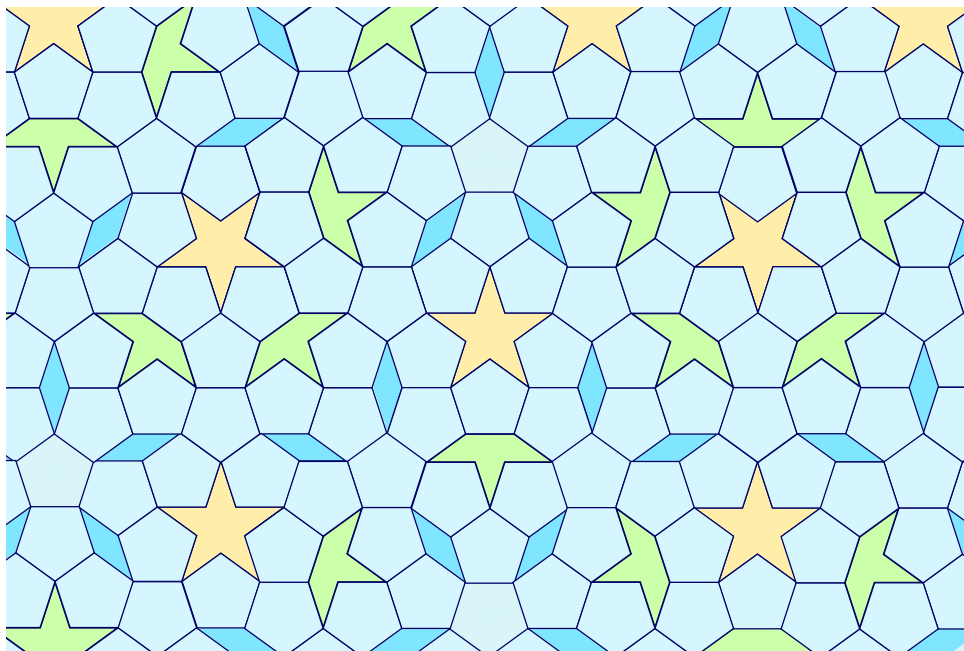


FIGURE 1 – Pavage de Penrose avec l'ensemble P1 de 6 tuiles.

De la même façon que les physiciens croyaient impossible qu'un matériau puisse avoir une structure ordonnée sans que celle-ci soit périodique, le mathématicien Hao Wang avait conjecturé qu'aucun *jeu de tuiles* ne pouvait être *apériodique*¹. C'est son étudiant Berger qui l'a démenti en trouvant le tout premier ensemble apériodique de tuiles en 1964 [Ber66]. Ce dernier est composé de *tuiles de Wang* (qui doivent leur nom à Hao Wang) et a eu un impact important sur les questions d'indécidabilité en logique. Il marque également le point de départ de la recherche sur les pavages apériodiques, c'est-à-dire appartenant à des familles de pavages pouvant être définies de différentes manières (*jeu de tuiles, coupe et projection, règles locales, substitutions...*) mais ne contenant que des pavages non périodiques.

Très vite, Berger réduit lui-même à 104 tuiles son ensemble en contenant initialement 20 426. Dès les années suivantes, d'autres chercheurs ont trouvé des ensembles apériodiques plus petits. On note notamment celui de Raphael Robinson [Rob71], constitué de tuiles décorées de forme carrée mais qui ne sont pas des tuiles de Wang. En particulier, des rotations et réflexions sont autorisées en plus des translations. Dans le même article, Robinson donne également ce qui devient à ce moment-là le plus petit ensemble connu de tuiles de Wang, avec 35 tuiles. Ce nombre est assez vite réduit par Penrose, Robinson et surtout Robert Ammann qui trouve en 1978 un ensemble de 16 tuiles [GS87].

1. Les termes en italique seront définis dans les chapitres suivants, après une vue d'ensemble. L'index page 131 permet de retrouver rapidement les définitions.

Il a cependant fallu attendre 1996, soit près de vingt ans, avant que Jarkko Kari trouve un ensemble de 14 tuiles [Kar96], dont Karel Culik s'est inspiré pour très vite arriver à 13 [Cul96]. Par la suite, encore près de vingt ans ont été nécessaires pour que l'on ait un plus petit ensemble apériodique de tuiles de Wang. En effet, Emmanuel Jeandel et Michael Rao ont trouvé en 2015 des ensembles apériodiques contenant 11 tuiles de Wang, et ont montré par une recherche exhaustive qu'aucun ensemble plus petit n'était apériodique : si un ensemble de tuiles de Wang contient 10 tuiles ou moins, soit il ne permet pas de paver le plan, soit il admet au moins un pavage périodique [JR21].

Si on ne se restreint pas aux tuiles de Wang, d'autres tuiles permettant plus de liberté, Penrose a trouvé son premier ensemble apériodique en 1974 [Pen74], soit peu de temps après Robinson, avec également 6 tuiles mais cette fois non carrées. En outre, il réduit très vite le nombre de tuiles à seulement 2 ! Qui plus est, avec deux ensembles distincts. C'est d'abord Martin Gardner qui les fait connaître dans un article de vulgarisation mathématique en 1977 [Gar77], avant que Penrose lui-même les présente dans le bel article *Pentaplexity* [Pen78] et les répertorie de façon plus détaillée dans [Pen79]. Nous verrons au Chapitre 1 les pavages constitués de *kites and darts* (type P2, illustrés à la Figure 2) ainsi que les pavages par losanges de Penrose (type P3).

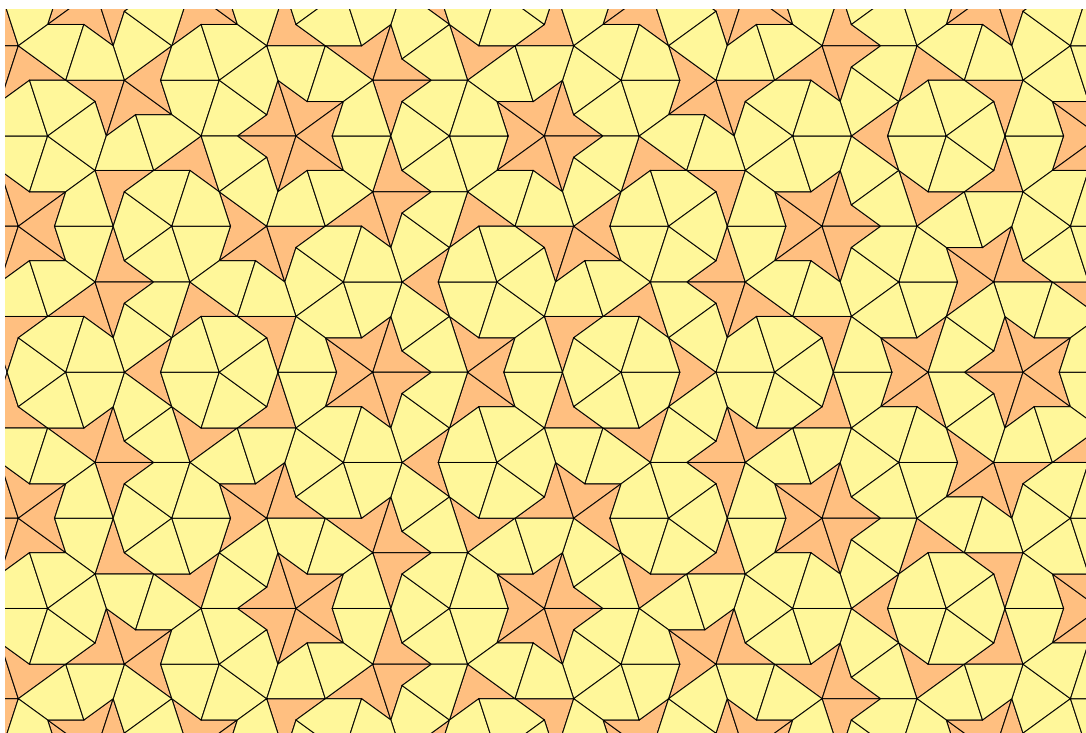


FIGURE 2 – Pavage de Penrose avec l'ensemble P2 de 2 tuiles (*kite and dart*).

Néanmoins, on s’est demandé pendant plusieurs décennies s’il existait une “monotuille apériodique”, autrement dit un ensemble apériodique contenant une seule tuile. Il est intéressant de noter que ce sont des amateurs avertis, comme l’était Ammann à qui on doit beaucoup dans le domaine, qui ont trouvé de telles tuiles et se sont adressés à des chercheurs confirmés spécialistes des pavages apériodiques pour s’assurer que leurs monotuiles étaient bien apériodiques. D’abord, Joan Taylor a trouvé en 2010 un hexagone apériodique, faisant l’objet d’une publication avec Joshua Socolar [ST11]. Bien que ce fut une avancée intéressante, leurs règles d’assemblage dépendent d’un rayon plus grand que la simple adjacence des tuiles, à moins de considérer une version non connexe de leur monotuille. Par conséquent le problème “ein Stein”² restait ouvert... jusqu’à cette année !

À l’automne 2022, David Smith découvre un bon candidat et s’adresse à Craig Kaplan afin d’utiliser ses programmes informatiques, ne pouvant pas continuer à chercher des motifs de plus en plus grands à la main. Les tests informatiques s’avérant très prometteurs, Kaplan contacte alors Chaim Goodman-Strauss pour la preuve mathématique et Joseph Myers pour compléter l’étude. La première monotuille connexe (pour le plan euclidien) appelée “chapeau” (*hat*) est alors dévoilée au public en mars 2023 [Smi+23b]. Pour le chapeau, toutes les isométries sont autorisées, y compris les réflexions ; on dit alors que la tuile n’est pas chirale. La même équipe de chercheurs a toutefois trouvé presque aussitôt des variantes chirales, qu’ils ont appelées “spectres” [Smi+23a].

“Lorsque l’on est fasciné, c’est l’esthétique interne de la chose qui nous fait avancer. Parfois, il s’avère que ce que l’on a fait peut être utilisé pour autre chose, mais parfois pas du tout. C’est l’un des aspects les plus agréables des mathématiques. Lorsque vous avez quelque chose de joli, cela peut être considéré comme une justification en soi. Vous pouvez le publier si vous le souhaitez, sans vous soucier de savoir si quelqu’un d’autre peut en faire usage. Il arrive souvent que les gens fassent les choses pour elles-mêmes, simplement pour le plaisir de les faire, et cela permet de réaliser des progrès qui n’auraient pas pu être faits autrement.”^a [Pen74]

a. “And when one is fascinated, the internal aesthetics of the thing will drive it along. Sometimes it turns out what one has been doing can be used for something else, but sometimes not at all. That is one of the nicest things about mathematics. When you have something pretty, then this, in itself, can be regarded as its justification. You can publish it if you wish, without caring whether anybody else can find a use for it. So often it must be the case that people just do things for their own sake, merely for the enjoyment of doing them, and this enables progress to be made that could not be made otherwise.”

2. de l’allemand *ein Stein* qui signifie “un pavé”, même si on ne peut s’empêcher de penser à Albert Einstein.

Les monotuiles apériodiques trouveront-elles des applications? Leur existence est intéressante en soi, et ce sont leurs propriétés qui détermineront la réponse à cette question. C’est pourquoi ces dernières sont déjà étudiées [BGS23], notamment sous des angles que nous allons voir dans la suite de cette thèse. En effet, nous avons déjà mentionné les principales façons de définir ou construire des pavages apériodiques (notamment quasipériodiques), et celles-ci sont reliées aux quasicristaux.

L’étude algébrique des pavages de Penrose par Nicolaas de Bruijn [Bru81] a joué un rôle important dans la reconnaissance des quasicristaux. Il utilise ce qu’il appelle multi-grille, dont le nombre de directions correspond à la dimension n de l’espace de départ dans un schéma de coupe et projection. Sa méthode a permis à Beenker, dès l’année suivante, de trouver un continuum de pavages dépendant d’un paramètre réel [Bee82]. Parmi les pavages de Beenker, on trouve notamment ceux que l’on connaît surtout comme *pavages d’Ammann-Beenker*, car Ammann les a découverts indépendamment presque en même temps. En général, au lieu de parler de multigrilles, on se place dans le contexte équivalent de coupe et projection³, qui permet de voir un pavage comme la projection de points bien choisis de \mathbb{R}^n sur un sous-espace d -dimensionnel (avec $d = 2$ pour les pavages du plan).

Cette thèse se divise essentiellement en trois volets, qui portent tous sur des ensembles de pavages non périodiques du plan euclidien pouvant être définis par un schéma de coupe et projection, et/ou par un ensemble apériodique de tuiles ayant un lien avec un tel schéma. Elle décrit la construction de nouveaux ensembles ou structures répondant à des caractéristiques précises, permettant parfois de faire ressortir de nouvelles propriétés structurelles. Les différentes façons de définir les pavages sont présentées au chapitre 1, avec les pavages de Penrose en fil rouge, non seulement parce qu’ils permettent d’illustrer toutes les notions mais aussi parce qu’ils sont centraux dans les chapitres 2 et 3.

La problématique de départ de la thèse, issue de la théorie des graphes, se penche en effet sur le cas particulier des “graphes de Penrose”. Posons d’abord le cadre général. Pour un graphe donné $G = (V, E)$, un sous-graphe induit par $U \subseteq V$ contient toutes les arêtes de E qui relient deux sommets de U , et les sous-arbres induits d’un graphe G sont les sous-graphes induits de G qui sont des arbres, c’est-à-dire connexes et acycliques. Pour chacun des sous-arbres induits d’un même graphe G , on peut compter son nombre de feuilles (les sommets de degré 1). Alors le problème *fully leafed induced subtree (FLIS)* peut se formuler comme suit.

3. L’équivalence a été montrée par Gähler et Rhyner [GR86] et de Bruijn [Bru86].

Problème FLIS : Étant donné un graphe G d'ordre n ($n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), quel est le nombre maximal de feuilles, $L_G(i)$, que peut compter un sous-arbre induit de G contenant i sommets, pour $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$?

Répondre à cette question nous donne une fonction L_G , appelée *fonction feuille* de G . Les sous-arbres induits d'ordre i ayant $L_G(i)$ feuilles sont dits *pleinement feuillus*. Blondin Massé *et al.* ont commencé à étudier cette question il y a seulement quelques années [Blo+18 ; BdG18]. Outre le cadre général, ces articles donnent les fonctions feuilles pour quelques familles de graphes finis et pour les sous-arbres induits par la grille carrée (*square lattice*), c'est-à-dire l'ensemble \mathbb{Z}^2 muni de la relation d'adjacence de degré 4 définie par $A_4 = \{(p, p') \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{dist}(p, p') = 1\}$, ainsi que dans la grille cubique, soit son homologue en trois dimensions, et pour les grilles triangulaires et hexagonales. Ces grilles correspondent en fait aux pavages réguliers du plan et de l'espace. Pour tout pavage du plan, le graphe correspondant se définit comme suit : chaque tuile correspond à un sommet du graphe, et la relation d'adjacence dans le graphe correspond exactement à la relation d'adjacence des tuiles dans le pavage. On peut donc étudier la question pour bien d'autres pavages que les grilles régulières.

Ce problème étant NP-difficile, l'algorithme général (*branch and bound*) proposé dans [Blo+18] ne permet de calculer les valeurs que pour des graphes assez petits (quelques dizaines de sommets). Une question similaire, portant sur les arbres de recouvrement à la place des sous-arbres induits [PTX84], a éveillé de l'intérêt en télécommunications [BCL05 ; CLR15]. En outre, le *Frequent subtree mining problem* [Dee+14] et plus généralement la détection de sous-graphes particuliers, notamment en forage (ou fouille) des données, ont trouvé des applications en biologie. D'ailleurs, la forme des sous-arbres induits pleinement feuillus dans la grille cubique suggère que ce pourrait être le cas aussi pour notre problème.

Dans mon mémoire de maîtrise [Por19], je me suis notamment penchée sur le cas des pavages *kites and darts* de Penrose (type P2), dont le graphe dual est illustré Figure 3. Par souci de commodité, j'ai appelé *arbres de Penrose* les sous-arbres induits des graphes d'adjacence de ces pavages. En effet, les pavages de Penrose d'un même type contiennent tous les mêmes motifs finis, de taille arbitrairement grande. Par conséquent, tout sous-arbre induit qui apparaît dans un graphe de Penrose apparaît aussi dans tous les autres (infiniment souvent).

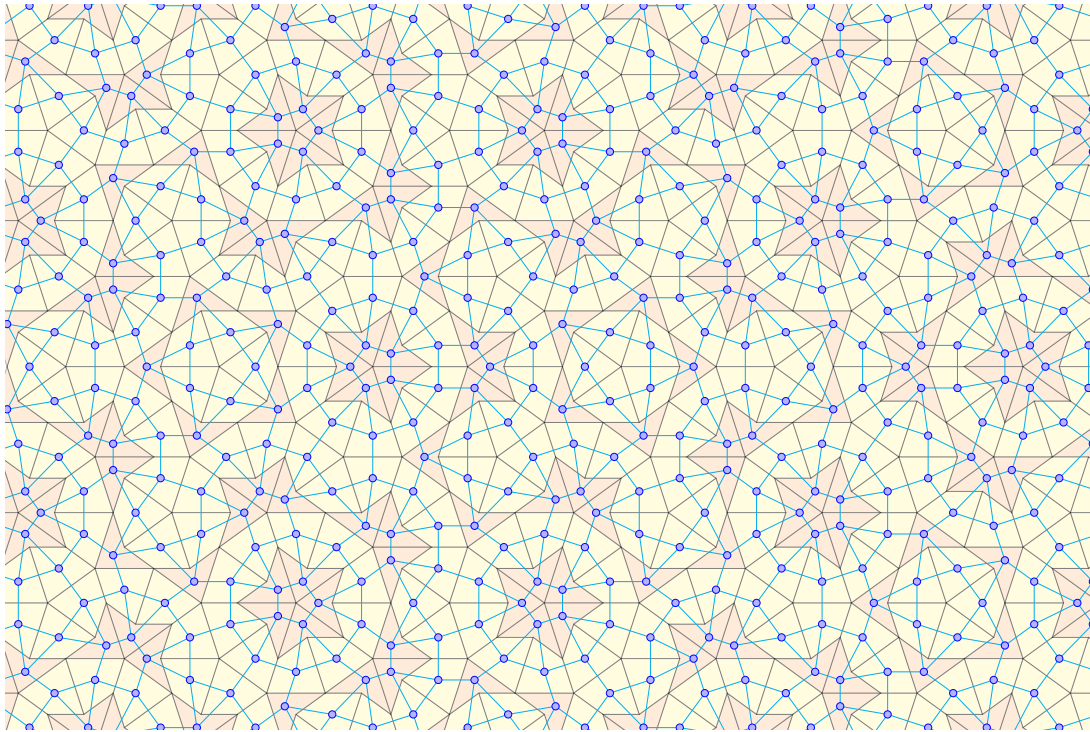


FIGURE 3 – Pavage de Penrose de la Figure 2 et le graphe dual en bleu.

La méthode utilisée pour trouver la fonction feuille commune à tous les pavages *kites and darts* consiste à la majorer en montrant qu'on ne peut pas dépasser un certain nombre de feuilles, et à la minorer en construisant une famille d'arbres qui apparaissent nécessairement dans tout pavage de ce type, jusqu'à égalité des bornes trouvées. D'abord, l'étude de petits motifs a permis assez facilement de trouver une première borne supérieure à la fonction, et j'ai exhibé une première famille d'arbres (des graphes chenilles) basée sur les *vers de Conway* (Fig.4), dans lesquels des *nœuds papillons* longs et courts se succèdent en fonction des espacements des *barres d'Ammann*, formant des facteurs du *mot bi-infini de Fibonacci*.

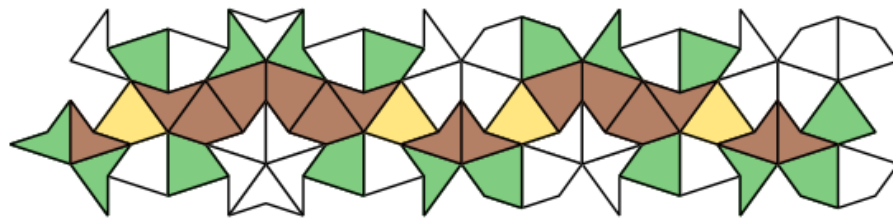


FIGURE 4 – Chenille de Penrose le long d'un *ver de Conway*, avec 17 feuilles pour 36 sommets. Les couleurs des tuiles correspondent à leur degré dans la chenille.

Ce travail, ainsi que des résultats complémentaires trouvés au début de mon doctorat, ont fait l’objet d’une présentation dans une conférence IEEE [PB19] puis d’une publication étendue dans le journal associé [PB20]. Par la suite, la découverte d’un motif de base optimal et l’étude du “graphe d’adjacence” de ses occurrences, qui forme un pavage “HBS”, ont permis de trouver et prouver le résultat :

Théorème 1. *La fonction feuille L_{P_2} des graphes de Penrose est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$L_{P_2}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ L_{P_2}(n - 17) + 8 & \text{si } n \geq 19. \end{cases}$$

La construction permettant d’atteindre ce maximum repose sur les pavages *HBS* (*hexagon-boat-star*), assortis de nouvelles décorations. Leurs substitutions permettent de montrer que les arbres obtenus peuvent être décomposés de façon fractale, en lien aussi avec les barres d’Ammann, pour obtenir des arbres de Penrose pleinement feuillus arbitrairement grands.

Le chapitre 2 présente donc les pavages HBS, que nous avons eu la surprise de “redécouvrir” : bien qu’ils soient *mutuellement localement dérivables (MLD)* des pavages de Penrose, nous ne les connaissions pas. En effet, ils ont jusqu’à présent davantage intéressé les physiciens que les mathématiciens, notamment comme base pour tester différents arrangements d’atomes. Les nouvelles décorations que nous avons trouvées (Figure 5), et les observations qui en découlent, pourraient d’ailleurs renouveler l’intérêt pour ces pavages. Comme il a été difficile de trouver les informations que nous cherchions, et qu’elles étaient de surcroît dispersées, le chapitre 2 commence par un état de l’art avec illustrations des substitutions entre HBS et chacun des trois types de pavages de Penrose, avant de présenter le nouveau contenu. On décrit notamment une φ -décomposition, dont nous avons besoin au chapitre 3.

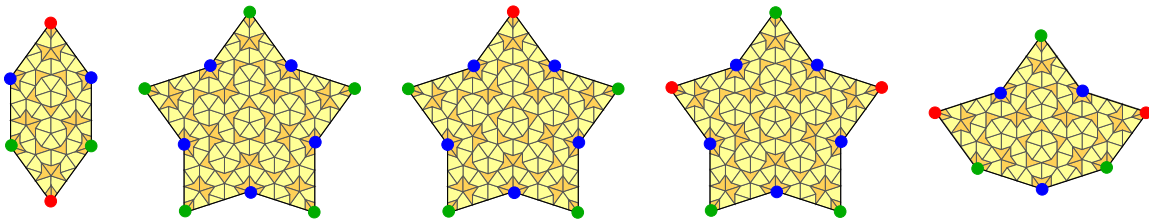


FIGURE 5 – Ensemble de tuiles HBS avec nouvelles décorations.

“Il est en effet mystérieux qu’une chose qui semble attrayante ait plus de chances d’être vraie qu’une chose qui semble laide. Bien sûr, il y a plus que cela, et on peut facilement être induit en erreur, mais il semble y avoir là quelque chose de profond et il serait bon d’en comprendre davantage.”^a [Pen74]

a. “It is a mysterious thing in fact how something which looks attractive may have a better chance of being true than something which looks ugly. Of course there is more to it than that, and one can be easily misled, but there seems to be something profound in this and it would be nice to understand more about it.”

Comme ce sont les *barres d’Ammann* qui ont permis de trouver une première approximation intéressante, nous nous sommes demandé sous quelles conditions d’autres pavages pouvaient en avoir aussi et, le cas échéant, comment les exhiber. Ainsi, la deuxième partie apporte un début de réponse à ces questions, avec des conditions suffisantes.

Les tuiles de certains ensembles apériodiques peuvent être décorées par des segments de sorte que quand les tuiles sont assemblées en respectant les règles d’assemblage, alors chacun de ces segments se prolonge en une droite et, réciproquement, si on fixe comme règle d’assemblage que tout segment soit prolongé en une droite sur les tuiles voisines (placées bord à bord) alors le pavage obtenu est valide et non périodique. Les droites obtenues sont appelées *barres d’Ammann*, car le premier exemple a été trouvé par Robert Ammann pour les pavages de Penrose de type P2. Ce cas est détaillé dans le livre de Grünbaum et Shephard [GS87], qui présentent d’autres exemples connus de *barres d’Ammann*. Outre que les cas sont peu nombreux, ils sont tous substitutifs et sans aucune explication ou construction générale connue.

Les pavages par losanges de Penrose (type P3) ont des *barres d’Ammann* tout comme les pavages P2, et peuvent en outre être obtenus par la méthode de coupe et projection. Cette dernière consiste à projeter certains points d’un espace euclidien de dimension n , formant une *coupe*, sur un sous-espace de dimension d , appelé *pente*. On parle alors de pavages $n \rightarrow d$, et ils sont non périodiques quand la pente est irrationnelle. Les pavages de Penrose sont des $5 \rightarrow 2$ dont la pente est caractérisée par des vecteurs particuliers appelés *sous-périodes*. Quand j’ai commencé à travailler avec Thomas Fernique, il s’interrogeait sur les liens entre substitutions et règles locales pour certaines catégories de pavages. Par ailleurs, il avait montré avec Nicolas Bédaride l’équivalence pour certains pavages par coupe et projection, notamment les $4 \rightarrow 2$ ainsi que les pavages P3, entre l’existence de règles locales et le fait que leur pente soit *caractérisée* (ou *déterminée*) par des sous-périodes [BF15b; BF17].

Or on observe dans le cas de Penrose que celles-ci sont fortement liées aux barres d’Ammann, ce qui nous a permis de conjecturer que les sous-périodes d’une pente pourraient nous permettre de trouver des barres d’Ammann. Thomas Fernique et moi avons donc développé ce que nous avons appelé la *FP-méthode* (*Fine Projection method*), un algorithme permettant de déterminer si des pavages $4 \rightarrow 2$ remplissent des conditions suffisantes simples pour avoir des barres d’Ammann, et le cas échéant de générer un ensemble (fini) de tuiles décorées de façon appropriée. La première condition suffisante est que la pente soit caractérisée par des sous-périodes, la seconde est l’existence d’une *bonne projection* permettant d’aligner correctement les sommets des pavages.

Dans un premier travail, nous avons décrit la FP-méthode et montré que l’ensemble de tuiles décorées produit est nécessairement fini. En outre, nous introduisons notamment un exemple (pavages *cyrénaïques*) vérifiant les conditions suffisantes, qui a l’avantage d’avoir des sous-périodes courtes, et nous avons montré que l’ensemble de tuiles correspondant (Fig.6) est apériodique, c’est-à-dire que tout pavage valide formé avec ses tuiles est non périodique [PF22].

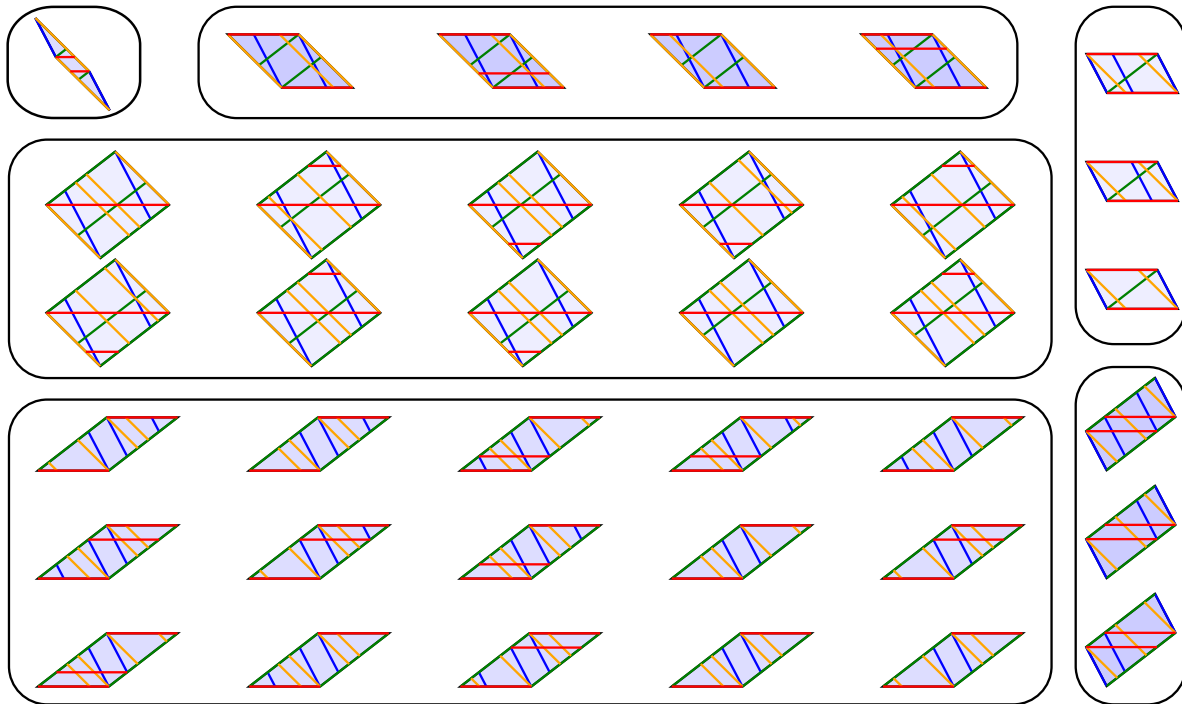


FIGURE 6 – Ensemble \mathcal{C} de 36 prototiles correspondant aux pavages cyrénaïques.

Nous avons ensuite trouvé de nombreuses autres pentes respectant les conditions suffisantes mentionnées (il y en a sans doute une infinité), et montré que notre méthode permet dans tous les cas d’obtenir un ensemble apériodique de tuiles qui donnent des barres d’Ammann aux pavages de la pente correspondante [FP23] (article soumis) :

Théorème 2. *Tout jeu de tuiles obtenu par la FP-méthode à partir d’une pente totalement irrationnelle est apériodique.*

“La plupart des suppositions sont de toute façon susceptibles d’être erronées. Mais la proportion de réponses correctes parmi les possibilités attrayantes semble être beaucoup plus élevée que parmi les possibilités moins attrayantes.”^a [Pen74]

a. “Most guesses are likely to be wrong anyway. But the proportion of correct guesses among the attractive possibilities seems to be far higher than among the less attractive ones.”

Enfin, le chapitre 5 présente une autre construction d’ensemble apériodique, bâtissant un pont entre schéma de coupe et projection et tuiles de Wang. Ce travail fait suite à un article de Sébastien Labbé [Lab21a], où il part de l’ensemble de Jeandel-Rao, composé de tuiles de Wang, et trouve un schéma de coupe et projection associé, ainsi qu’une *partition de Markov* et la *représentation symbolique* associée. Étant donné que la pente de ces pavages dépend de du nombre d’or et qu’il s’agit de $4 \rightarrow 2$ comme les pavages *golden octagonal*, on tente une approche en sens inverse : construire un ensemble de tuiles de Wang à partir des *golden octagonal* et de leur pente.

Comme les tuiles de Wang sont carrées et placées bord à bord, on cherche un découpage des pavages *golden octagonal* dont le graphe est isomorphe à la grille carrée. Tout pavage par coupe et projection, étant constitué de parallélogrammes, est traversé par des bandes de tuiles partageant toutes un bord de même direction. Suivant la méthode utilisée pour les pavages par losanges de Penrose (exercice 11.1.2 dans [GS87]), on découpe un pavage *golden octagonal* “verticalement” (resp. “horizontalement”) en passant au milieu des bandes de tuiles partageant un bord horizontal (resp. vertical).

En utilisant la *fenêtre* du schéma de coupe et projection, on obtient alors une partition d’un carré S en 15 régions, chacune correspondant à l’un des motifs. En outre, on peut identifier dans la fenêtre les actions permettant d’assembler les motifs horizontalement et verticalement. Ceci permet de raffiner la partition, en constatant que certains “dominos” de motifs (vus comme des tuiles) sont en fait interdits : on ne peut pas les obtenir selon la fenêtre, et en effet ils contiennent des *motifs interdits* des pavages *golden octagonal*.

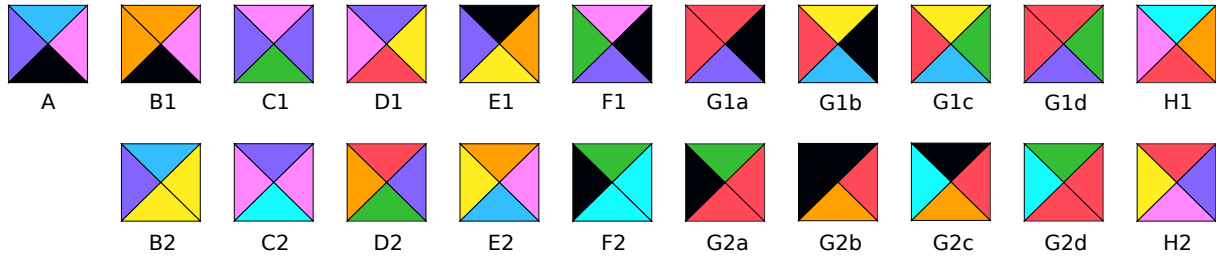


FIGURE 7 – Jeu de tuiles de Wang \mathcal{T}_G correspondant aux pavages *golden octagonal*.

En tenant compte des règles locales pour avoir des versions “augmentées” des motifs, on obtient le jeu de tuiles de Wang de la Figure 7. Le carré S peut alors être vu comme le domaine fondamental d’un tore, et les 21 régions donnent une partition de Markov. Moyennant une transformation affine, les vecteurs de rotation peuvent être unitaires, le premier horizontal et l’autre vertical (Figure 8). En utilisant une bibliothèque Sagemath de Sébastien Labbé, on peut alors retrouver le raffinement de la partition, les 21 tuiles de Wang qui en découlent et vérifier que celles-ci sont toutes utilisées dans les pavages et sont suffisantes pour garantir l’apériodicité.

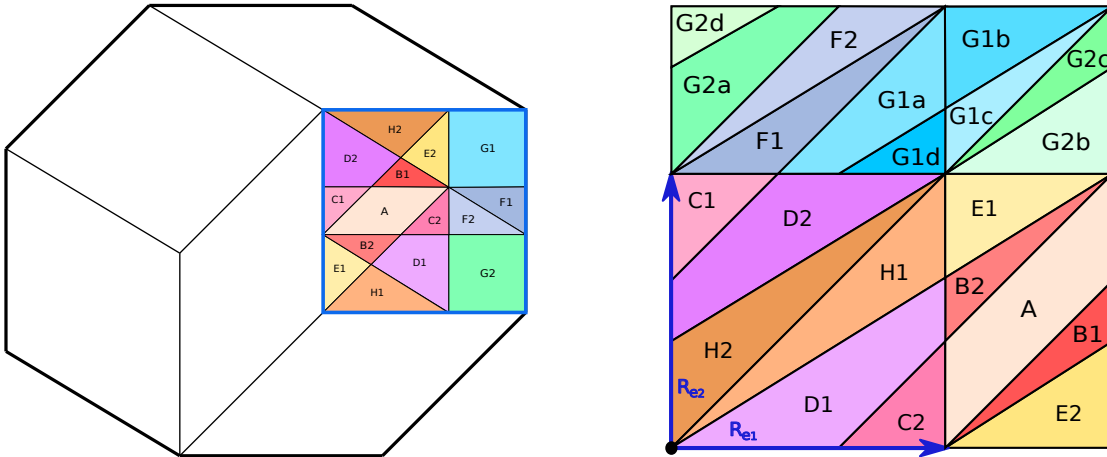


FIGURE 8 – Partition de la fenêtre. À gauche : l’octogone est la fenêtre entière pour les pavages *golden octagonal*, et le carré délimité en bleu S est la région correspondant à une tuile carrée non inclinée. À droite : Partition \mathcal{P}_G obtenue à partir d’une version remodelée du carré S , de sorte que les vecteurs de la \mathbb{Z}^2 -action R_G soient des vecteurs horizontal et vertical unitaires.

On montre enfin les résultats suivants, permettant de déduire que les pavages *golden octagonal* sont substitutifs.

Théorème 3. *Le système dynamique symbolique $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ associé à la partition \mathcal{P}_G, R_G est l’image par un morphisme surjectif (à décalage près) d’un système dynamique substitutif.*

Théorème 4. *Le décalage de Wang Ω_G de l'ensemble \mathcal{T}_G est l'image par un morphisme surjectif (à décalage près) d'un décalage de Wang substitutif.*

Théorème 5. *Le système dynamique symbolique $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ et le décalage de Wang Ω_G sont topologiquement conjugués.*

La suite du document s'articule comme suit. Dans un premier temps (chapitre 1), les notions essentielles à la compréhension de l'ensemble de la thèse sont introduites. Il s'agit principalement de généralités sur les pavages quasipériodiques, avec comme exemple principal les pavages de Penrose, à la fois parce qu'ils réunissent toutes les propriétés qui nous intéressent et parce qu'ils sont nécessaires dès le chapitre suivant. En effet, le deuxième chapitre porte sur les pavages HBS, dérivés des pavages de Penrose et qui nous servent ensuite pour résoudre le problème FLIS pour les graphes de Penrose. Ce problème est résolu dans le chapitre 3, où une famille d'arbres de Penrose pleinement feuillus est construite pour montrer la formule de la fonction feuille. Comme les barres d'Ammann, utiles pour étudier certaines propriétés des pavages de Penrose, semblent avoir un lien avec les sous-périodes, on poursuit au chapitre 4 avec la FP-méthode qui permet d'en trouver pour d'autres pavages ayant des règles locales. Ces dernières garantissent que les méthodes décrites aux chapitres 4 et 5 produisent des ensembles de tuiles finis. Dans ce dernier chapitre, au lieu de décorer les tuiles avec des segments d'Ammann, on décrit la construction d'un jeu de tuiles de Wang ainsi que d'une partition de Markov associée à une rotation sur le tore, à partir de pavages par coupe et projection. Enfin, la conclusion rassemble les perspectives de recherche ouvertes à la suite des travaux précédemment présentés. Comme les termes définis sont nombreux, un index à la fin vient s'ajouter à la liste des abréviations qui se trouve page xii.

Chapitre 1

Pavages quasipériodiques : méthodes de définition et caractérisations

Les notions présentées dans ce chapitre sont générales et peuvent donc être retrouvées dans plusieurs livres. Nous n'en mentionnons ici que quatre. Le premier ouvrage de référence sur les pavages du plan euclidien, qui garde toute sa pertinence, est le livre *Tilings and Patterns* de Grünbaum et Shephard [GS87]. Les ajouts apportés à la seconde édition [GS16] se limitent à quelques pistes de lectures plus récentes, à commencer par l'ouvrage de Senechal [Sen95] offrant une première approche des liens entre la géométrie et les quasicristaux. Par la suite, Baake et Grimm [BG13] ont présenté des évolutions plus récentes dans l'étude des pavages apériodiques. Enfin, *The Tiling Book* publié par l'AMS [Ada22] donne une bonne introduction au sujet en reprenant les principaux éléments de [GS16].

1.1 Symétries et apériodicité

Un **pavage** (*tiling*) de \mathbb{R}^d est une famille dénombrable d'ensembles fermés $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^d appelés **tuiles** (*tiles*), qui est à la fois

- un **empilement** (*packing*) : $\forall i \neq j, \overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset$ et
- un **recouvrement** (*covering*) : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}^d$.

Comme très souvent dans la littérature, on se restreint aux cas où les tuiles sont des disques topologiques (donc connexes, sans trou et bornées). Cette restriction n'entre pas dans la définition générale des pavages mais se trouve dans celle d'ensemble de tuiles. On appelle **ensemble de tuiles** ou **jeu de tuiles** (*tileset* ou *protoset*) un ensemble de **prototuiles** (*prototiles*), représentant chacune une classe d'équivalence de tuiles, qui sont le plus souvent considérées à isométrie près mais parfois à translation près – on est toujours

dans le second cas quand il s’agit de tuiles de Wang. On dit qu’un ensemble de tuiles **pave le plan** (*tiles the plane*) s’il existe au moins un pavage du plan composé de copies (ou translatés) des prototiles qui le composent. Un jeu de tuiles peut ne pas paver le plan. De manière générale, les prototiles peuvent avoir n’importe quelle forme (à condition d’être des disques topologiques), et on peut leur ajouter des **règles d’assemblage**, notamment par le biais de décorations qui entrent en compte dans les classes d’équivalence : si deux tuiles ont la même forme mais des décorations différentes, alors les prototiles associées sont distinctes. Par exemple, on peut tracer des lignes sur les prototiles et imposer qu’on ne puisse assembler les tuiles que si chaque ligne se prolonge sur la tuile adjacente.

Puisque les intérieurs des tuiles sont deux à deux disjoints, toute intersection de tuiles est de dimension au plus $d - 1$. Dans le cas des pavages du plan ($d = 2$), une intersection de tuiles d’un pavage est appelée **arête** (*edge*) si elle est de dimension 1, et **sommet** (*vertex*) si elle est de dimension 0. Comme en outre les tuiles sont des disques topologiques fermés, toute arête est l’intersection d’exactly deux tuiles, et tout sommet l’intersection d’au moins trois tuiles. Dans cette thèse, chaque arête est un segment ou une union connexe de segments, et chaque sommet est un point.

Un **mot biinfini** (*bi-infinite word*) sur un **alphabet** \mathcal{A} est une suite d’éléments de \mathcal{A} indexée sur \mathbb{Z} . On la note $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ou $x = \dots, x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots$ [LM95]. Un mot biinfini peut être vu comme un pavage de \mathbb{R} (cas $d = 1$) dont les tuiles sont des intervalles fermés, les sommets sont les intersections non vides d’intervalles, et une même lettre est attribuée à tous les intervalles de même longueur – en considérant comme “égaux” tous les pavages de \mathbb{R} qui donnent la même suite de lettres. Si les longueurs sont les normes d’un nombre fini de vecteurs distincts v_0, \dots, v_{n-1} colinéaires et de même sens, cela correspond à un **mot n -aire** (*n -ary word*). Ainsi par exemple pour un **mot binaire** (*binary word*), c’est-à-dire défini sur un alphabet de deux lettres $\{a, b\}$, les intervalles n’ont que 2 longueurs différentes $\ell_a = \|v_0\|$ et $\ell_b = \|v_1\|$.

Cette façon de représenter les mots permet de voir le lien avec les pavages étudiés dans cette thèse, qui sont des pavages du plan euclidien (\mathbb{R}^2) constitués de polygones. À l’exception de certains pavages de Penrose et dérivés, leurs tuiles sont même plus précisément des parallélogrammes, pouvant être définis comme suit. Des vecteurs v_0, \dots, v_{n-1} ($n \geq 3$) de \mathbb{R}^2 non colinéaires deux à deux définissent $\binom{n}{2}$ prototiles $T_{ij} := \{\lambda v_i + \mu v_j \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ pour $0 \leq i < j \leq n - 1$. Alors les tuiles d’un pavage par parallélogrammes sont des prototiles translattées, vérifiant la **condition bord à bord** (*edge to edge condition*) : l’intersection de deux tuiles est soit vide, soit un sommet, soit une arête entière. Lorsque les v_i ont tous la même longueur, on obtient des pavages par losanges (*rhombus tilings*).

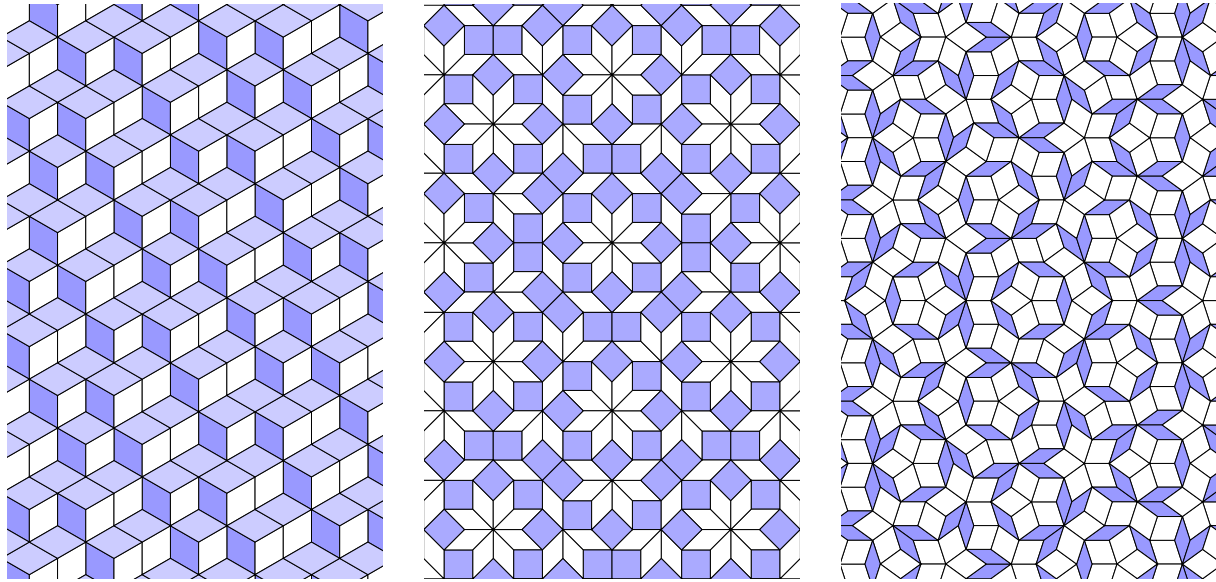


FIGURE 1.1 – Exemples de pavages par losanges. À gauche : Pavage de Rauzy à partir duquel on peut visualiser le relevé dans \mathbb{R}^3 (les côtés des tuiles sont définis par 3 vecteurs). Au centre : Pavage d’Ammann-Beenker, dont les côtés sont définis par $n = 4$ vecteurs, et qui est donc composé de $\binom{4}{2} = 6$ prototiles (à translation près), ou 2 à isométrie près. À droite : Pavage de Penrose, défini par $n = 5$ vecteurs et composé de $\binom{5}{2} = 10$ prototiles à translation près, ou 2 à isométrie près.

Une **symétrie** d’un pavage \mathcal{T} est une isométrie du plan qui envoie toute tuile de \mathcal{T} sur une tuile congruente (copie de la même prototuille). On note $S(\mathcal{T})$ le groupe de symétrie du pavage. Tout pavage compte au moins une symétrie, l’identité, pour laquelle toute tuile est sa propre image. Un **pavage périodique** (*periodic tiling*) compte au moins une translation parmi ses symétries. Dans le cas contraire, c’est un **pavage non périodique** (*non-periodic tiling*). Un jeu de tuiles est **apériodique** (*aperiodic tileset*) s’il pave le plan mais n’admet aucun pavage périodique.

En l’absence de translation, des **symétries rotationnelles** (*rotational symmetries*) sont toutefois possibles, c’est-à-dire que le groupe de symétrie du pavage est diédral. Par exemple, certains pavages de Penrose ont pour groupe de symétrie D_5 : toute rotation d’angle $2\pi j/5$ pour $j = 0, 1, \dots, 4$, autour de leur centre de rotation envoie le pavage sur lui-même, et 5 axes de symétries se coupent en ce point. En outre, tout pavage de Penrose contient des motifs arbitrairement grands avec symétrie D_5 , autrement appelée **symétrie pentagonale** (*pentagonal symmetry*). La Figure 1.1 l’illustre bien, avec pour Penrose (à droite) plusieurs motifs présentant une symétrie pentagonale dont une sorte de “fleur”

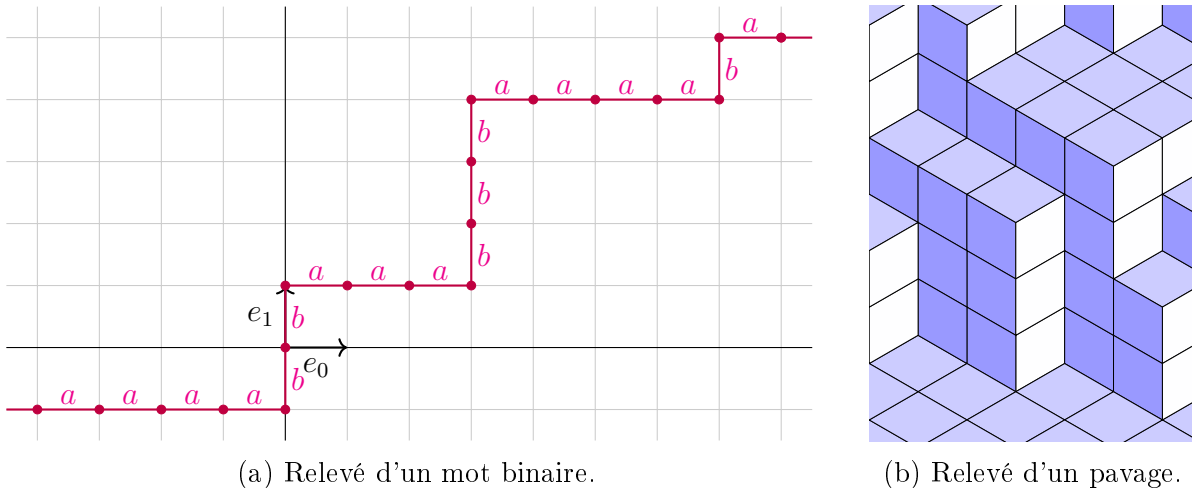


FIGURE 1.2 – Exemples de relevés. (a) Relevé du mot binaire $\dots aaaabbaaabbbbaaaba \dots$ en plaçant arbitrairement l'origine entre les deux premiers b . (b) Relevé d'un pavage constitué de 3 prototuites formées par les vecteurs $\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right), \left(\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6}\right), (0, -1)$.

s'étendant sur la largeur de l'image autour du point central, et pour Ammann-Beenker (au milieu) une symétrie octogonale. Les quasicristaux sont souvent classés en fonction du groupe diédral associé. On en trouve notamment avec des symétries pentagonale, octogonale, décagonale et dodécagonale [Ste04]. De nombreux mots biinfinis et pavages par parallélogrammes, comme ceux de la Figure 1.1, peuvent être obtenus par coupe et projection.

1.2 Méthode par coupe et projection

Soient e_0, \dots, e_{n-1} les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . Ces vecteurs définissent l'hypercube unité de \mathbb{Z}^n . Partant d'un point entier, tout sous-ensemble de k de ces vecteurs définit ce qu'on appelle une **facette k -dimensionnelle de \mathbb{Z}^n** , c'est-à-dire une facette k -dimensionnelle de \mathbb{R}^n dont les sommets sont dans \mathbb{Z}^n . Un mot n -aire peut être relevé en une courbe en escalier de dimension 1 dans \mathbb{R}^n , qui est unique au choix d'un sommet initial près, la courbe étant construite de sorte à former une ligne continue constituée de facettes 1-dimensionnelles de \mathbb{Z}^n . Un sommet arbitraire est d'abord envoyé sur l'origine, puis chaque lettre de type v_i est envoyée sur la face 1-dimensionnelle (arête) de \mathbb{Z}^n engendrée par e_i , de sorte que les images de deux lettres successives de types v_i et v_j s'intersectant en un point P sont deux faces adjacentes de types e_i et e_j s'intersectant en l'image de P . La Figure 1.2a illustre le relevé d'un mot binaire.

Levitov [Lev88] a généralisé ce procédé en dimension supérieure : un pavage par des parallélogrammes peut être **relevé** (*lifted*) dans \mathbb{R}^n en une **surface en escalier** (*stepped surface*) de dimension 2 dans \mathbb{R}^n , qui est unique au choix d'un sommet initial près. Un sommet arbitraire est d'abord envoyé sur l'origine, puis chaque tuile de type T_{ij} est envoyée sur la face 2-dimensionnelle de l'hypercube unité de \mathbb{Z}^n engendrée par e_i et e_j , de sorte que deux tuiles adjacentes le long d'une arête v_i ont pour images deux faces adjacentes partageant une arête e_i . Ceci est plus intuitif pour les pavages $3 \rightarrow 2$ (cas $n = 3$) qui sont naturellement visualisés en 3 dimensions (Fig. 1.2b) : on a l'impression de voir du dessus une surface en escalier dans \mathbb{R}^3 . Le principe est le même pour n plus grand, bien qu'il soit difficile à visualiser.

Si un pavage par parallélogrammes peut être relevé de sorte à tenir dans un **tube** (*tube*) $E + [0, t]^n$ où $E \subset \mathbb{R}^n$ est un plan (de dimension 2) et $t \geq 1$, alors ce pavage est dit **planaire**. Dans ce cas, l'**épaisseur** (*thickness*) du pavage est le plus petit t approprié, et le plan E correspondant est appelé **pente** (*slope*) du pavage (qui est unique à translation près). Un pavage planaire par parallélogrammes peut donc être vu comme une approximation de sa pente, d'autant meilleure que l'épaisseur est petite. On parle de **planarité forte** (*strong planarity*) si $t = 1$ et **faible** (*weak*) sinon. Les pavages fortement plans par parallélogrammes peuvent également être obtenus par **coupe et projection** canonique (*cut and project method*). Pour cela, comme illustré à la figure 1.3,

1. on considère un plan affine $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension d tel que $\partial(E + [0, 1]^n) \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, où ∂A désigne le bord de A ,
2. on appelle **coupe** (*cut*) C l'ensemble des facettes d -dimensionnelles de \mathbb{Z}^n qui sont incluses dans $E + [0, 1]^n$,
3. on choisit un sous-espace F tel que $E \oplus F = \mathbb{R}^n$ et que la **projection** $\pi : C \rightarrow E$ de C sur E parallèlement à F soit injective, pour que $\pi(C)$ soit un pavage de \mathbb{R}^d .

Une telle projection est dite **valide**, et le pavage est alors fortement planaire de pente E . De tels pavages sont appelés **pavages par coupe et projection** (*cut and project tilings*), **pavages canoniques** (*canonical tilings*) ou de façon plus imagée **pavages $n \rightarrow d$** ($n \rightarrow d$ *tilings*). On note π^\perp la projection sur F parallèlement à E . Alors la **fenêtre** (*window*) $W := \pi^\perp(E + [0, 1]^n)$ est l'image du tube par π^\perp . C'est un compact de \mathbb{R}^n . Dans le cas où $d = 2$, à réindication près on a $\pi(e_i) = v_i$ pour tout $i = 0, \dots, n - 1$. C'est-à-dire que les côtés des parallélogrammes du pavage sont les projetés des vecteurs de la base canonique. La projection orthogonale sur E (vu comme \mathbb{R}^d) est connue pour être valide [Har04] mais toutes les projections ne conviennent pas : en particulier, les images de plusieurs facettes de C peuvent se superposer (voir Figure 1.4).

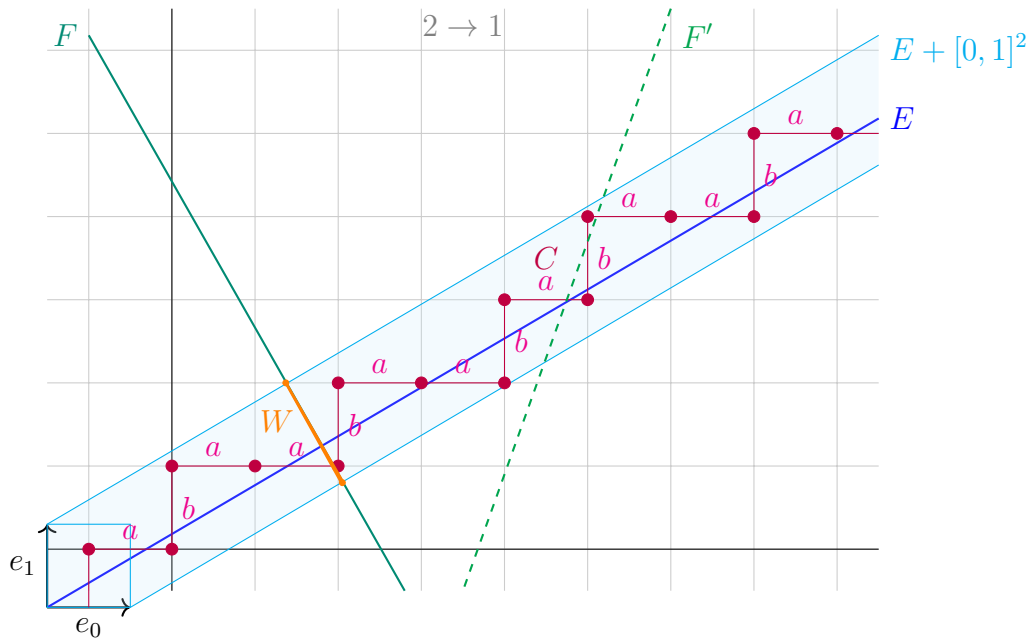


FIGURE 1.3 – Illustration d’une coupe et projection avec $n = 2$ et $d = 1$. Les facettes 1-dimensionnelles de \mathbb{Z}^2 sont les segments unités joignant deux points entiers de \mathbb{R}^n , respectivement étiquetés a et b , qui tiennent entièrement dans le tube $E + [0, 1]^2$. La projection parallèlement à F (ici la projection orthogonale) est valide mais celle parallèlement à F' ne l’est pas, car elle envoie plusieurs points de la coupe sur la même image.

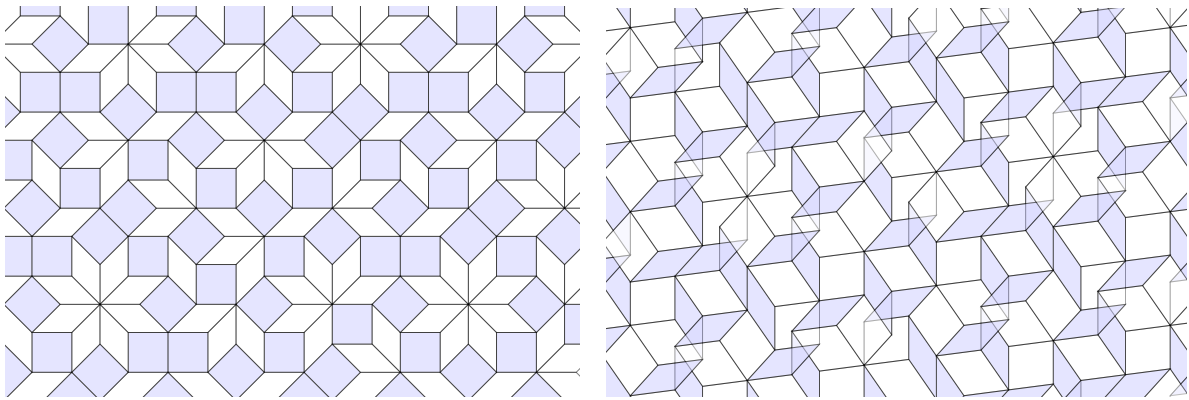


FIGURE 1.4 – Pavage *golden octagonal* avec la projection sur les racines de l’unité, qui est valide (à gauche) et une projection non valide sur la même pente (à droite). Les couleurs des tuiles sont les mêmes en fonction des $\pi(e_i)$, avec une opacité de 50% dans les deux images.

Nous ne considérons dans la suite que le cas d'une pente E de dimension 2 totalement irrationnelle, c'est-à-dire qui ne contient aucune droite rationnelle. Les pavages de pente E sont alors tous apériodiques, et l'ensemble dénombrable $\pi^\perp(\mathbb{Z}^n \cap (E + [0, 1]^n))$ des images par π^\perp des points entiers du tube, i.e. ceux qui se projettent sur les sommets du pavage, est dense dans la fenêtre W .

La figure 1.1 illustre les notions ci-dessus à l'aide de trois exemples bien connus. Les **pavages de Rauzy** (*Rauzy tilings*) sont des $3 \rightarrow 2$ dont la pente E_R est engendrée par

$$\vec{u} = (\alpha - 1, -1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (\alpha^2 - \alpha - 1, 0, -1),$$

où $\alpha \approx 1.89$ est la seule racine réelle de $x^3 - x^2 - x - 1$.

Les **pavages d'Ammann-Beenker** (*Ammann-Beenker tilings*), composés de tuiles de l'ensemble A5 dans la terminologie de Grünbaum et Shephard [GS87], sont les pavages $4 \rightarrow 2$ avec une pente E_A engendrée par

$$\vec{u} = (\sqrt{2}, 1, 0, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (0, 1, \sqrt{2}, 1).$$

Les **pavages de Penrose par losanges (P3)** (*Penrose rhombus tilings*) sont des pavages $5 \rightarrow 2$ de pente E_P engendrée par

$$\vec{u} = (\varphi, 0, -\varphi, -1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-1, 1, \varphi, 0, -\varphi),$$

où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. Les **pavages de Penrose** (*Penrose tilings*) au sens strict, définis par Roger Penrose dans [Pen78] (ensemble P3 dans la terminologie de [GS87]), correspondent au cas où E_P contient un point dont la somme des coordonnées est un entier. L'ensemble des pavages ayant la même pente (indépendamment de cette condition), est l'ensemble des **pavages de Penrose généralisés** (*generalized Penrose tilings*) [PK87].

Quant aux **pavages golden octagonal**, introduits par Bédaride et Fernique [BF15b] et déjà vus à la Figure 1.4, ce sont des $4 \rightarrow 2$ dont la pente E_G est engendrée par

$$\vec{u} = (1, \varphi, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (0, 1, \varphi, 1).$$

En utilisant la même projection (sur les racines de l'unité), les tuiles ont les mêmes formes que celles d'Ammann-Beenker mais elles ne s'assemblent pas de la même manière.

1.3 Règles locales

Les règles d'assemblage des tuiles induisent des contraintes plus ou moins fortes sur les pavages. Dans certains cas, des observations locales peuvent informer sur la structure à longue distance (*long range order*). Les règles locales pour les pavages peuvent être définies de plusieurs façons, qui ne sont pas équivalentes. Dans le cas des pavages par coupe et projection, nous définissons également des règles locales pour une pente.

Tout d'abord, les règles locales faibles pour un pavage T peuvent être définies comme dans [BF15b]. Un **motif** (*patch*) est un sous-ensemble fini et connexe de tuiles de T . Suivant [Lev88], un **r -motif** (*r -map* ou *r -patch*) de T est un motif formé par toutes les tuiles de T qui intersectent un disque fermé de rayon $r \geq 0$. Le **r -atlas** de T , noté $T(r)$, est alors l'ensemble de tous les r -motifs de T (à isométrie près). Dans le cas d'un pavage par coupe et projection, c'est un ensemble fini : en effet, le nombre de prototuiles est fini, donc il n'y a qu'un nombre fini de configurations permettant de recouvrir un disque de rayon r fixé. On dit qu'un pavage canonique P de pente E admet des **règles locales (faibles)** (*(weak) local rules*) s'il existe $r \geq 0$ et $t \geq 1$, appelés respectivement **rayon** (*radius*) et **épaisseur** (*thickness*), tels que tout pavage $n \rightarrow d$ dont le r -atlas est contenu dans $P(r)$ est planaire de pente E et d'épaisseur au plus t . Par extension, on dit alors que la pente E admet des règles locales, et que la pente de P est caractérisée par ses motifs d'une taille donnée. On parle alors de **règles locales fortes** (*strong local rules*) si $t = 1$.

Les pavages de Penrose (stricts) ont des règles locales fortes : ils sont caractérisés par les motifs du 1-atlas, si les côtés des tuiles ont une longueur de 1 [FL22]. C'est aussi le cas des pavages *golden octagonal* (voir [BF15b], p.12) mais pas des pavages d'Ammann-Beenker [BF15a]. Un début de généralisation a été apporté par [Lev88 ; Le97 ; BF15b ; BF17], permettant de déterminer si des pavages par coupe et projection admettent des règles locales ou non en fonction de leur pente (voir chapitre 4).

Les barres d'Ammann constituent une autre façon de définir des règles locales. Nous appelons **segments d'Ammann** (*Ammann segments*) les décorations sous forme de segments dont les extrémités se trouvent sur les bords des tuiles, de telle sorte que lors du pavage avec ces tuiles, chaque segment doit être prolongé sur les tuiles adjacentes pour former une droite (voir Figure 1.5). On dit qu'une pente E admet des **règles locales d'Ammann** (*Ammann local rules*) s'il existe un ensemble fini de prototuiles décorées de

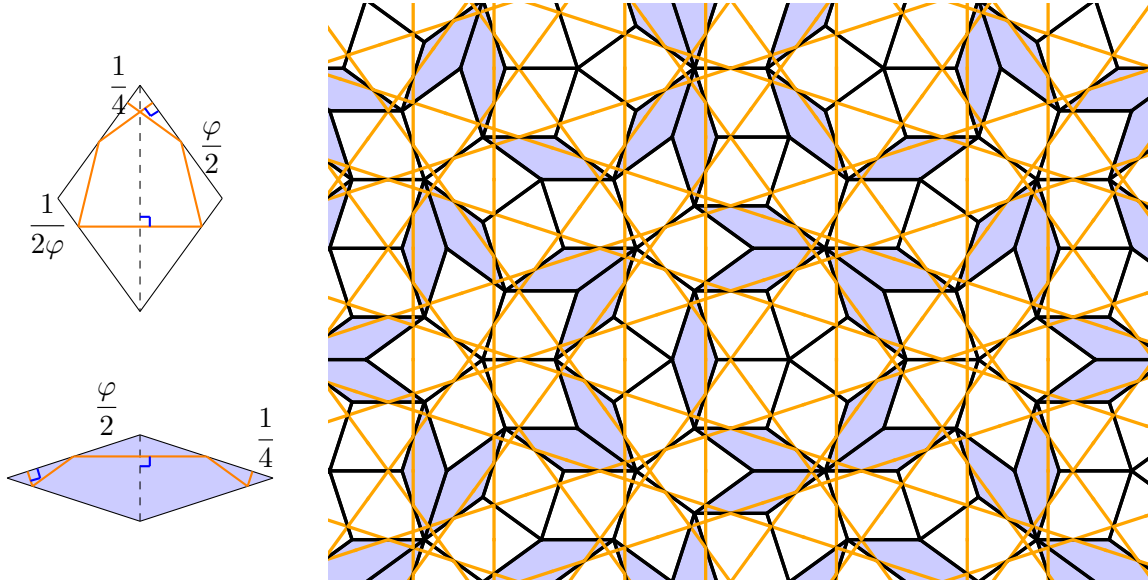


FIGURE 1.5 – À gauche : losanges de Penrose avec segments d’Ammann (en orange). À droite : barres d’Ammann sur un pavage de Penrose.

segments d’Ammann telles que tout pavage avec ces tuiles est planaire de pente E . En particulier, aucun pavage périodique du plan n’est possible avec ces tuiles si E est irrationnel. Par exemple, le marquage des tuiles de Penrose produisant des barres d’Ammann est montré dans la figure 1.5, ainsi qu’un motif valide où chaque segment est correctement prolongé sur les tuiles adjacentes. Notons cependant que ce marquage ne permet pas d’obtenir tous les pavages de pente E_P (pavages de Penrose généralisés), puisqu’il est équivalent aux règles locales fortes pour les pavages de Penrose au sens strict. Ces derniers ont aussi la particularité d’être substitutifs, comme nous allons le voir.

1.4 Pavages de Penrose et dérivabilité locale

Les trois types de pavages de Penrose, appelés P1, P2 et P3 dans [GS87], sont d’abord parus dans des articles de Roger Penrose lui-même [Pen74 ; Pen78 ; Pen79] ainsi que dans des articles de vulgarisation de Martin Gardner [Gar77 ; Gar88]. Les jeux de tuiles correspondants sont reproduits dans la Figure 1.6. Ils sont tous les trois apériodiques et

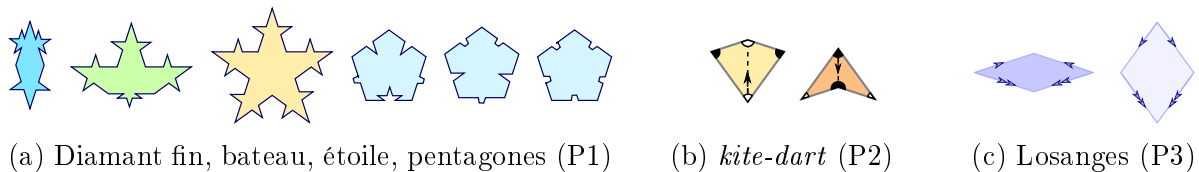


FIGURE 1.6 – Jeux de tuiles de Penrose.

permettent de composer une infinité non dénombrable de pavages. Les tuiles doivent être disposées selon des règles d'assemblage spécifiques, par exemple en utilisant des encoches et des bosses pour assembler les tuiles comme des pièces de puzzle (tuiles P1, Fig. 1.6a) ou des décorations sur les tuiles qui peuvent être de différentes sortes. Pour P2 (Fig. 1.6b), on utilise deux couleurs qui doivent correspondre sur les coins des cerfs-volants (*kites*) et des fléchettes (*darts*), formant un disque noir ou blanc à chaque sommet du pavage. Comme un tel marquage ne serait pas suffisant pour les tuiles P3, on utilise des flèches sur les bords (Fig. 1.6c), qui doivent se superposer exactement (même nombre de flèches, dans la même direction). Ce marquage est également le plus pratique en vue du chapitre suivant sur les pavages HBS.

Les flèches sur les diagonales des cerfs-volants et fléchettes permettent de définir les **triangles de Robinson** (*Robinson triangles*) : l'un est un demi cerf-volant et l'autre une demi fléchette, en conservant les couleurs de sommets et la flèche. Les côtés des losanges ont une longueur de 1, qui est également la longueur de la diagonale du cerf-volant. Par conséquent, pour les cerfs-volants et les fléchettes, le côté le plus long a une longueur de 1 et le côté le plus court a une longueur de φ^{-1} , où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. Avec les règles d'assemblage de P2, il n'existe que sept **configurations de sommets** (*vertex configurations*) possibles, c'est-à-dire sept façons de disposer les tuiles autour d'un sommet du pavage. Ces configurations sont présentées dans la figure 1.7.

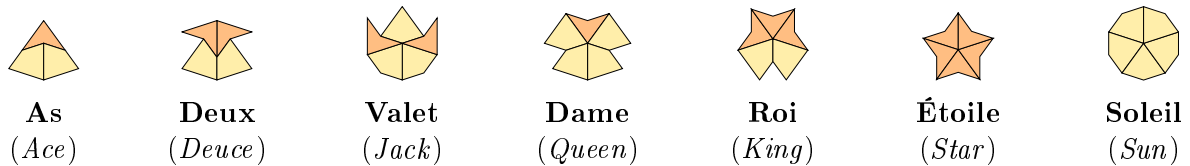


FIGURE 1.7 – Les sept configurations de sommets dans un pavage P2 de Penrose.

Chaque configuration de sommet peut forcer tout un ensemble de tuiles qui est appelé **empire** (*empire*). Cela signifie qu'à chaque fois qu'une configuration de sommet donnée apparaît dans un pavage du même type, toutes les tuiles formant l'empire sont placées exactement de la même manière par rapport à ce sommet. C'est John H. Conway qui a le premier observé les empires dans les pavages P2 [GS87], que nous reproduisons en partie ici (Figure 1.8). Comme plusieurs empires sont non connexes et peuvent même contenir une infinité de tuiles, nous ne représentons ici que la plus grande composante connexe, qui inclut la configuration de sommets. Nous l'appelons **royaume** (*kingdom*) (ou *empire local*).

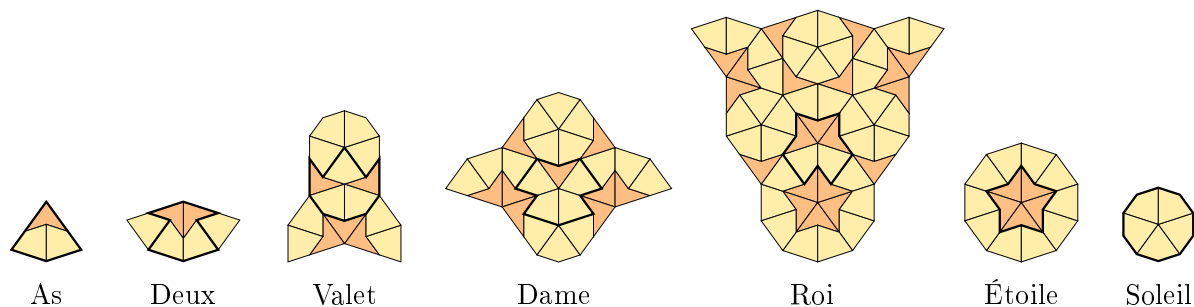


FIGURE 1.8 – Les sept royaumes dans un pavage P2 de Penrose.

En outre, une configuration de sommets ou un royaume est un cas particulier de motif. Tous les pavages de Penrose d'un type donné sont **localement isomorphes** (*locally isomorphic*), c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la même **classe d'isomorphisme local** (*local isomorphism class*), ou *classe LI*, ce qui signifie que tout motif présent dans l'un d'eux apparaît également dans tous les autres. De plus, ils sont *localement caractérisables* (ils ont des règles locales). Par exemple, les tuiles P2 sont caractérisées par leur 0-atlas (l'ensemble des configurations de sommets), et les tuiles P3 par leur 1-atlas [FL22]. Ces notions et les suivantes sont plus détaillées dans [GBS94 ; Baa99 ; Rob04 ; BG13].

Soient T_1 et T_2 deux pavages. S'il existe un rayon fini fixé r tel que lorsque les r -motifs de T_1 centrés en deux points p et q sont égaux à translation $t = p - q$ près, les configurations des sommets autour de p et q dans T_2 sont également égales à translation t près, alors on dit que T_2 est **localement dérivable** (*locally derivable*) de T_1 , et on appelle **recodage local** (*local mapping*) l'application qui permet de transformer T_1 en T_2 à partir des r -motifs. Si T_1 est aussi localement dérivable de T_2 , alors T_1 et T_2 sont **mutuellement localement dérivables** (*mutually locally derivable*), ce qu'on abrège en **MLD**. Ceci est valable pour les pavages de Penrose de différentes classes LI. Puisqu'ils partagent tous les mêmes r -motifs, tout pavage d'une classe LI de Penrose est MLD avec un pavage d'une autre classe LI de Penrose, et il y a même une bijection entre ces deux classes – ce qui n'est généralement pas le cas. Les tuiles de Penrose sont donc toutes dans la même classe MLD, avec les triangles de Robinson et quelques autres classes LI dont les pavages HBS que nous verrons au chapitre 2.

Certains cas de dérivabilité locale sont assez faciles à voir. Par exemple, lorsqu'un pavage T_1 est une **composition** (*composition*) d'un pavage T_2 , c'est-à-dire que chaque tuile de T_1 est une union de tuiles de T_2 (le motif étant le même pour toutes les copies d'une même prototuile). Dans ce cas, T_2 est une **décomposition** (*decomposition*) de

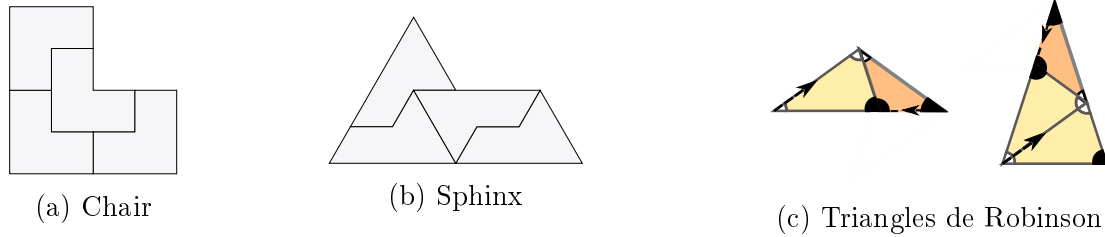


FIGURE 1.9 – Exemples de décompositions parfaites.

T_1 . Les décompositions de la Figure 1.9 donnent toutes des pavages non périodiques. Ces notions peuvent être assouplies en version **imparfaite**, où chaque tuile de T_1 est recouverte par une union de tuiles de T_2 , comme illustré à la Figure 1.10 pour les pavages P2 et P3 de Penrose. Pour les pavages de Penrose, on dispose de règles de composition et de décomposition imparfaites pour transformer un pavage d'un type donné en un autre pavage de la même classe LI ou d'une autre. On voit avec la Figure 1.10 les décompositions permettant de transformer P2 en P3 ou l'inverse sont basées sur les triangles de Robinson.

Une **α -décomposition** est une décomposition dans laquelle les nouvelles tuiles ont les mêmes formes que les tuiles d'origine mais à l'échelle $1 : \alpha$. Une **inflation** (*inflation*) est une décomposition suivie d'une homothétie, de sorte que les nouvelles tuiles ont les mêmes formes et tailles que les tuiles d'origine, tout en formant un motif plus grand. Pour la classe MLD de Penrose, l'homothétie est de rapport $\varphi : 1$, donc l'inflation est une φ -décomposition. Si un pavage est obtenu à partir d'un motif initial en faisant des inflations successives, alors ce pavage limite est un **pavage substitutif** (*substitutive tiling*).

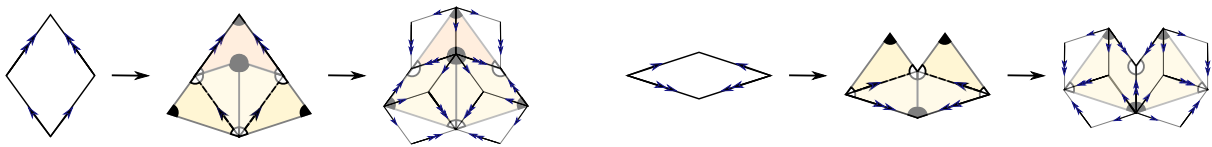


FIGURE 1.10 – Décomposition des losanges en cerfs-volants et fléchettes (première étape), puis en losanges plus petits.

Chapitre 2

Pavages HBS : état de l'art et renouveau

Ce chapitre reprend le contenu d'un article récemment soumis [Por23]. Comme mentionné en introduction, c'est en travaillant sur le problème faisant l'objet du chapitre 3 que nous avons redécouvert les pavages HBS, avec de nouvelles propriétés. La figure 2.1 montre les formes en question, avec les décorations appropriées pour obtenir un ensemble de pavages de la classe MLD de Penrose. Bien que cet ensemble de tuiles puisse être

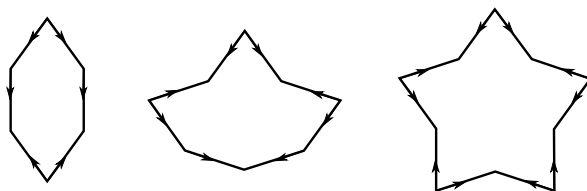


FIGURE 2.1 – Tuiles HBS : hexagone, bateau et étoile (*Hexagon-Boat-Star*).

obtenu plus simplement à partir de chaque type de pavages de Penrose, c'est en reliant les configurations de sommet Étoile dans les pavages P2 que nous avons vu ces formes apparaître, avec toujours les mêmes décorations intérieures (cerfs-volants et fléchettes) dans une même forme. En distinguant trois types d'Étoiles en fonction de leur voisinage, trois étiquettes différentes pour les sommets déclinent l'étoile en trois versions légèrement différentes tout en ne gardant qu'une version de l'hexagone et du bateau (Figure 2.2). Puisque nous avons obtenu des étoiles en reliant des étoiles, nous avons appelé cet ensemble *Star tileset* avant d'apprendre l'existence des tuiles HBS, bien qu'elles aient été remarquées dès 1986 dans un article de Henley [Hen86]. Nous avons gardé le nom pour le jeu de tuile distinguant les trois types d'étoiles (sommets étiquetés), même si cet ensemble produit les mêmes pavages que l'ensemble HBS avec les flèches comme décorations.

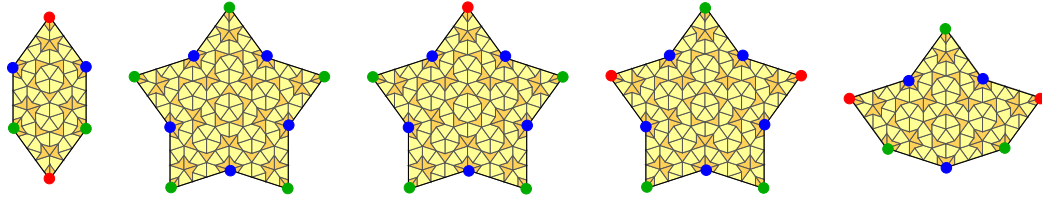


FIGURE 2.2 – Jeu de tuiles Star, décoré par de petits cerfs-volants et fléchettes.

D'abord appelées "star Σ , diamond Δ and hexagon H " par Olamy et Kléman [OK89], les prototiles de ce qu'ils ont appelé le "pavage dense de Henley" apparaissent dans la liste des pavages aperiodiques de Wikipedia ("list of aperiodic sets of tiles") comme "Starfish, ivy leaf and hex tiles", qui sont les noms donnés aux prototiles par Lord [Lor91]. Dans les années qui ont suivi, le nom HBS (*Hexagon-Boat-Star*) leur a été donné et il est depuis lors couramment utilisé. Il nous a cependant été difficile de savoir si des recherches sur le sujet avaient déjà été publiées et avec quelles informations. Or la construction décrite au chapitre 3 s'appuie sur les pavages *Star* et leurs liens étroits avec les pavages de Penrose. Il nous a donc semblé qu'un état de l'art s'imposait, et celui-ci s'est avéré insuffisant car aucune source ne contenait certaines des propriétés nécessaires.

Considérant que de manière générale les pavages quasipériodiques n'intéressent pas le même public que les sous-graphes qui sont au cœur du problème initial, il nous a semblé plus approprié de séparer les deux études. Le présent chapitre (et l'article associé) s'adresse donc d'abord à ceux qui s'intéressent aux quasicristaux. En effet, les tuiles HBS apparaissent souvent dans l'étude des quasicristaux décagonaux, sur lesquels la plupart des recherches du domaine se concentrent, et Steurer a conclu sa revue sur les quasicristaux en disant : "L'analyse de la structure QC, cependant, contribuera certainement à la solution des phases intermétalliques complexes en général" [Ste04]. Le seul endroit où j'ai vu trois couleurs pour les sommets des tuiles HBS est sur le site Web d'Herbert Kociemba, mais avec une construction différente et peu de détails¹. Ses tuiles sont décorées dans le style *Girih*, ces motifs géométriques décoratifs utilisés dans l'architecture islamique. Certains chercheurs ont en effet étudié comment un tel art avait pu être conçu bien avant que l'on ne connaisse des structures quasi-périodiques qui lui ressemblent [LS07 ; Al 12].

Nous commençons par décrire les constructions connues à partir des pavages de Penrose, et rappeler les propriétés structurelles des pavages HBS stricts. Nous procédons ensuite à la construction et aux propriétés du jeu de tuiles Star, notamment sur la façon dont les couleurs des sommets sont liées aux pavages de Penrose. Enfin, nous présentons un nouveau jeu de tuiles appelé *Gemstones*, dérivé du précédent.

1. Je l'ai contacté et il m'a dit qu'à sa connaissance personne n'avait fait la même chose.

2.1 Pavages HBS : état de l'art

Les pavages HBS sont MLD avec les pavages de Penrose des trois classes LI, donc nous rappelons et illustrons d'abord les recodages locaux entre les pavages HBS et les pavages de Penrose des trois types. Leurs principales propriétés théoriques sont ensuite rappelées.

2.1.1 Construction naturelle à partir des losanges de Penrose

Les tuiles HBS ont été mentionnées pour la première fois par Henley [Hen86] alors qu'il étudiait les empilements de sphères basés sur les pavages de Penrose. Il a remarqué que lorsque les losanges de Penrose sont marqués par des flèches comme dans la figure 1.6c, chaque tuile HBS est obtenue en composant les losanges comme expliqué dans la figure 2.3. En effet, trois des huit types de sommets autorisés dans les pavages P3 sont des "pôles" vers lesquels seules les flèches doubles pointent – à savoir ceux dénommés K , Q et S par de Bruijn [Bru81]. Lorsque les losanges ne sont pas marqués, les configurations sont toujours reconnaissables à l'exception de l'étoile : de "fausses" étoiles apparaissent là où les hexagones se rencontrent. Toutefois, la construction reste facile : on commence par les hexagones et les bateaux, puis les (gros) losanges restants forment les "vraies" étoiles du pavage HBS.

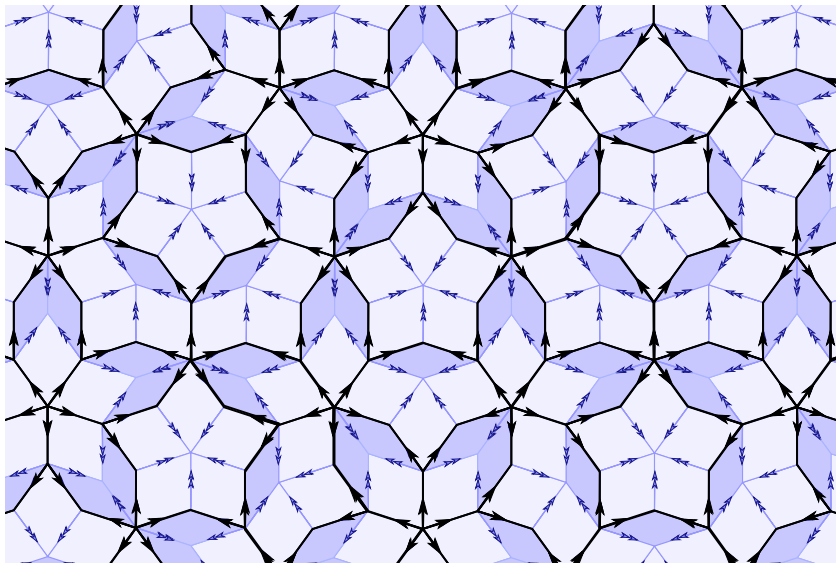


FIGURE 2.3 – Superposition de pavages HBS et P3 : à partir d'un pavage P3, on supprime toutes les arêtes avec une double flèche et les sommets vers lesquels elles pointent ; à partir d'un pavage HBS, on décore simplement les tuiles comme dans la Figure 2.4a.

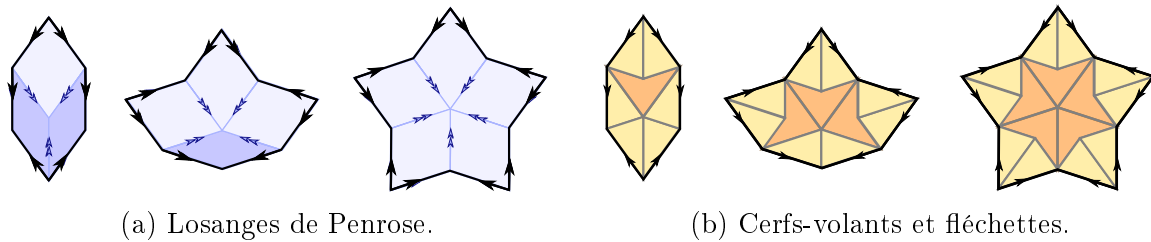


FIGURE 2.4 – Tuiles HBS composées de...

2.1.2 Construction simple à partir des cerfs-volants et fléchettes

Bien que Henley ne l'indique pas explicitement, son rappel des règles de déflation des losanges de Penrose vers les cerfs-volants et fléchettes montre que toutes les arêtes de $P3$ marquées d'une seule flèche sont les diagonales des cerfs-volants, la flèche pointant vers le grand angle du cerf-volant. Par conséquent, les tuiles HBS sont une composition de fléchettes et de demi cerfs-volants (ou triangles de Robinson) comme décrit dans la figure 2.5. En outre, en gardant les mêmes dimensions qu'au chapitre précédent pour les tuiles de Penrose, leurs arêtes ont une longueur de 1.

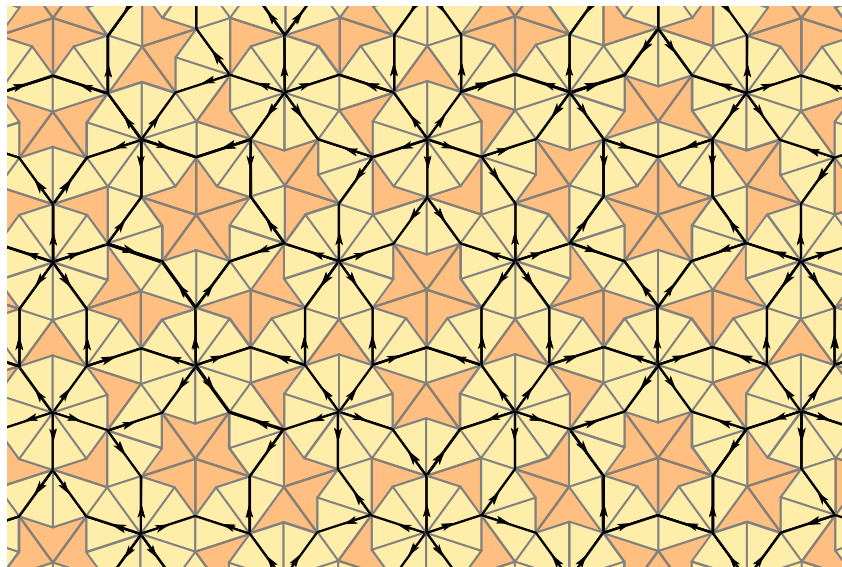


FIGURE 2.5 – Superposition de pavages HBS et P2 : à partir d'un pavage P2, on trace l'axe de symétrie de chaque cerf-volant, avec une flèche pointant vers le grand angle, puis on efface tous les bords des cerfs-volants et des fléchettes ; à partir d'un pavage HBS, on décore les pavages comme dans la Figure 2.4b.

2.1.3 Dualité entre pavages HBS et P1

Les pavages P1 sont étudiés par Henley en tant qu'empilements de pentagones, mais le recodage local entre les pavages P1 et HBS, illustré par la figure 2.6, a été décrit pour la première fois dans [Lor91]. Avec les étoiles et les bateaux, la ressemblance entre les pavages HBS et P1 est évidente : chaque étoile P1 se trouve à l'intérieur d'une étoile HBS, chaque bateau P1 à l'intérieur d'un bateau HBS, et chaque diamant P1 à l'intérieur d'un hexagone HBS, tandis que tous les pentagones sont décorés par les bords des tuiles HBS. Les encoches et les bosses sur les tuiles P1 sont omises ici mais peuvent être récupérées. Cependant, il faut pour cela remarquer comment les trois types de pentagones sont liés aux trois couleurs de sommets des pavages Star, et donc utiliser des décorations enrichies des tuiles P1 comme présenté plus loin, dans la sous-section 2.2.2.

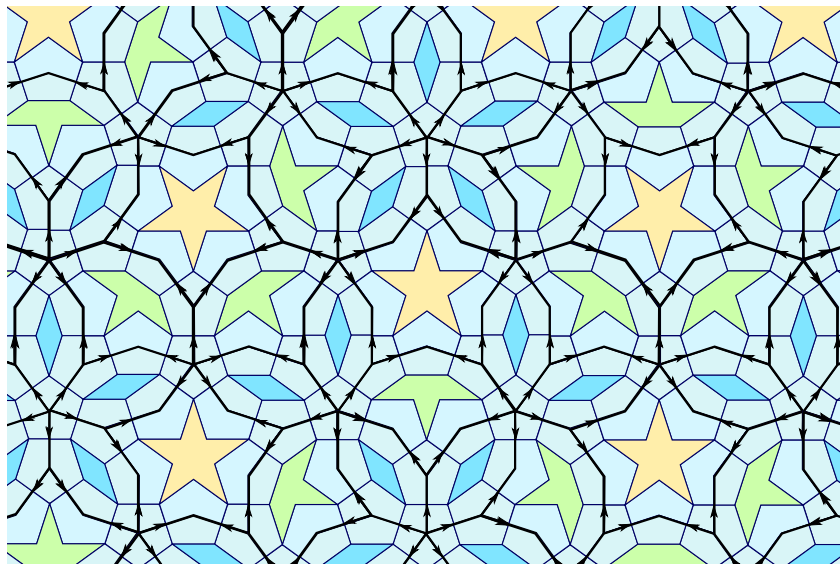


FIGURE 2.6 – Superposition de pavages HBS et P1. À partir d'un pavage HBS, on décore les tuiles comme dans la figure 2.7a et on efface leurs arêtes pour obtenir le pavage P1. À partir d'un pavage P1, il suffit de joindre les centres des pentagones adjacents comme dans la figure 2.7b puis d'effacer les tuiles de P1 pour obtenir le pavage HBS correspondant.

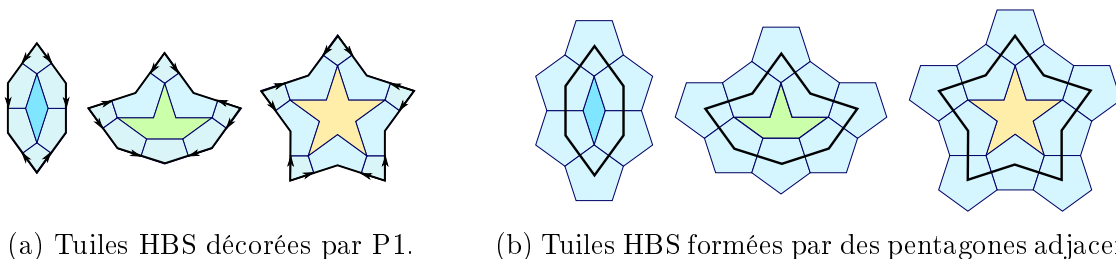


FIGURE 2.7 – Simple correspondance entre tuiles HBS et P1.

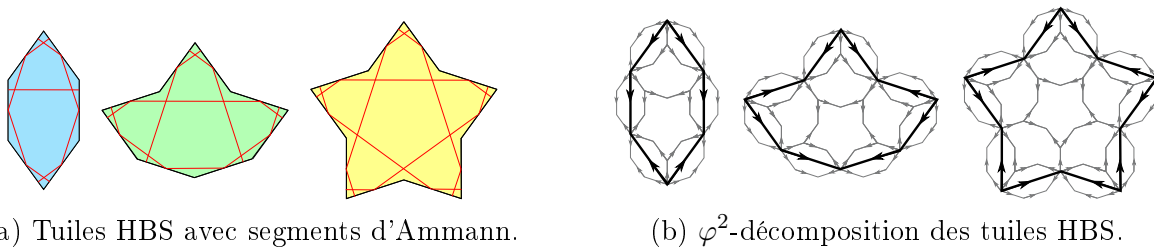
2.1.4 Propriétés connues des pavages HBS

L'article de Henley a été cité plus de 300 fois, mais surtout dans des travaux en physique qui ont expérimenté différents arrangements d'atomes basés sur des décorations des formes HBS – et pas toujours avec les mêmes règles d'assemblage (en effaçant les flèches). Steurer est l'auteur d'un rapport consistant de la recherche sur la structure des quasicristaux [Ste04] comparant de telles études, suivi d'un livre sur les quasicristaux avec Deloudi comprenant beaucoup plus de contenu théorique [WD09]. En particulier, la Fig. 1.7 page 24 illustre les décorations des tuiles HBS par des segments d'Ammann comme dans la Figure 2.8a et donne les fréquences relatives des configurations de sommets dans P3, dont les configurations qui se transforment en tuiles HBS. Le rapport hexagones : bateaux : étoiles est de $\sqrt{5}\varphi : \sqrt{5} : 1$, de sorte que les fréquences des tuiles, calculées par Olamy et Kléman [OK89], sont les suivantes :

$$f_H = 7 - 4\varphi = \sqrt{5}\varphi^{-3} \simeq 52,8\% ,$$

$$f_B = 7\varphi - 11 = \sqrt{5}\varphi^{-4} \simeq 32,6\% ,$$

$$f_S = 5 - 3\varphi = \varphi^{-4} \simeq 14,6\% .$$



(a) Tuiles HBS avec segments d'Ammann.

(b) φ^2 -décomposition des tuiles HBS.

FIGURE 2.8 – (a) Tuiles HBS avec segments d'Ammann (en remplacement des flèches) et (b) leur φ^2 -décomposition.

Étant donné que chaque pavage HBS est MLD avec un pavage de Penrose, l'ensemble de tous les pavages HBS (stricts) forme une classe LI, et leur entropie configurationnelle est nulle. Néanmoins, de nombreux articles considèrent les formes HBS avec des décorations différentes, voire sans décorations. Dans le cas où les tuiles doivent seulement s'ajuster bord à bord, l'ensemble de tous les pavages possibles avec ces formes (*random HBS tilings*) a une entropie configurationnelle positive [Hen91]. En plus de rappeler cette propriété, Gummelt [Gum06] donne la φ^2 -décomposition des pavages HBS, dessinée dans la Figure 2.8b avec les flèches. Elle a proposé un modèle de recouvrement du plan par des décagones, équivalent au modèle de pavage HBS, comme l'avait fait plus tôt Lück

[Lüc90] : dans chaque cas, leurs décagones décorés se superposent selon des règles d'assemblage spécifiques, et tout recouvrement valide avec ceux-ci peut être recodé en un pavage HBS. Leurs modèles ont été récemment comparés par Steurer [Ste21], à la suite d'une courte revue plus récente sur les quasicristaux [Ste18].

2.2 Le jeu de tuiles Star

Comme mentionné plus tôt, le jeu de tuiles de la figure 2.2 produit les mêmes pavages que les tuiles HBS de la figure 2.1 une fois les décorations enlevées. Il a été dérivé des pavages P2, mais pas de la même manière que dans la figure 2.5. La construction est encore assez simple et en plus de la φ^2 -décomposition mentionnée ci-dessus, nous avons une φ -décomposition. Les couleurs des sommets sont fortement liées aux configurations des sommets dans P2, donc aux configurations des sommets dans les pavages HBS quand on regarde les compositions.

2.2.1 Construction

Comme on peut le voir sur la figure 2.5 et compte tenu des règles locales des pavages P2, la distance la plus courte entre les centres de deux configurations *star* est de $3+2\varphi^{-1} = \varphi^3$, ce qui se produit lorsque deux étoiles HBS sont incidentes à une même arête HBS (ou à un même cerf-volant du pavage P2 sous-jacent). Si l'on joint les centres des étoiles, les formes HBS apparaissent à nouveau, mais plus grandes, composées de nombreux cerfs-volants (ou demi-cerfs-volants) et de fléchettes, comme dans la figure 2.9. Les sommets sont colorés en fonction de leur degré, qui correspond au type d'étoile P2 sur laquelle ils se trouvent : l'étoile peut être tangente à 0 (rouge), 1 (vert) ou 2 (bleu) configurations Soleil. Si l'on place sur chaque arête une flèche pointant vers le plus grand nombre (parmi les extrémités), on obtient exactement les tuiles HBS de la figure 2.1. Cependant, ici, il y a plus d'information encodée dans les sommets, et donc plus de contraintes locales. Les hexagones et les bateaux ont tous exactement les mêmes décorations, mais les étoiles existent en trois versions : les pointes ne peuvent être que vertes ou rouges, et on ne peut pas avoir deux pointes rouges côte à côte.

2.2.2 Substitutions

Il est évident que les segments d'Ammann des tuiles HBS sont toujours valables pour les tuiles Star de mêmes formes. Chaque sommet du pavage Star se trouve à l'intérieur d'un petit polygone formé par n barres d'Ammann. L'étiquette du sommet est alors $5 - n$

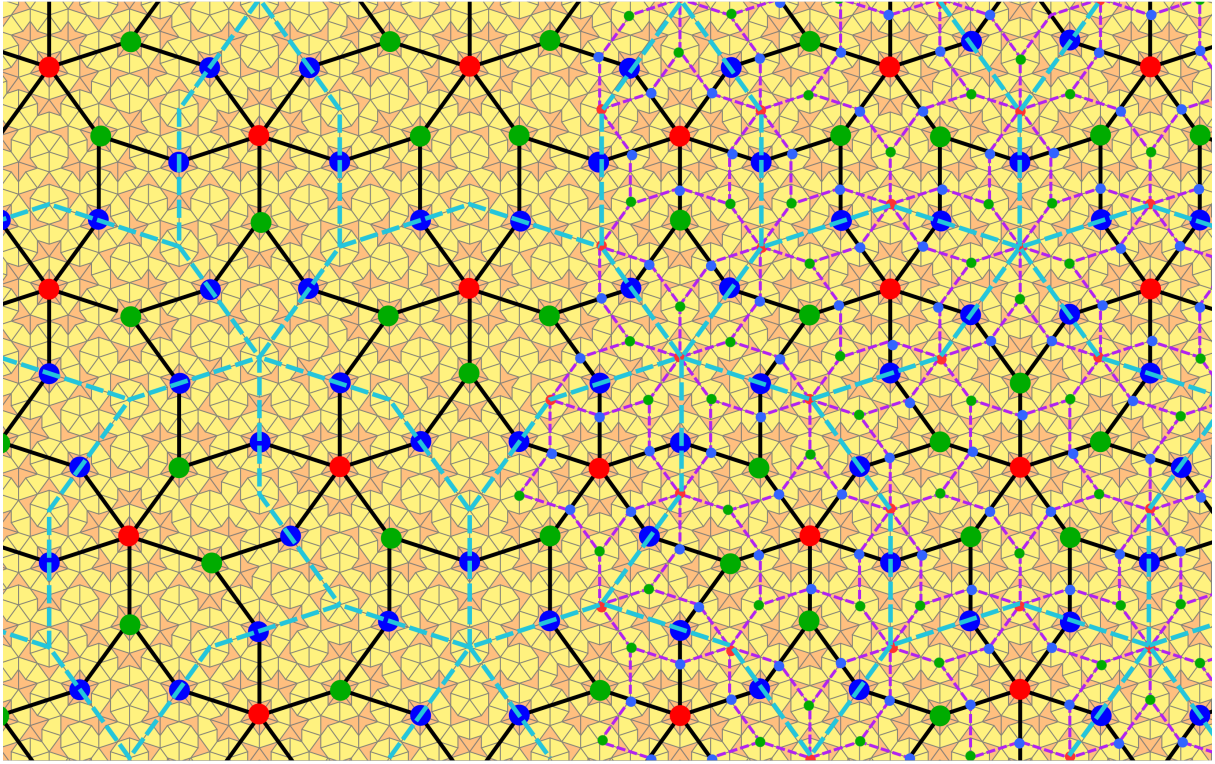


FIGURE 2.9 – Pavages P2 et Star superposés.

(ou la couleur correspondante). Puisque les sommets du pavage HBS sont les Étoiles du pavage P2, et qu'une Étoile est obtenue en décomposant un Soleil, en joignant les Soleils qui sont à distance $2 + \varphi^{-1} = \varphi^2$ (le minimum) comme dans la Figure 2.9 (lignes pointillées magenta), on obtient le même pavage HBS qu'en décomposant une fois le pavage P2 et en joignant ensuite les Étoiles. Les couleurs des sommets sont alors données par le nombre de configurations Dame intersectant le Soleil. La φ -décomposition de chaque tuile est illustrée dans la Figure 2.10. En l'appliquant deux fois, on obtient la φ^2 -décomposition présentée ci-dessus (lignes magenta et cyan sur la Figure 2.9).

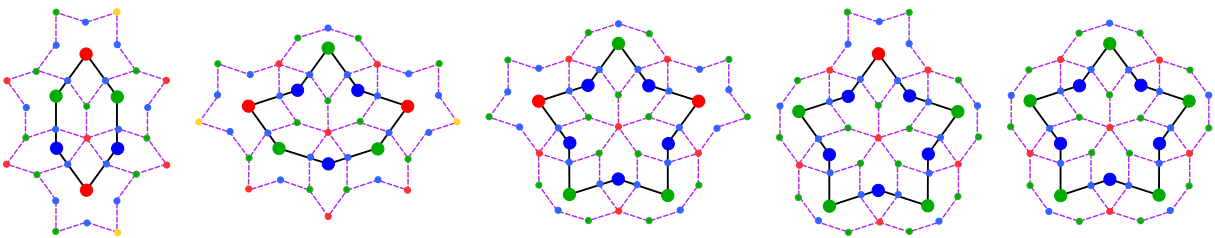


FIGURE 2.10 – Décomposition des tuiles de l'ensemble Star. Les sommets d'étoiles pouvant être verts ou rouges sont colorés en jaune (ils sont donnés par les tuiles voisines quand on décompose un pavage entier).

Maintenant, si on applique la φ -décomposition une troisième fois et on décore les petites tuiles comme dans la Figure 2.4b (décorations habituelles des tuiles HBS avec des demi cerfs-volants et des fléchettes), les tuiles Star initiales ont les mêmes décorations que dans la Figure 2.2 . De manière équivalente, à partir d'un pavage HBS dont les tuiles sont décorées comme dans la figure 2.4b, on peut conserver les formes HBS telles quelles, appliquer trois φ -décompositions aux cerfs-volants et aux fléchettes, puis placer de manière appropriée les couleurs des sommets sur les hexagones et les bateaux. En fait, on peut même placer les couleurs dès le départ, en considérant la façon dont les configurations des sommets dans les pavages P2 se substituent les unes aux autres : pour avoir des Étoiles sur les sommets HBS initiaux (et seulement là) après trois décompositions P2, on doit avoir des Soleils exactement à ces endroits à l'étape 2, ce qui implique qu'à l'étape 1 on avait des Dames, des Rois ou des Étoiles à ces endroits. Donc avant la première décomposition,

- on place un sommet bleu sur chaque Deux (D), qui se décompose en Dame (Q) ;
- on place un sommet vert sur chaque Valet (J), qui se décompose en Roi (K) ;
- on place un sommet rouge sur chaque Soleil (S3,S4,S5), qui se décompose en Étoile (S).

Les lettres entre parenthèses sont les noms des configurations de sommets équivalentes dans les pavages P3, avec trois versions du Soleil (S3, S4, S5). Comme les Rois et Dames, qui donnent respectivement des bateaux et des hexagones, obligent à placer un grand nombre de tuiles autour d'eux, les couleurs des sommets de ces deux formes sont uniques. D'autre part, le fait que le Soleil existe en trois versions explique pourquoi c'est le cas aussi pour l'étoile HBS. Quant à la substitution avec P1, l'étiquette d'un pentagone est le nombre de flèches HBS qui pointent vers lui. Ainsi, chaque type de pentagone du jeu de tuiles P1 original peut simplement recevoir la couleur correspondante, comme l'illustrent les figures 2.11 et 2.12, et si on ajoute les flèches sur les tuiles P1, alors le pavage HBS correspondant apparaît sur n'importe quel pavage P1.

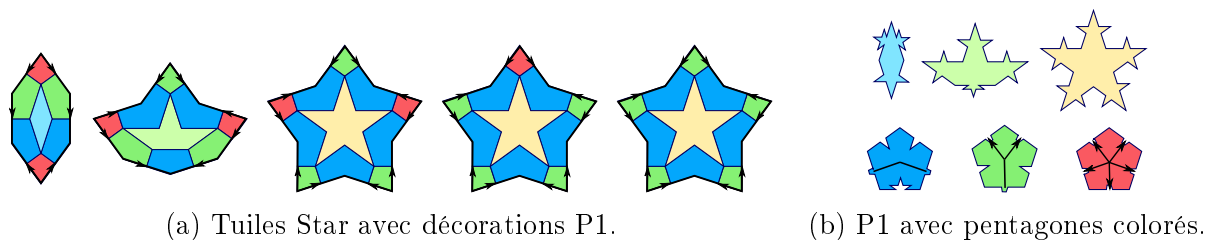


FIGURE 2.11 – Dualité entre tuiles P1 et Star.

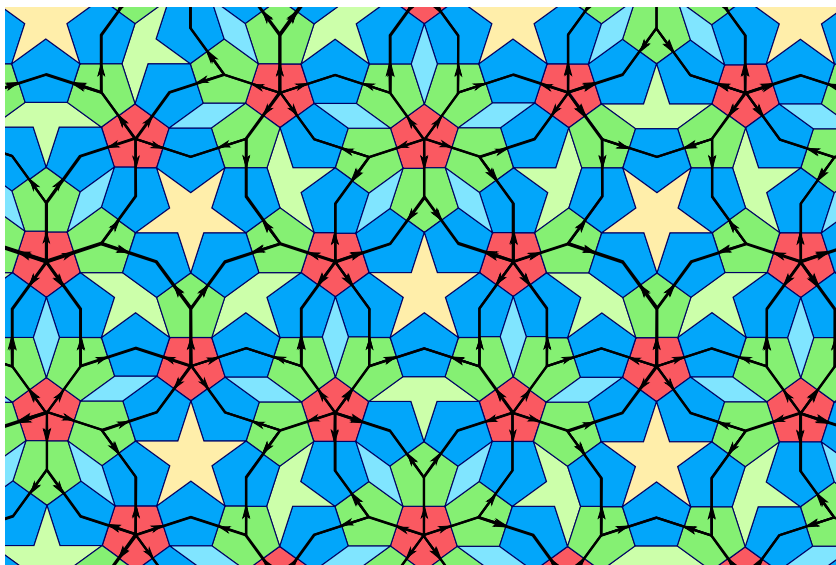


FIGURE 2.12 – Pavages Star et P1 superposés.

2.2.3 Observations additionnelles

Comme le montre la figure 2.10, chaque couleur de sommet dans un pavage Star se décompose en hexagone, en bateau ou en étoile selon sa couleur. Le rapport entre le bleu, le vert et le rouge est donc le même que celui entre les hexagones, les bateaux et les étoiles, soit $\sqrt{5}\varphi : \sqrt{5} : 1$ comme nous l'avons mentionné plus haut. On a donc toujours

$$f_H = \sqrt{5}\varphi^{-3}, \quad f_B = \sqrt{5}\varphi^{-4},$$

et comme la fréquence des étoiles dans les pavages HBS est $f_S = \varphi^{-4}$, on peut en déduire

$$f_2 = \sqrt{5}\varphi^{-7} \simeq 7,7\%, \quad f_1 = \sqrt{5}\varphi^{-8} \simeq 4,76\%, \quad f_0 = \varphi^{-8} \simeq 2,13\%$$

où f_i est la fréquence de l'étoile S_i ayant i sommets rouges. Une autre façon de calculer ces fréquences est de partir de celles des configurations de sommets dans les pavages de Penrose. En effet, comme indiqué dans les sous-sections 2.1.1 et 2.2.2, les tuiles H, B, S_2 , S_1 et S_0 correspondent respectivement aux configurations D, J, S3, S4 et S5 dans les pavages P3, qui ont pour fréquences $f_D = 2 - \varphi = \varphi^{-2}$, $f_J = 2\varphi - 3 = \varphi^{-3}$, $f_{S3} = 13 - 8\varphi = \varphi^{-6}$, $f_{S4} = 13\varphi - 21 = \varphi^{-7}$ et $f_{S5} = (47 - 29\varphi)/5 = \varphi^{-7}/\sqrt{5}$ [Maz23; FL22], pour un total de $\varphi/\sqrt{5}$. En multipliant par $\sqrt{5}\varphi^{-1}$, on retrouve bien les mêmes valeurs que la première méthode pour f_H , f_B , f_2 , f_1 et f_0 .

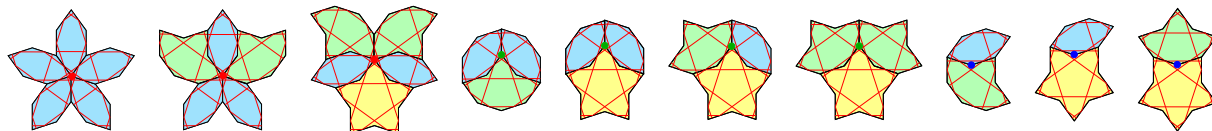
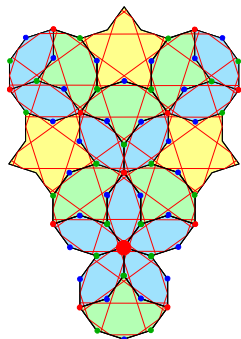
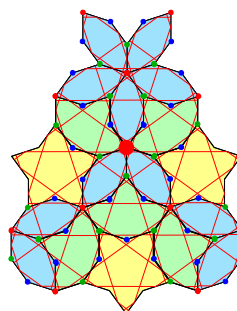


FIGURE 2.13 – Configurations de sommets dans les pavages HBS et Star, avec différentes couleurs possibles sur certains sommets des étoiles. Lorsque les étoiles, les bateaux et les hexagones sont décomposés, on obtient l’une de celles centrées sur un sommet rouge, qu’on appelle respectivement campanule, orchidée et pensée (de gauche à droite).

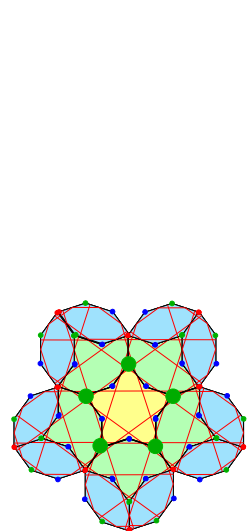


(a) Royaume de la campanule.

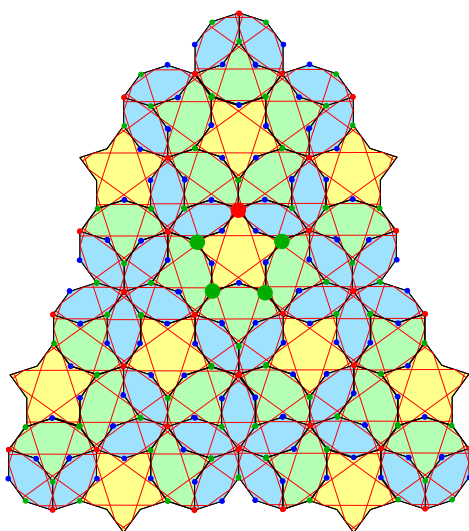


(b) Royaume de l'orchidée.

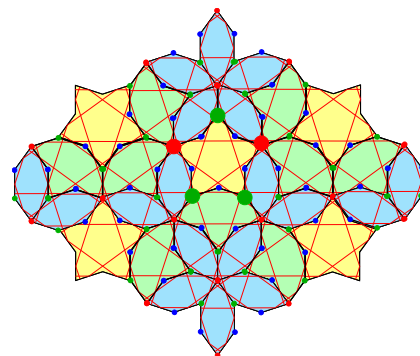
FIGURE 2.14 – Les royaumes de l'orchidée et de la campanule sont presque les mêmes : la campanule est entourée d'au plus deux étoiles qui ne se touchent pas, et les autres tuiles qui l'entourent sont des bateaux, de sorte qu'il y a nécessairement au moins une orchidée qui partage un hexagone (ou pétale) avec la campanule.



(a) Royaume de S0.



(b) Royaume de S1.



(c) Royaume de S2.

FIGURE 2.15 – Royaumes des étoiles.

Les configurations de sommets sont données dans la figure 2.13. La principale différence entre les pavages HBS et les pavages Star est la quantité d'informations qui peut être déduite d'une configuration locale. Cela est notamment visible avec les royaumes. Pour la campanule et l'orchidée, comme elles ne contiennent pas d'étoile, les couleurs des sommets peuvent être omises (comme dans les pavages HBS) et on obtient les royaumes de la figure 2.14. Mais lorsque la configuration d'un sommet comprend une étoile, les couleurs ont un impact significatif, comme on peut le voir sur la figure 2.15. En particulier, l'étoile S1 force une étoile S0 au-dessus et deux étoiles S2 en dessous. Ces trois royaumes ressemblent respectivement à ceux de l'étoile, du roi et de la reine dans les pavages P2 – ce qui est logique compte tenu des observations sur les substitutions.

2.3 Jeu de tuiles Gemstones

L'ensemble Star peut être modifié pour obtenir des tuiles convexes avec seulement deux couleurs de sommets. En effet, en observant qu'un sommet bleu d'un hexagone, d'un bateau ou d'une étoile n'est en fait pas un sommet d'un pavage Star, ses sommets adjacents peuvent être reliés par un segment, et le sommet bleu effacé. En d'autres termes, chaque arête du pavage devient un segment de droite, dont les extrémités sont étiquetées 0 (rouge) ou 1 (vert). Ces étiquettes peuvent également être remplacées par des flèches, pointant de 0 à 1. La figure 2.16 montre comment les tuiles HBS sont déformées pour obtenir des gemmes. Nous obtenons ainsi le jeu de tuiles *Gemstones* de la figure 2.17.

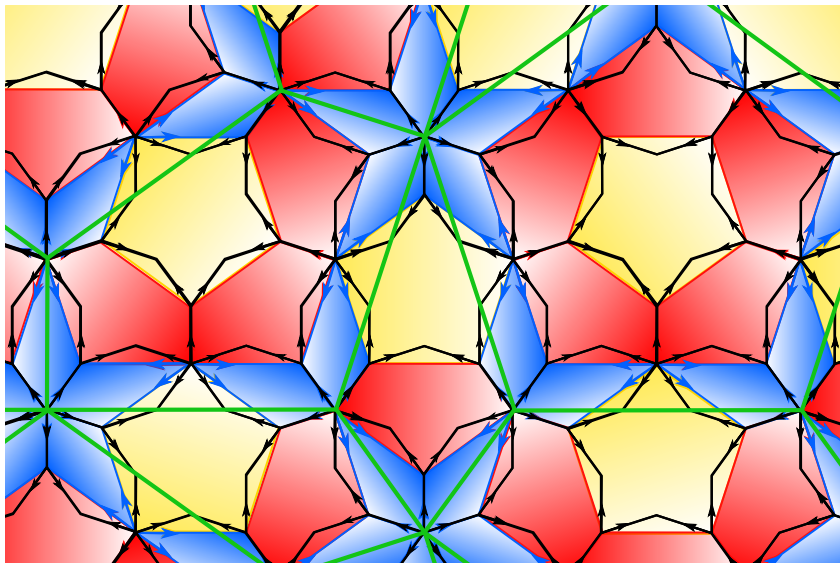


FIGURE 2.16 – Pavages Gemstones et HBS superposés, avec la φ^2 -composition en vert.

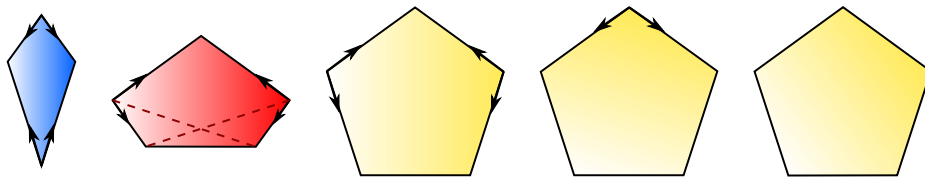


FIGURE 2.17 – Jeu de tuiles Gemstones : saphir, rubis et topazes. Les arêtes courtes ont une longueur de 1 et les arêtes longues $2 \sin \frac{2\pi}{5}$. Le saphir a pour angles $\frac{2\pi}{5}$ en haut, $\frac{7\pi}{10}$ sur les côtés et $\frac{\pi}{5}$ en bas. Le rubis a pour angles $\frac{3\pi}{5}$ en haut, $\frac{\pi}{2}$ sur les côtés et $\frac{7\pi}{10}$ en bas. Les topazes ont pour angles $\frac{3\pi}{5}$. Le point d'intersection des droites en pointillés est le “centre” du rubis pour la φ -décomposition de la Figure 2.18.

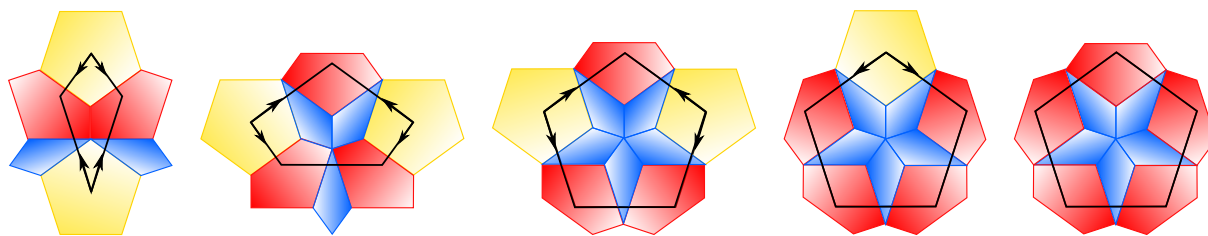


FIGURE 2.18 – φ -décomposition des Gemstones.

La substitution à partir de P3 est simple. On trace la diagonale longue de chaque losange fin. Pour chaque configuration Q (hexagone), on compose le gros losange avec les deux demi-losanges fins adjacents. Partout ailleurs, on efface les arêtes de P3. Cette construction permet d'obtenir les longueurs des côtés des Gemstones. Inversement, les Gemstones sont facilement décorées avec des losanges (y compris les flèches). À partir de P2, les Soleils et les Valets constituent les sommets des Gemstones ; quant aux arêtes, on trace un segment entre deux sommets chaque fois qu'ils partagent un cerf-volant, et un segment lorsqu'ils sont séparés par deux cerfs-volants partageant une arête courte.

Chapitre 3

Fonction feuille des pavages P2

Le sujet étudié dans ce chapitre a fait l'objet de mon mémoire de maîtrise (master) [Por19]. À l'époque, j'ai pu trouver un encadrement de la fonction recherchée ainsi que les idées permettant d'aller au bout de la démarche. Bien qu'il s'agisse d'un problème de graphes, il se penche plus spécifiquement sur un cas particulier basé sur les pavages de Penrose (P2). À ce titre, il exige une assez bonne connaissance de leurs propriétés géométriques, que nous avons vues dans les chapitres précédents. La recherche nous a amenés à redécouvrir les pavages HBS, que nous ne connaissions pas, mais avec une construction différente de ce qui était connu, mêlant différents niveaux de (dé)composition ainsi que la distinction de trois types de Soleils (donc d'Étoiles), qui était habituelle dans les pavages P3 mais pas dans P2. C'est ce qui nous a permis de trouver une famille optimale de *sous-arbres induits pleinement feuillus* répondant à la question. Il s'agit en effet de trouver la *fonction feuille*, notée L_{P2} , de ce que nous avons appelé *graphes de Penrose* (pour les pavages P2). Nous procédons pour cela par un encadrement par deux fonctions égales, amenant au résultat suivant.

Théorème 1. *La fonction feuille L_{P2} des P2-graphes est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$L_{P2}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ L_{P2}(n - 17) + 8 & \text{si } n \geq 19. \end{cases}$$

La première section présente le problème et le vocabulaire associé ainsi que quelques notations utiles. Ensuite nous montrons que la fonction feuille est majorée par la fonction ci-dessus (section 2), avant d'exhiber une famille d'objets atteignant ce maximum, montrant ainsi que les bornes supérieure et inférieure sont égales (section 3). Pour conclure, en section 4 nous donnons une formule close et la croissance asymptotique de L_{P2} .

3.1 Fonction feuille et arbres de Penrose

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour tout $u \in V$ et $U \subseteq V$, l'ensemble des **voisins** (*neighbors*) de u dans G est noté $N_G(u)$, que l'on étend naturellement à U en définissant son **voisinage** (*neighborhood*) $N_G(U) = \{N_G(u') \mid u' \in U\}$. Le **sous-graphe** de G induit par U (*subgraph of G induced by U*) est $G[U] = (U, E \cap \mathcal{P}_2(U))$, où $\mathcal{P}_2(U)$ est l'ensemble des sous-ensembles à 2 éléments de U . Le **degré** (*degree*) d'un sommet est son nombre de voisins. Un **arbre** (*tree*) est un graphe connexe et acyclique.

En particulier, nous nous concentrons sur les **sous-arbres induits** (*induced subtree*), c'est-à-dire les sous-graphes induits de G qui sont des arbres, et sur leurs **feuilles** (*leaves*), soit leurs sommets de degré 1. Le sous-arbre induit obtenu à partir d'un arbre I en supprimant toute ses feuilles est appelé sous-arbre dérivé de I et est noté I' . Un arbre I est appelé (**graphe**) **chenille** (*caterpillar (graph)*) lorsque I' est un **chemin** (*path graph*) : tous ses sommets sont de degré 2 sauf les extrémités qui sont des feuilles (ou sa taille est inférieure à 2). On note $n(I)$ le nombre total de sommets d'un arbre I , et $n_k(I)$ le nombre de sommets de degré k dans I .

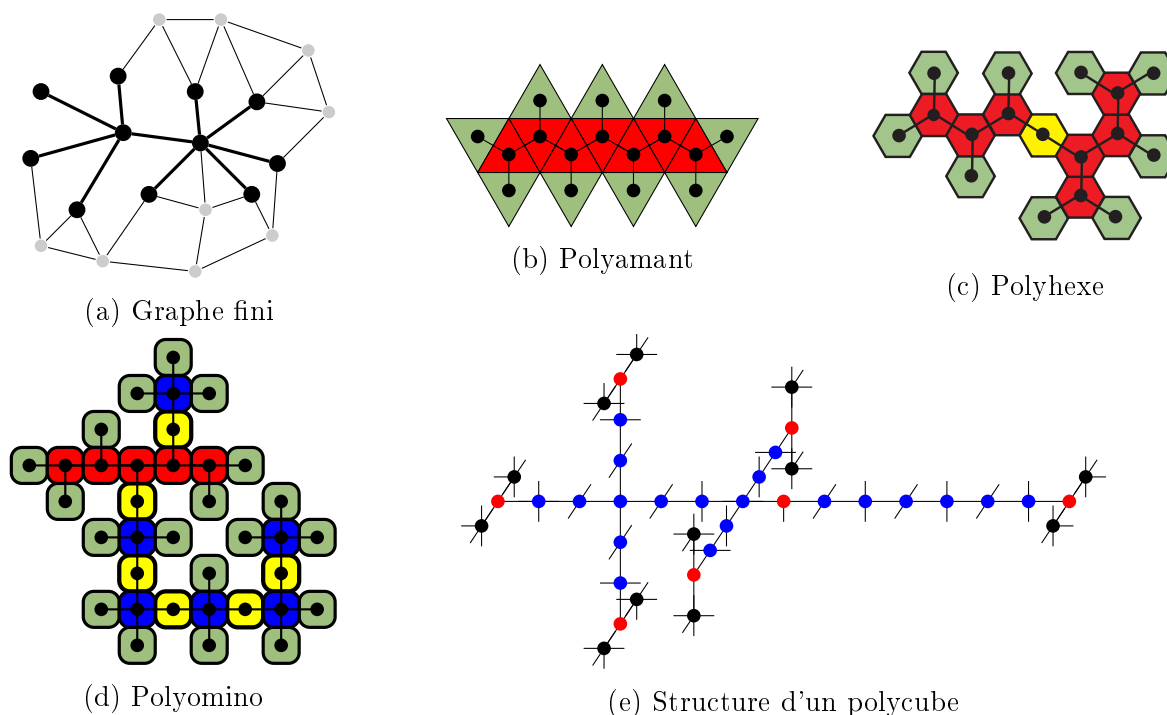


FIGURE 3.1 – Sous-arbres induits pleinement feuillus, (a) dans un graphe fini, (b) dans la grille triangulaire, (c) dans la grille hexagonale, (d) dans la grille carrée et (e) dans la grille cubique. Les sommets sont colorés en fonction de leur degré dans le sous-arbre induit (sauf pour le graphe fini). Les sous-arbres induits en (a) et (b) sont des chenilles.

On note $\mathcal{I}_G(n)$ l'ensemble de tous les sous-arbres induits de G d'ordre n , à isomorphisme près. La **fonction feuille** (*leaf function*) de G est alors formellement définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$L_G(n) = \max\{n_1(I) : I \in \mathcal{I}_G(n)\}.$$

Un sous-arbre induit I de G d'ordre n est dit **pleinement feuillu** (*fully leafed*) si $n_1(I) = L_G(n)$. C'est le cas des sous-arbres induits de la Figure 3.1. Pour tout entier positif k , on dit qu'un sous-arbre induit I est **k -interne-régulier** (*k -internal-regular*) lorsque tous les sommets de I sont de degré k dans I . Nous verrons notamment des sous-arbres 3-internes-réguliers, souvent des chenilles.

Les graphes auxquels nous nous intéressons ici sont définis par des pavages. Notons que la notion de voisinage n'est pas la même dans les pavages que dans les graphes. Or c'est la structure de graphe qui nous intéresse ici. Ainsi, quand nous parlons de **tuile voisine** (*neighbor tile*) dans ce chapitre c'est en tant que voisine dans le graphe, donc adjacente dans le pavage. En effet, les sommets et les arêtes d'un pavage forment un graphe planaire non orienté P , dont les faces sont les tuiles du pavage. Le dual de P est alors par définition le **graphe d'adjacence** (*adjacency graph*) G : les sommets de G sont les tuiles composant un pavage, et l'ensemble E des arêtes est donné par la relation d'adjacence entre les tuiles. Par exemple, les grilles triangulaire et hexagonale (vues comme graphes) sont duales l'une de l'autre, et la grille carrée est son propre dual (à isomorphisme près).

Le problème FLIS a d'abord été étudiée dans les grilles carrée, triangulaire et hexagonale (les pavages réguliers du plan euclidien) ainsi que dans la grille cubique en dimension 3. Nous nous penchons ici sur le cas des pavages de Penrose de type P2, et appelons **P2-graphe** (*P2-graph*) le graphe d'adjacence d'un tel pavage – dans l'article initial, nous parlions de **graphe de Penrose** (*Penrose graph*), ou d'**arbre de Penrose** (*Penrose tree*) (resp. **chenille de Penrose** (*Penrose caterpillar*)) quand c'est un arbre (resp. une chenille). Comme il y a une infinité de pavages P2, il y a aussi une infinité de P2-graphes. Cependant, ce n'est pas un problème ici car les sous-graphes considérés sont finis, et par la propriété d'isomorphisme local, tous les pavages P2 contiennent les mêmes motifs finis quelle que soit leur taille. On note L_{P2} la fonction feuille des P2-graphes (ou des pavages P2, par abus de langage), qui est la même pour tous puisqu'elle ne dépend que de motifs finis. Nous allons voir que la plupart des sous-arbres induits pleinement feuillus dans les P2-graphes sont des chenilles.

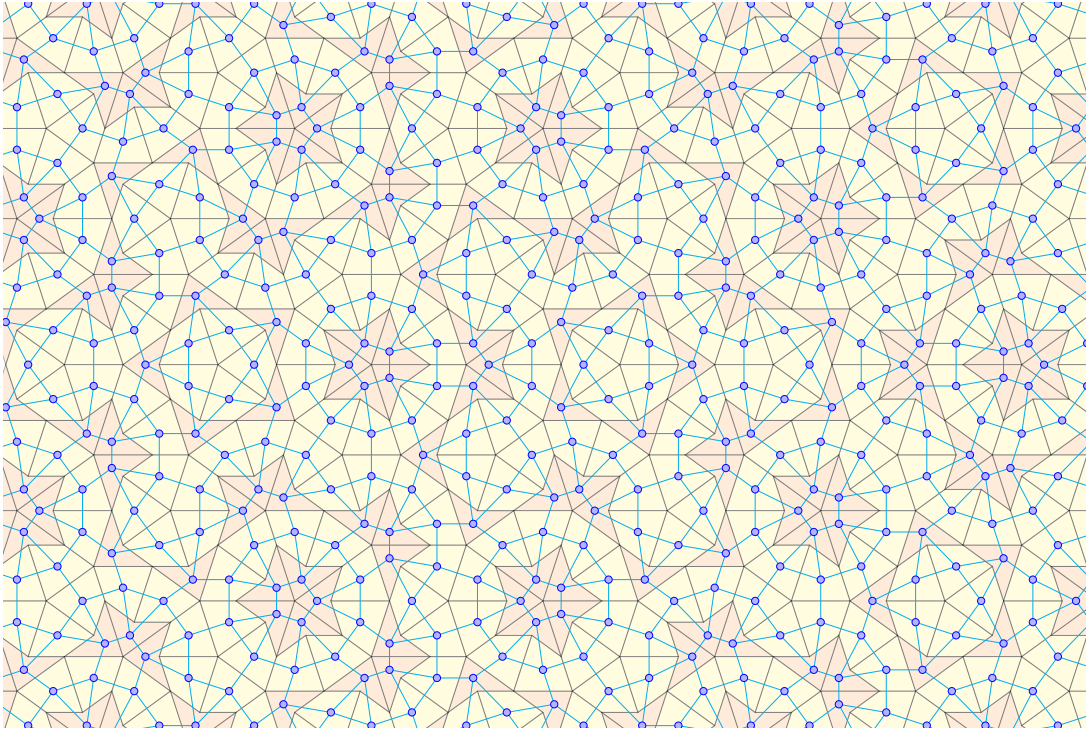


FIGURE 3.2 – Pavage de Penrose et le P2-graphe associé en bleu.

Comme on peut le voir dans la Figure 3.2, dans le cas d’un pavage de type P2, chaque face du graphe d’adjacence G correspond à une configuration de sommets (Figure 1.7). Si on voit G comme un pavage, alors ses tuiles sont des copies de sept prototiles décorées (avec des bouts de cerfs-volants et fléchettes), contenant chacune un sommet du pavage initial que l’on peut voir comme le “centre” (ou représentant) de la tuile. Par conséquent, en posant comme contrainte d’assemblage que toute partie de cerf-volant (resp. fléchette) doit être complétée en cerf-volant entier (resp. fléchette entière) sur les tuiles voisines – ce qui revient à prolonger chaque segment dessiné sur la tuile en un segment plus long –, le dual obtenu en joignant les “centres” définis ci-dessus est exactement le graphe P initial (celui des sommets et arêtes du pavage). On a donc une bijection entre les deux, liée au fait que le rayon des règles locales est 0 pour les pavages P2.

Comme les graphes étudiés sont des graphes d’adjacence de tuiles dans des pavages du plan, un sous-graphe – donc en particulier un sous-arbre induit – ne peut apparaître que s’il correspond à un motif autorisé dans ces pavages. Nous sommes donc amenés à observer les motifs des pavages afin de déterminer quels sont les sous-arbres induits pouvant apparaître ou non dans les P2-graphes. Considérant que seule l’existence nous intéresse et non l’unicité, en pratique nous cherchons les motifs du pavage dont

les tuiles, en tant que sommets du graphe d'adjacence, forment un sous-arbre induit. Pour alléger les explications, nous confondons donc parfois les sous-arbres induits avec les motifs du pavage qui leur correspondent (ou peuvent leur correspondre, quand il y a plusieurs possibilités). Par exemple, on dira parfois qu'un motif des pavages P2 ne contient aucun cycle, dans le sens où le sous-graphe induit associé n'en contient pas.

Dans un premier travail [PB20], nous avons montré que le degré d'une tuile dans un arbre de Penrose ne peut pas dépasser 3, même si dans les P2-graphes les sommets sont tous de degré 4. Ceci nous a permis d'obtenir une première majoration de la fonction feuille, qui nous est utile pour l'améliorer. En outre, une première famille de chenilles de Penrose a été définie, dont on pouvait compter le nombre de feuilles de chaque chenille, ce qui nous donnait une minoration. Nous aboutissions alors au résultat suivant :

$$\frac{2\varphi n}{4\varphi + 1} \leq L_{P2}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En outre, un algorithme permettant de générer des sous-arbres induits sans chercher dans un pavage, en se basant sur les barres d'Ammann pour éviter les motifs interdits, nous permettait déjà de chercher des sous-arbres induits 3-internes réguliers et de n'en trouver aucun contenant 9 sommets internes, suggérant ainsi la majoration qui suit.

3.2 Borne supérieure pour la fonction feuille

Dans cette section, nous fournissons une borne supérieure stricte pour la fonction L_{P2} . Plus précisément, nous prouvons la proposition suivante.

Proposition 1. *Pour tout entier naturel n ,*

$$L_{P2}(n) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ L_{P2}(n - 17) + 8 & \text{si } n \geq 19. \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour démontrer la proposition 1, nous procédons en cinq étapes :

1. Nous remarquons tout d'abord que dans tout sous-arbre induit d'un P2-graphe G , chaque tuile interne a un degré d'au plus 3 (Lemme 1) ;
2. Nous établissons une relation entre $n_1(I)$ et $n_3(I)$ pour tout sous-arbre induit I de G (Lemme 2) ;

3. Nous fournissons une borne supérieure large sur L_{P2} (Lemme 3) ;
4. Nous montrons que tout sous-arbre induit 3-interne-régulier de G possède au plus 8 tuiles internes (Lemme 4) ;
5. En utilisant un contre-exemple minimal, nous montrons que l'inéquation (3.1) est satisfaite.

L'étape 1 est directe.

Lemme 1 ([PB20]). *Soit I un sous-arbre induit d'un $P2$ -graphe. Alors pour toute tuile t dans I , $\deg_I(t) \leq 3$.*

Démonstration. Le résultat est prouvé dans [PB20], mais par souci d'exhaustivité, nous l'incluons ici. Il suffit de considérer tous les voisinages possibles d'un cerf-volant et d'une fléchette dans un pavage $P2$, illustrés dans la Figure 3.3 (détaillant les cinq configurations qui sont regroupées en deux sur la première ligne de la Figure 3.7, plus une configuration supplémentaire). Dans chaque cas, il existe au moins une paire de tuiles adjacentes parmi les quatre voisines d'une tuile, de sorte que le I -degré de t est au plus 3 pour tout sous-arbre induit I . \square

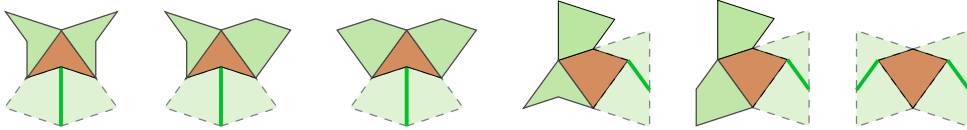


FIGURE 3.3 – Les six voisinages possibles, à isométrie près, d'une tuile $P2$. Une arête verte entre deux tuiles plus claires indique qu'elles ne peuvent pas se trouver toutes les deux dans le même sous-arbre induit que la tuile marron, puisqu'elles sont adjacentes l'une à l'autre et forment donc un cycle avec la tuile marron.

Les étapes 2 et 3 sont des conséquences du lemme 1.

Lemme 2. *Soit I un sous-arbre induit d'un $P2$ -graphe, contenant n tuiles. Alors*

$$n_1(I) = n_3(I) + 2. \quad (3.2)$$

Démonstration. Pour $d \in \{1, 2, 3\}$, soit $n_d = n_d(I)$. D'après le lemme 1, on a $n = n_1 + n_2 + n_3$ c'est-à-dire

$$n_2 = n - n_1 - n_3. \quad (3.3)$$

De plus, puisque I est un arbre, il a $n - 1$ arêtes donc par le lemme des poignées de main, $2(n - 1) = n_1 + 2n_2 + 3n_3$ soit

$$2n_2 = 2(n - 1) - n_1 - 3n_3. \quad (3.4)$$

En combinant les équations (3.3) et (3.4) on obtient le résultat. \square

Lemme 3. *Pour tous entiers n, k tels que $1 \leq k < n$,*

$$L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - k) + \lceil k/2 \rceil. \quad (3.5)$$

Démonstration. On prouve d'abord que $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - 1) + 1$ pour tout n . Par contradiction, supposons qu'il existe un entier n tel que $L_{P_2}(n) > L_{P_2}(n - 1) + 1$. Soit I un sous-arbre induit pleinement feuillu de taille n , tel que $n_1(I) = L_{P_2}(n)$, et J un sous-arbre obtenu de I en supprimant une feuille quelconque. Par construction de J , nous avons $n_1(J) \geq n_1(I) - 1$ et J est de taille $n - 1$, donc $n_1(J) \leq L_{P_2}(n - 1)$. Par conséquent, $L_{P_2}(n - 1) \geq n_1(J) \geq n_1(I) - 1 = L_{P_2}(n) - 1$. En utilisant l'hypothèse, cela implique $L_{P_2}(n - 1) > L_{P_2}(n - 1) + 1 - 1 = L_{P_2}(n - 1)$, ce qui est impossible.

Dans un deuxième temps, on montre que

$$L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - 2) + 1. \quad (3.6)$$

D'après le paragraphe précédent, $L_{P_2}(n - 1) \leq L_{P_2}(n - 2) + 1$. Ainsi, dans le cas où $L_{P_2}(n) = L_{P_2}(n - 1)$, on a $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - 2) + 1$. Sinon, en vertu du Lemme 1 ci-dessus, le Lemme 1 de [PB20] nous dit que pour tout entier positif n , si $L_{P_2}(n) > L_{P_2}(n - 1)$, alors $L_{P_2}(n + 1) \leq L_{P_2}(n)$. Or la fonction feuille des P2-graphes est non-décroissante (Proposition 1 de [PB20]), donc si $L_{P_2}(n) > L_{P_2}(n - 1)$, on a $L_{P_2}(n + 1) = L_{P_2}(n)$. Un corollaire est que si $L_{P_2}(n) > L_{P_2}(n - 1)$ alors $L_{P_2}(n - 1) = L_{P_2}(n - 2)$, ce qui implique aussi $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - 2) + 1$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver le cas général par induction sur k .

CAS DE BASE. Les cas $k = 1$ et $k = 2$ ont été prouvés dans les paragraphes précédents.

HYPOTHÈSE DE RÉCURRENCE (HR). On suppose que pour un entier $k \geq 3$ et tous les entiers naturels $k' < k$, on a $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(n - k') + \lceil k'/2 \rceil$.

INDUCTION. Alors

$$\begin{aligned} L_{P_2}(n - k) + \lceil k/2 \rceil &= L_{P_2}((n - 2) - (k - 2)) + \lceil k/2 \rceil \\ &= L_{P_2}((n - 2) - (k - 2)) + \lceil (k - 2)/2 \rceil + 1 \\ &\geq L_{P_2}(n - 2) + 1 && \text{(HR)} \\ &\geq L_{P_2}(n), && \text{équation (3.6)} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

Nous pouvons maintenant montrer que l'ensemble des sous-arbres induits 3-internes-réguliers d'un P2-graphe est fini, en en donnant une liste complète (à isométrie près).

Lemme 4. *Soit S l'ensemble des sous-arbres induits d'un pavage P2 illustré dans la figure 3.7, à isométrie près. Soit I un sous-arbre induit 3-interne-régulier d'un P2-graphe et I' son arbre dérivé. Alors $I' \in S$.*

Démonstration. Introduisons d'abord quelques notations, qui deviendront claires au fur et à mesure que nous examinerons de petits cas. Pour chaque entier positif n , notons $\mathcal{I}'(n)$ l'ensemble de tous les sous-arbres induits I' tels que I' a exactement n tuiles et qu'il existe un sous-arbre induit 3-interne-régulier dont l'arbre dérivé est I' . On dit qu'un sous-arbre induit E est une *extension* d'un sous-arbre I si $|E| = |I| + 1$ et I est un sous-arbre de E . Pour chaque entier positif n , notons $\mathcal{E}'(n)$ l'ensemble de toutes les extensions E des sous-arbres $I \in \mathcal{I}'(n-1)$, et $\mathcal{A}'(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}'(n)$ constitué de sous-arbres induits A tels que tout sous-arbre de A de taille $n' < n$ appartient à $\mathcal{I}'(n')$. En d'autres termes, un élément A de $\mathcal{A}'(n)$ est *admissible* dans le sens où tous ses sous-arbres propres sont dans $\mathcal{I}'(n')$ pour un certain n' , mais A peut ne pas être dans $\mathcal{I}'(n)$.

Il est clair que pour chaque entier positif n , nous avons $\mathcal{I}'(n) \subseteq \mathcal{A}'(n) \subseteq \mathcal{E}'(n)$. Soit alors $\mathcal{F}'(n) = \mathcal{A}'(n) - \mathcal{I}'(n)$ l'ensemble des motifs *interdits* dans $\mathcal{A}'(n)$ – pas interdits en tant que motifs P2 mais en tant que partie d'un sous-arbre induit 3-interne-régulier. Nous montrons que pour $1 \leq n \leq 8$ l'ensemble $\mathcal{I}'(n)$ est précisément l'ensemble apparaissant dans la Figure 3.7 (tuiles marron uniquement), puis par induction sur n que $\mathcal{I}'(n) = \emptyset$ pour $n \geq 9$. Soit $I' \in \mathcal{I}'(n)$, où $n \geq 1$.

POUR $n = 1$, I' est soit un cerf-volant, soit une fléchette. Ces deux tuiles apparaissent dans la figure 3.7 (ligne 1) et elles admettent toutes deux au moins un voisinage de 3 tuiles.

POUR $n = 2$, $\mathcal{A}'(2)$ a cinq éléments : les quatre sous-arbres marron de la Figure 3.7 (ligne 2) avec leurs voisinages possibles montrant qu'ils sont dans $\mathcal{I}'(2)$, plus les sous-arbres apparaissant dans la Figure 3.4 qui ne peuvent pas être dans un sous-arbre induit 3-interne-régulier. En effet, pour chaque configuration C de la Figure 3.4, si les tuiles marron sont de degré 3 alors il y a un cycle dans C . Par conséquent, les ensembles $\mathcal{I}'(2)$ et $\mathcal{F}'(2)$ sont illustrés respectivement dans les figures 3.7 (ligne 2) et 3.4.

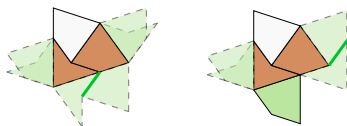


FIGURE 3.4 – L'unique élément de $\mathcal{F}'(2)$ (en marron), dédoublé pour mieux voir ses voisinages possibles.

POUR $n = 3$, $\mathcal{A}'(3)$ est l'ensemble des sous-arbres apparaissant à la ligne 3 de la figure 3.7 ou à la figure 3.5. Si tous les motifs de la figure 3.7 sont admissibles, aucun des cinq

cas de la figure 3.5 ne l'est. En effet, dans chaque cas de la figure 3.5, au plus une tuile parmi chaque paire adjacente $\{t_1, t_2\}$, $\{t_3, t_4\}$ et $\{t_5, t_6\}$ peut appartenir à I , et par le

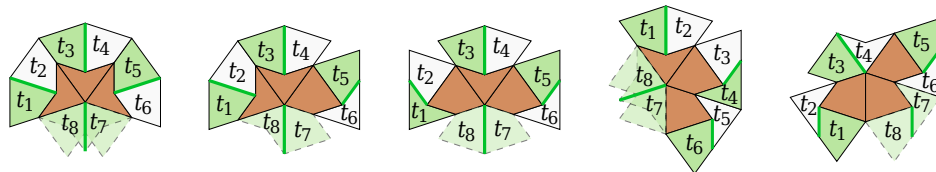


FIGURE 3.5 – Les cinq éléments de $\mathcal{F}'(3)$ (en marron), avec leurs voisinages possibles.

lemme 2 l'arbre devrait avoir 5 feuilles. Soit i_1, i_2, i_3 les tuiles choisies dans chacun des trois ensembles. Il existe alors un cycle formé par les tuiles i_1, i_2, i_3, t_7 et t_8 .

POUR $n = 4$, on observe que I' est nécessairement un chemin. En effet, la figure 3.6 illustre tous les sous-arbres dans $\mathcal{E}'(4)$ qui ne sont pas des chemins. Comme chacun d'entre eux contient au moins un motif interdit dans $\mathcal{F}'(3)$, on conclut qu'ils ne peuvent pas appartenir à $\mathcal{A}'(4)$. Finalement, tous les sous-arbres de $\mathcal{A}'(4)$ qui sont des chemins sont représentés sur la Figure 3.7 (ligne 4), et $\mathcal{F}'(4) = \emptyset$.

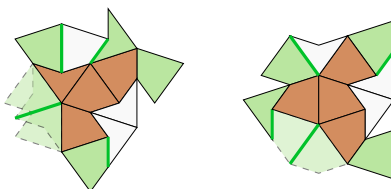


FIGURE 3.6 – Les extensions dans $\mathcal{E}'(4)$ qui ne sont pas des chemins.

POUR $n = 5$, l'ensemble des sous-arbres apparaissant dans la figure 3.7 (ligne 5) est $\mathcal{A}'(5)$. En effet, compte tenu des tuiles forcées autour de chaque élément de $\mathcal{I}'(4)$ et des observations faites précédemment, aucune autre extension n'est admissible.

POUR $n = 6, 7, 8$, en inspectant toutes les chaînes dans $\mathcal{E}'(n), n \in \{6, 7, 8\}$, on remarque que $\mathcal{A}'(n)$ est tel que représenté sur la Figure 3.7 (lignes 6, 7, 8 respectivement). Puisqu'ils sont tous admissibles, on conclut que $\mathcal{A}'(n) = \mathcal{I}'(n)$, de sorte que $\mathcal{F}'(n) = \emptyset$.

POUR $n = 9$, en inspectant toutes les chaînes dans $\mathcal{E}'(9)$, on observe qu'aucun d'entre eux n'est dans $\mathcal{A}'(9)$, puisqu'ils contiennent tous un motif interdit dans $\mathcal{F}'(n')$ pour un $n' < 9$. Par conséquent, $\mathcal{A}'(9) = \mathcal{I}'(9) = \emptyset$.

POUR $n \geq 10$. Par induction, puisque $\mathcal{I}'(n - 1) = \emptyset$, alors $\mathcal{E}'(n) = \emptyset$, donc $\mathcal{A}'(n) = \emptyset$ de sorte que $\mathcal{I}'(n) = \emptyset$, ce qui conclut la preuve. \square

Le lemme 4 a une conséquence intéressante :

Corollaire 1. *Soit I un sous-arbre induit 3-interne-régulier d'un P2-graphe. Alors I est une chenille.*

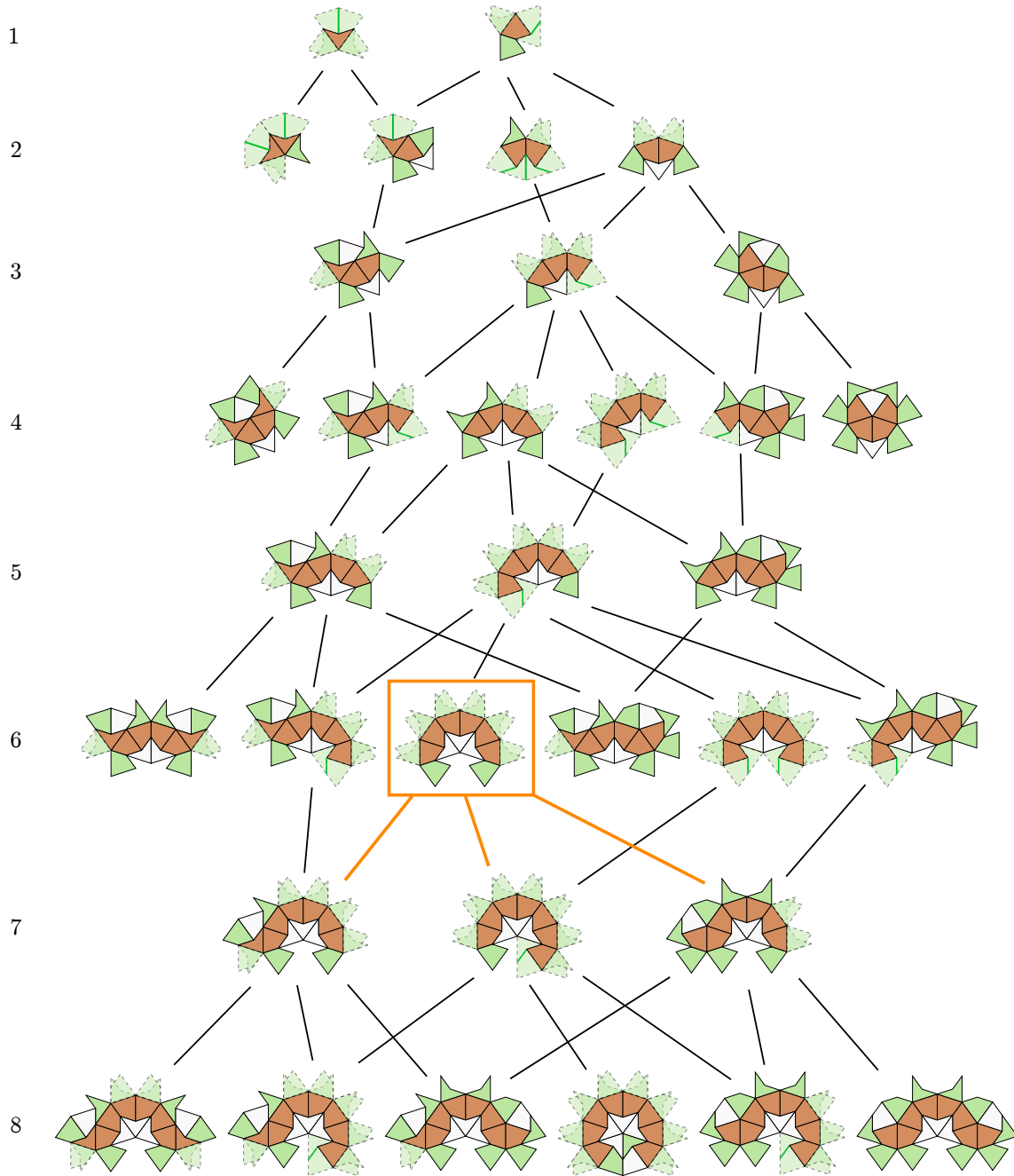


FIGURE 3.7 – Poset des chenilles 3-internes-régulières (à isométrie près). Pour chaque chenille, le chemin dérivé est marron, ses tuiles adjacentes qui ne peuvent pas être dans un sous-arbre induit sont blanches et les feuilles sont vertes. Certaines feuilles sont forcées en raison des règles locales des pavages de Penrose (par exemple, deux Soleils ne peuvent pas se toucher). Les feuilles translucides dont le contour est en pointillé indiquent qu’il existe deux possibilités : lorsque deux tuiles sont superposées ou adjacentes par une arête verte, seule l’une d’entre elles peut figurer dans le sous-arbre induit. Pour $1 \leq n \leq 8$, $\mathcal{I}'(n)$ est l’ensemble des chemins marron dans la ligne n de la Figure. L’ensemble $\mathcal{I}'(6)$ contient l’arbre dérivé d’une chenille spéciale, notée C_{14} , dans le rectangle orange : elle est incluse dans toutes les chenilles situées en dessous.

Démonstration. Soit I' l'arbre dérivé de I . Nous devons montrer que I' est un chemin. Si $|I'| \leq 3$, le résultat est immédiat. Sinon, supposons que $|I'| \geq 4$ et, par contradiction, que I' n'est pas un chemin. Alors I' contient un sous-arbre J de 4 tuiles, tel qu'une tuile t de J vérifie $\deg_{I'}(t) = 3$. Mais un tel pavage t n'existe pas : dans la preuve du lemme 4, nous avons montré que l'ensemble $\mathcal{A}'(4)$ ne contient que des chemins. Ceci contredit notre hypothèse précédente, ce qui conclut la preuve. \square

Avant de prouver la proposition 1, nous introduisons une définition utile adaptée de [BdG18]. On rappelle que l'intersection de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ est définie par $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, et pour leur union on a $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ (donc pas l'union disjointe, non pertinente ici).

Définition 1 (Adaptée de [BdG18]). **Factorisation d'arbres.** Soit I un sous-arbre induit d'un P2-graphe et t_1, t_2 deux tuiles adjacentes dans I . On dit que la paire de sous-arbres induits (I_1, I_2) est une factorisation de I à (t_1, t_2) , ou que I est la greffe de I_1 et I_2 si $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \{t_1, t_2\}$, t_2 est une feuille de I_1 et t_1 est une feuille de I_2 . On écrit alors $I = I_1 \diamond_{(t_1, t_2)} I_2$ ou simplement $I = I_1 \diamond I_2$ lorsque (t_1, t_2) sont clairement identifiées.

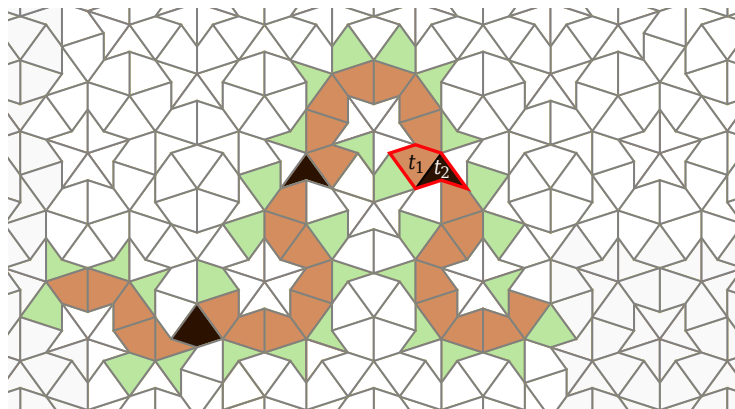


FIGURE 3.8 – Exemple de factorisation $I = I_1 \diamond I_2$ à (t_1, t_2) : I_1 est le sous-arbre de gauche dans I , incluant t_2 comme feuille, et I_2 est le sous-arbre de droite dans I , incluant t_1 comme feuille. Pour illustrer la preuve, nous avons choisi un cas où t_2 est la seule tuile de degré 2 dans I_2 .

Les identités suivantes sont des conséquences directes de la définition précédente. Pour tous sous-arbres induits I_1 et I_2 tels que $I_1 \diamond I_2$ est bien définie,

$$n(I_1 \diamond I_2) = n(I_1) + n(I_2) - 2, \quad (3.7)$$

$$n_1(I_1 \diamond I_2) = n_1(I_1) + n_1(I_2) - 2, \quad (3.8)$$

$$n_2(I_1 \diamond I_2) = n_2(I_1) + n_2(I_2), \quad (3.9)$$

$$n_3(I_1 \diamond I_2) = n_3(I_1) + n_3(I_2). \quad (3.10)$$

Nous sommes maintenant prêts à prouver la proposition 1.

Démonstration de la proposition 1. L'énumération exhaustive de tous les motifs de tuiles possibles montre que l'équation 3.1 est valable pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Supposons ensuite que $4 \leq n \leq 18$. D'une part, si n est pair, alors par le lemme 3, nous avons $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(2) + (n - 2)/2 = 2 + (n - 2)/2 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. D'autre part, si n est impair, alors par le lemme 3, nous avons $L_{P_2}(n) \leq L_{P_2}(3) + (n - 3)/2 = 2 + (n - 1)/2 - 1$, d'où $L_{P_2}(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Il reste à considérer le cas où $n \geq 19$. En argumentant par contradiction, supposons qu'il existe un entier $n \geq 19$ tel que $L_{P_2}(n) > L_{P_2}(n - 17) + 8$, choisissons ce n de façon à ce qu'il soit le plus petit possible et soit I un sous-arbre induit pleinement feuillu de taille n . Tout d'abord, on remarque que I contient au moins une tuile de degré 2. En effet, si $n_2(I) = 0$, alors

$$19 \leq n(I) = n_1(I) + n_2(I) + n_3(I) = (n_3(I) + 2) + 0 + n_3(I) = 2n_3(I) + 2,$$

ce qui implique $n_3 \geq 9$, contredisant le lemme 4. Ensuite, on observe qu'il existe une factorisation $I = I_1 \diamond I_2$ à (t_1, t_2) telle que $\deg_I(t_2) = 2$ et t_2 est la seule tuile de degré 2 dans I_2 (comme dans la Figure 3.8). Il découle donc du lemme 4 que $n(I_2) \leq 19$: à gauche de t_2 il n'y a que t_1 , et à sa droite il y a au plus 8 sommets internes (de degré 3) avec autant de feuilles plus 1 à l'extrémité. Pour conclure, nous considérons deux cas.

Tout d'abord, supposons que $n(I_2) \leq 18$. Puisque $n(I_2) = n_1(I_2) + n_2(I_2) + n_3(I_2)$, $n_2(I_2) = 1$ et $n_1(I_2) = n_3(I_2) + 2$, on a $n_1(I_2) = (n(I_2) + 1)/2$, ce qui implique aussi que $n(I_2)$ est impair. Mais par hypothèse $n_1(I) = L_{P_2}(n(I)) > L_{P_2}(n(I) - 17) + 8$ donc

$$n_1(I_1) = n_1(I) - n_1(I_2) + 2 > L_{P_2}(n(I) - 17) + 8 - n_1(I_2) + 2.$$

D'où $n_1(I_1) > L_{P_2}(n(I) - 17) - (n(I_2) + 1)/2 + 10 = L_{P_2}(n(I) - 17) + (19 - n(I_2))/2$.

Puisque $n(I_2)$ est impair, ceci se réécrit

$$n_1(I_1) > L_{P_2}((n(I) - n(I_2) + 2) - (19 - n(I_2))) + \lceil (19 - n(I_2))/2 \rceil$$

Ainsi, par le lemme 3 nous avons $n_1(I_1) > L_{P_2}(n(I) - n(I_2) + 2)$ c'est-à-dire $n_1(I_1) > L_{P_2}(n(I_1))$, ce qui est impossible par définition de la fonction feuille.

Enfin, supposons que $n(I_2) = 19$. Alors $n_1(I_2) = 10$, $n_2(I_2) = 1$, $n_3(I_2) = 8$ et

$$n(I_1) = n(I) - n(I_2) + 2 = n(I) - 19 + 2 = n(I) - 17.$$

On a aussi

$$n_1(I_1) = n_1(I) - n_1(I_2) + 2 = n_1(I) - 10 + 2 = n_1(I) - 8$$

mais l'hypothèse mène alors à la même contradiction :

$$n_1(I_1) > L_{P_2}(n(I) - 17) + 8 - 8 = L_{P_2}(n(I_1)).$$

□

3.3 Chenilles pleinement feuillues

Dans cette section, nous présentons une famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de P2-chenilles pleinement feuillues, c'est-à-dire des chenilles telles que $n_1(C_n) = L_{P_2}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et nous montrons que leur nombre de feuilles atteint la borne supérieure de la section précédente :

Proposition 2. *Soit C_n une chenille de Penrose construite comme décrit dans cette section. Alors*

$$n_1(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ n_1(C_{n-17}) + 8 & \text{si } n \geq 19. \end{cases}$$

La principale difficulté est de montrer que ces chenilles correspondent toutes à des motifs autorisés dans les pavages P2. Cette section décrit donc une construction récursive de chenilles optimales, qui peuvent devenir arbitrairement grandes. Nous procédons par recodages locaux à partir de chenilles élémentaires.

3.3.1 Les chenilles élémentaires C_{14} et C_{116}

En plus de prouver la borne supérieure, la section précédente nous donne des motifs optimaux. En particulier, les chenilles 3-internes-régulières de longueur 8 (dernière ligne de la Figure 3.7) incluent toutes la même chenille 3-interne-régulière de longueur 6 notée C_{14} , dont le chemin dérivé est composé de cerfs-volants entourant une Étoile. Nous appelons **grand soleil** (*big sun*) le motif composé d'une Étoile entourée de dix cerfs-volants, puisqu'il s'agit d'un Soleil inflaté une fois : l'inflation d'un cerf-volant est un As. Puisque nous nous intéressons aux feuilles, c'est-à-dire aux tuiles adjacentes au chemin dérivé des chenilles optimales, nous appelons **fleur** (*flower*) tout motif composé d'un grand soleil et de ses tuiles adjacentes.

Afin d'avoir le plus grand nombre possible de sommets de degré 3 (avec une feuille attachée à chacun, contrairement aux sommets de degré 2), un sous-arbre induit doit

inclure le plus grand nombre possible de fleurs. Idéalement, nous voudrions une chenille dont les sommets internes (en suivant le chemin dérivé) alternent 8 sommets de degré 3, puis 1 de degré 2, puis 8 de degré 3 et ainsi de suite. La question est de savoir s'il est possible de trouver de telles chenilles arbitrairement grandes dans un pavage P2. Puisque les pavages de Penrose ont la propriété d'isomorphisme local, si un tel motif apparaît dans l'un d'entre eux, alors il apparaît dans tous (une infinité de fois). La figure 3.9 montre que c'est possible jusqu'à un sous-arbre induit de 116 sommets, avec $L_{P_2}(116) = 54$ feuilles.

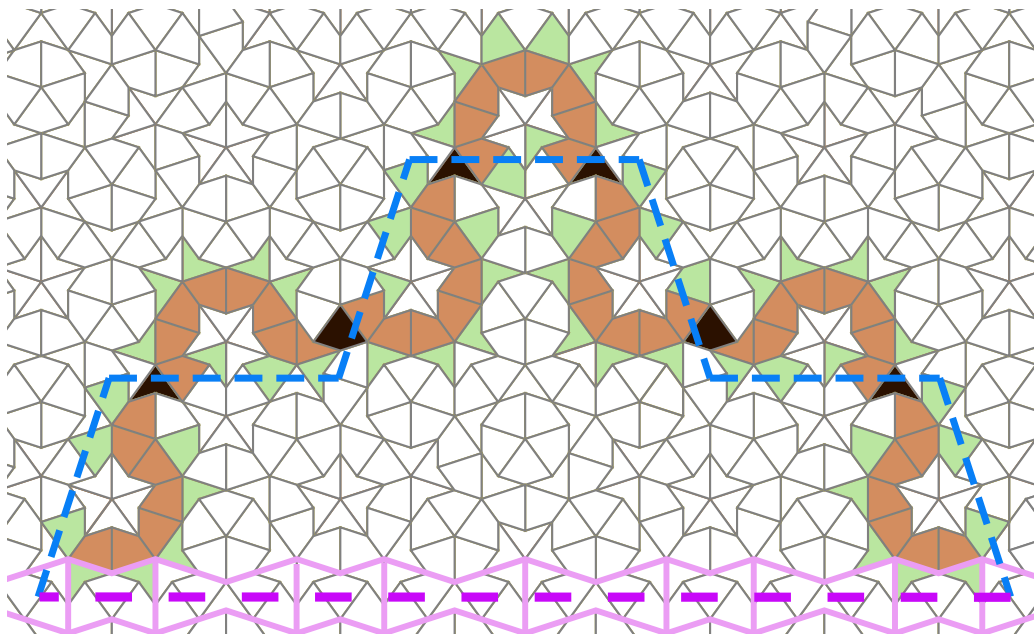


FIGURE 3.9 – Chenille optimale C_{116} , constituée de sept chenilles 3-interne-régulières de longueur 8, alternant avec des sommets isolés de degré 2 (en noir), dont nous avons retiré les feuilles adjacentes aux extrémités du chemin intérieur. Certaines feuilles peuvent être placées différemment (comme dans la figure 3.7).

Nous avons trouvé des chenilles optimales beaucoup plus grandes que celle-ci, mais ce sous-arbre spécifique, que nous appelons C_{116} , est l'élément de base de la construction qui suit. C_{116} est constitué de sept copies de C_{14} (la forme des feuilles n'a pas d'importance) reliées entre elles par l'ajout de 3 tuiles : une tuile noire (de degré 2) relie une feuille se situant à l'extrémité d'une fleur à une feuille se situant à l'extrémité d'une autre, puis une nouvelle feuille est ajoutée sur chacune d'entre elles – qui devient ainsi un sommet de degré 3 dans la chenille. C_{116} est placé au-dessus d'un **ver de Conway** (*Conway worm*), c'est-à-dire une succession de **nœuds papillons** (*bowties*) longs et courts (les petits motifs délimités en rose) placés bord à bord. Dans les images suivantes comme dans celle-ci, ce ver de Conway est représenté par une ligne violette en pointillés. Il est en

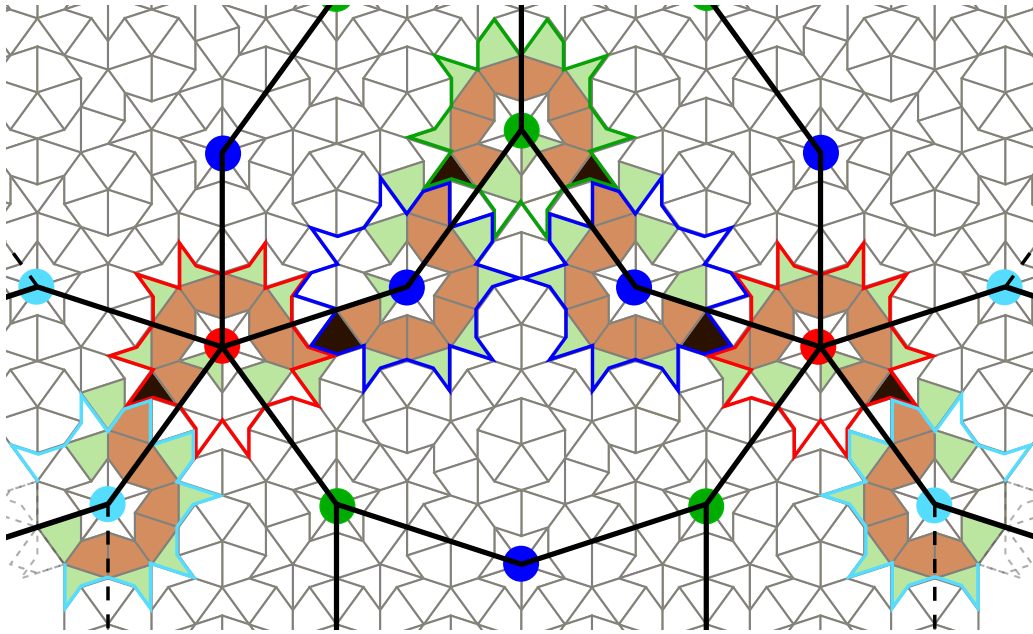
fait obtenu en inflatant trois fois les tuiles intersectées par un segment bleu en pointillé (sous chaque copie de C_{14}).

En fait, C_{116} peut être vu comme une φ^3 -inflation de C_{14} . En effet, les trois copies centrales de C_{14} ont leur chemin dérivé dans le royaume d'un Roi, et la plupart de leurs feuilles dans les vers de Conway qui l'entourent (dirigés par des segments bleus). Quand on inflat trois fois le royaume et les vers adjacents, on obtient le ver du bas (rose) ainsi que ceux qui montent sur les côtés (dirigés par les premier et dernier segments bleus) et toutes les tuiles délimitées par eux – plus d'autres au-dessus, dont on n'a pas besoin ici. Ainsi, chaque fois qu'il existe une copie de la fleur du haut avec le Roi sous le segment bleu et des vers sur les côtés dans la même orientation, on peut dessiner une copie de C_{116} dans le motif obtenu suite à une φ^3 -décomposition. A chaque extrémité de la chenille, il est toujours possible de prolonger le chemin sur le côté (par la feuille cerf-volant) ou en dessous, traversant ainsi le segment violet (par la feuille fléchette).

3.3.2 Relation avec les pavages Star

Ajoutons maintenant quelques informations sur l'image (Figure 3.10). Il y a trois types de Soleils si l'on tient compte de leurs tuiles adjacentes [Bru81], donc trois types de fleurs. Nous attribuons une couleur différente à chacune d'entre elles : l'Étoile peut être adjacente à 0 (rouge), 1 (vert) ou 2 (bleu) Soleils. Lorsque le motif de base optimal apparaît, les fleurs "intérieures" successives sont toujours du même type (02120), mais la première et la dernière sur le chemin peuvent être 1 ou 2, c'est pourquoi nous les colorons en cyan sur l'image. On remarque que les fleurs dans C_{116} sont adjacentes les unes aux autres, et que leurs tuiles adjacentes se trouvent à l'intérieur d'un nœud papillon court. Ainsi, la distance minimale entre (les centres de) deux Étoiles consécutives est de 3 arêtes longues + 2 arêtes courtes, soit $3 + 2\varphi = \varphi^3$. En joignant deux Étoiles par un segment chaque fois que la distance entre elles est minimale, on peut voir apparaître les formes HBS.

Les tuiles HBS obtenues ici correspondent à la φ^3 -composition de celles que nous obtiendrions avec la dérivation habituelle des tuiles HBS à partir des cerfs-volants et des fléchettes. En particulier, en colorant les sommets des formes HBS selon le type de fleur, les couleurs sont toujours les mêmes sur les hexagones et les bateaux, tandis que les étoiles sont de trois types, avec 0, 1 ou 2 sommets rouges. C'est ainsi que nous avons obtenu le *Star tiling* (Figure 2.2). La séquence 02120 suivie par le chemin dérivé de C_{116} n'apparaît que dans les bateaux (comme sur la figure) et dans les étoiles de type 2, qui

FIGURE 3.10 – Chenille C_{116} , avec observations supplémentaires sur sa structure.

sont entourées par quatre hexagones et seulement un bateau. Quant à la première et à la dernière fleur de C_{116} , en raison de la configuration des sommets dans les pavages Star, elles se trouvent sur les côtés des hexagones qui partagent un sommet 0 (rouge) avec le bateau/l'étoile.

La figure 3.11 montre comment les copies connectées de C_{116} serpentent autour des bords d'un pavage Star. Les copies de C_{116} dans cette longue chenille pleinement feuillue sont connectées de la même manière que nous l'avons fait avec C_{14} pour construire C_{116} . Une "règle" est forcée : si vous étendez une chenille sur le côté, alors vous connecterez la copie adjacente de C_{116} par le bas (en traversant son segment violet), et vice-versa. Ceci est dû aux couleurs des fleurs que l'on connecte, qui doivent être différentes (une bleue et une verte) pour suivre le côté d'un hexagone. Une observation intéressante peut être faite : si l'on suit la ligne composée de segments bleus en pointillés, les copies de C_{14} alternent les côtés (gauche-droite-gauche-droite-gauche et ainsi de suite). La même observation peut être faite pour les copies de C_{116} en suivant la ligne en pointillés violets. Il semble donc y avoir une certaine logique. Pourtant, le chemin suivi par la chenille semble encore un peu aléatoire, avec des virages inattendus, c'est pourquoi nous utilisons les pavages Star pour exhiber une structure plus grande.

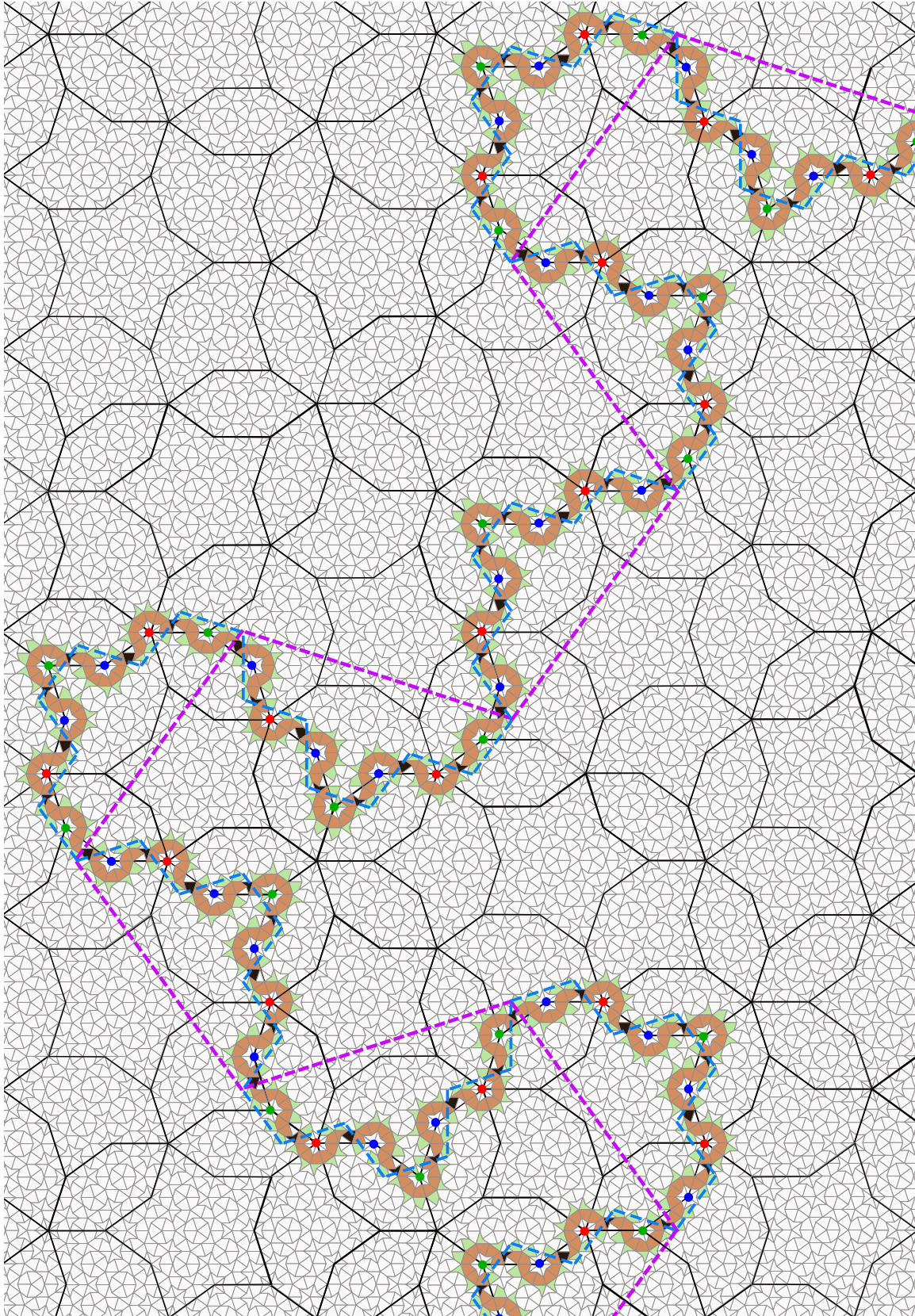


FIGURE 3.11 – Longue chenille pleinement feuillue.

3.3.3 Chemins optimaux dans les pavages Star

Dans la figure 3.12, nous avons tracé en marron les bords du pavage Star autour desquels la chenille serpente, mais pas la chenille elle-même : les cerfs-volants et les fléchettes sont omis car ils seraient trop petits et nous savons maintenant comment reconstruire une chenille optimale à partir du chemin approprié dans le pavage Star. Nous avons donc un chemin optimal beaucoup plus long que celui de la Figure 3.11 – et l’incluons dans le rectangle bleu. Les mêmes segments violets en pointillés sont représentés, dont les extrémités sont toujours au centre des décagones (constitués d’un bateau surmonté de deux hexagones) qui se trouvent de part et d’autre de la même configuration bateau+étoile (BS). De même, la φ^3 -composition du pavage apparaît en rose, ainsi qu’un chemin optimal dans celle-ci (en rouge). Elle peut être obtenue directement en joignant les centres des étoiles qui sont à une distance minimale les unes des autres (au lieu de composer trois fois). Comme les segments magenta en pointillés sont dessinés sous chaque φ^3 - C_{116} de la même manière que les segments violets dans la version unitaire, il apparaît que chaque segment magenta peut être décomposé en 7 segments violets formant une ligne d’une extrémité à l’autre, et que la décomposition alterne les côtés autour de la ligne magenta, en changeant à chaque tournant.

Dans toutes les lignes en pointillés (bleues, violettes, magenta), les angles des virages sont $\pm \frac{3\pi}{5}$ et les directions des segments sont celles des barres d’Ammann du pavage (fines lignes rouges). L’espacement entre deux barres d’Ammann parallèles consécutives ne peut prendre que deux valeurs : il est soit long (L), soit court (S). Les règles de substitution sont celles du mot de Fibonacci. Les lignes droites bleues, vertes et orange sont la φ^3 -composition des barres d’Ammann, avec des espacements notés respectivement \mathcal{L} et \mathcal{S} . Le motif étant symétrique par rapport à la ligne verticale centrale, nous utilisons la même couleur pour les angles $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$ (vert) ainsi que pour $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ (bleu). La figure 3.13 montre une portion de base isolée du chemin ainsi que sa décomposition. En fait, chaque segment en pointillés passe par le milieu d’un ver qui peut être retourné : la barre d’Ammann la plus proche du segment (dans la même direction) peut également se trouver de l’autre côté du segment, à la même distance. L’impact d’un tel retournement sur le pavage est que les décagones et les configurations BS à l’intérieur du ver sont retournés par rapport à la ligne centrale (en pointillés). La “magie” de nos configurations est que la décomposition fonctionne toujours ! En effet, lorsqu’un BS se trouve dans un ver, l’étoile est nécessairement de type 2, il y a donc des hexagones des deux côtés du BS , et lorsqu’un ver est décomposé, nous avons toujours un ver le long de la même ligne en pointillés dans le pavage décomposé, donc les configurations du BS sont les mêmes. Par conséquent, le

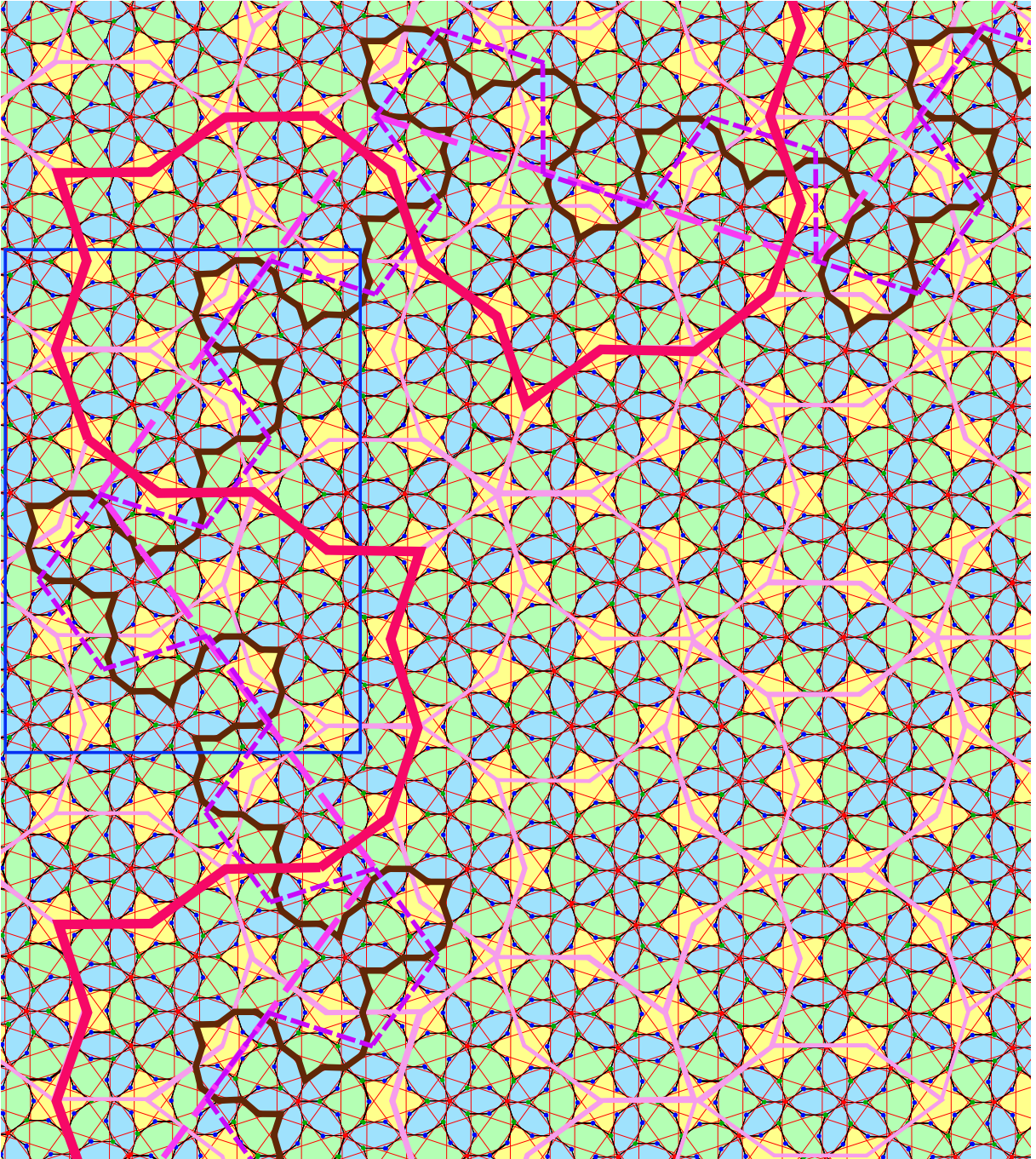


FIGURE 3.12 – Long chemin optimal dans un pavage Star (en marron). La partie située dans le rectangle bleu est identique à celle de la figure 3.11, bien que le pavage Star sous-jacent ne soit pas le même. Le chemin rouge est optimal dans la φ^3 -composition du pavage (tracée en rose).

milieu du chemin décomposé peut suivre les côtés des hexagones entourant le BS , quelle que soit l'orientation du ver. Quant à la partie du chemin située sous le ver, en raison de la présence d'une étoile de type 2 et des tuiles qu'elle force autour (le royaume de l'étoile

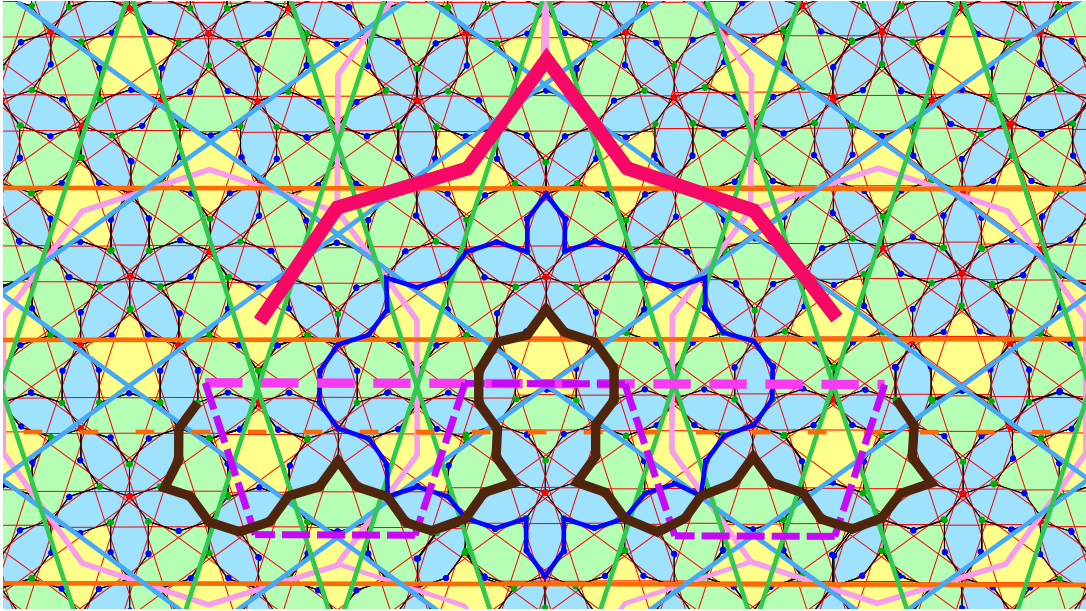


FIGURE 3.13 – Décomposition d'un segment magenta et du chemin correspondant (rouge) dans le φ^3 -pavage Star, donnant une φ^3 - C_{116} . Les 7 segments violets donnent un chemin optimal (marron) dans le pavage Star, qui donne une chenille pleinement feuillue C_{830} – composée de 7 copies de C_{116} et de 3 tuiles supplémentaires à chacune des 6 jonctions (virages de la ligne violette).

S2 est délimité en bleu roi sur la Figure 3.13), les configurations au-dessus et au-dessous du ver sont les mêmes, là encore quelle que soit l'orientation du ver, et le chemin peut donc être le même. Notons qu'en raison des restrictions sur les barres d'Ammann, si le ver le long du segment magenta est inversé, celui le long des segments parallèles violets ne peut pas l'être aussi. En conséquence, le chemin est forcé de se prolonger sur les côtés des C_{116} correspondantes et non en dessous – ce qui est bien ce qu'on veut. C'est d'ailleurs ce qui arrive ici avec la φ^3 -décomposition.

3.3.4 Construction de la famille $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Nous pouvons maintenant décrire une procédure récursive pour définir une famille de chenilles pleinement feuillues $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous avons déjà C_{116} et ses inflations successives, par la construction ci-dessus. L'algorithme suivant permet de construire les chenilles pour toutes les tailles intermédiaires (entre les inflations).

- 1: **fonction** CHENILLEOPTIMALE(n : entier naturel) : chenille
- 2: $C \leftarrow$ chenille de taille m obtenue par inflations de C_{116} , telle que $m > n + 15$
- 3: $v \leftarrow$ premier sommet de degré 2 dans C
- 4: $T \leftarrow$ chenille vide

```

5:    $k \leftarrow 0$ 
6:   tant que  $k < n$  faire
7:     si  $v$  n'est pas dans  $T$  alors ajouter  $v$  à  $T$ 
8:     sinon si  $v$  a une feuille  $\ell$  qui n'est pas dans  $T$  alors ajouter  $\ell$  à  $T$ 
9:     sinon  $v \leftarrow$  successeur de  $v$  dans  $C$ 
10:     $k \leftarrow k + 1$ 
11:  fin tant que
12:  retourner  $T$ 
13: fin fonction

```

Comme le chemin dérivé alterne bien 8 sommets de degré 3 (dans la chenille) avec 1 sommet de degré 2, et qu'on prend toutes les feuilles, le nombre de feuilles atteint la borne supérieure pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons donc prouvé la Proposition 2. En conséquence, nous avons :

Corollaire 2.

$$L_{P_2}(n) \geq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ L_{P_2}(n-17) + 8 & \text{si } n \geq 19. \end{cases}$$

Le théorème 1 découle de la proposition 1 et du corollaire 2.

3.4 Remarques finales

Bien que la formule récursive pour L_{P_2} soit assez simple, il peut être plus pratique d'avoir une formule close. C'est pourquoi nous la donnons ici.

Proposition 3. *La formule close de la fonction feuille des P_2 -graphes est*

$$L_{P_2}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq n \leq 1, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 1 & \text{si } 2 \leq n \leq 18, \\ \lfloor (n+1)/2 \rfloor & \text{si } 19 \leq n \leq 35, \\ 8 \lfloor n/17 \rfloor + \lfloor (n \bmod 17)/2 \rfloor + \mathbb{1}(n \bmod 17 > 1) & \text{si } n \geq 36. \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons déjà $L_{P_2}(n)$ pour $n \leq 18$.

Pour $19 \leq n \leq 35$, on a $L_{P_2}(n) = L_{P_2}(n-17) + 8$ avec $2 \leq n-17 \leq 18$ donc

$$L_{P_2}(n) = \lfloor (n-17)/2 \rfloor + 1 + 8 = \lfloor (n+1-18)/2 \rfloor + 9 = \lfloor (n+1)/2 \rfloor.$$

Nous montrons ensuite un résultat intermédiaire, par induction forte : pour $n \geq 36$,

$$L_{P_2}(n) = L_{P_2}(n - 17(\lfloor n/17 \rfloor - 1)) + 8(\lfloor n/17 \rfloor - 1).$$

CAS DE BASE. Pour $n = 36$

$$L_{P_2}(36 - 17(\lfloor 36/17 \rfloor - 1)) + 8(\lfloor 36/17 \rfloor - 1) = L_{P_2}(36 - 17) + 8 = L_{P_2}(36).$$

HYPOTHÈSE D'INDUCTION. Pour un entier $n \geq 36$, pour tout entier k tel que $36 \leq k \leq n$,

$$L_{P_2}(k) = L_{P_2}(k - 17(\lfloor k/17 \rfloor - 1)) + 8(\lfloor k/17 \rfloor - 1).$$

INDUCTION. Pour $n + 1$ on a $L_{P_2}(n + 1) = L_{P_2}(n + 1 - 17) + 8 = L_{P_2}(n - 16) + 8$ avec $n - 16 \geq 19$ donc nous pouvons utiliser l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} L_{P_2}(n + 1) &= L_{P_2}\left(n - 16 - 17\left(\left\lfloor \frac{n - 16}{17} \right\rfloor - 1\right)\right) + 8\left(\left\lfloor \frac{n - 16}{17} \right\rfloor - 1\right) + 8 \\ &= L_{P_2}\left(n - 16 - 17\left(\left\lfloor \frac{n + 1}{17} \right\rfloor - 2\right)\right) + 8\left(\left\lfloor \frac{n + 1}{17} \right\rfloor - 2\right) + 8 \\ &= L_{P_2}\left(n + 1 - 17\left(\left\lfloor \frac{n + 1}{17} \right\rfloor - 1\right)\right) + 8\left(\left\lfloor \frac{n + 1}{17} \right\rfloor - 1\right). \end{aligned}$$

Enfin, pour arriver au résultat on note $n = 17q + r$ avec $q = \lfloor n/17 \rfloor$ et $r = n \bmod 17$.
On a donc

$$\begin{aligned} L_{P_2}(n) &= L_{P_2}(17q + r - 17(q - 1)) + 8(q - 1) \\ &= L_{P_2}(r + 17) + 8(q - 1) \\ &= L_{P_2}(r) + 8q \end{aligned}$$

Par conséquent, si $r = 0$ ou $r = 1$ alors $L_{P_2}(n) = 8q = 8q + \lfloor r/2 \rfloor + \mathbb{1}(r > 1)$; sinon $L_{P_2}(n) = \lfloor r/2 \rfloor + 1 + 8q = 8q + \lfloor r/2 \rfloor + \mathbb{1}(r > 1)$. \square

Corollaire 3. *La croissance asymptotique de la fonction feuille des pavages P_2 de Penrose est $L_{P_2}(n) \sim 8n/17$.*

Comme $8/17 \simeq 0,47$, on se trouve à peu près au milieu de l'intervalle obtenu avec les bornes précédentes. En effet, nous avons $2\varphi n/(4\varphi + 1) \leq L_{P_2}(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$, ce qui implique $0,433n \leq L_{P_2}(n) \leq n/2 + 1$.

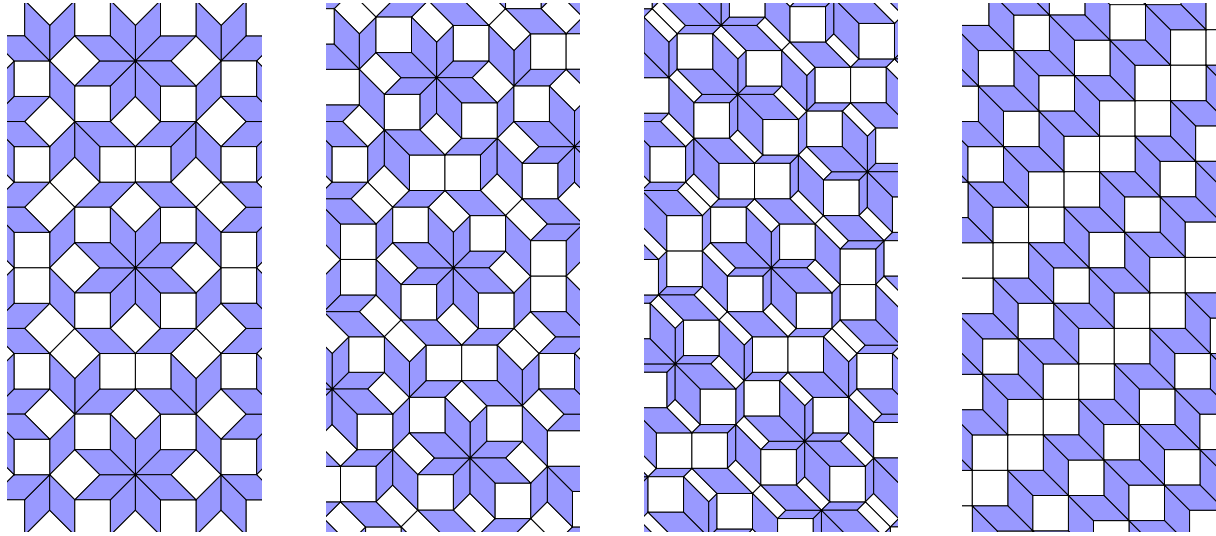
Chapitre 4

Ensembles apériodiques et barres d’Ammann pour des pavages $4 \rightarrow 2$

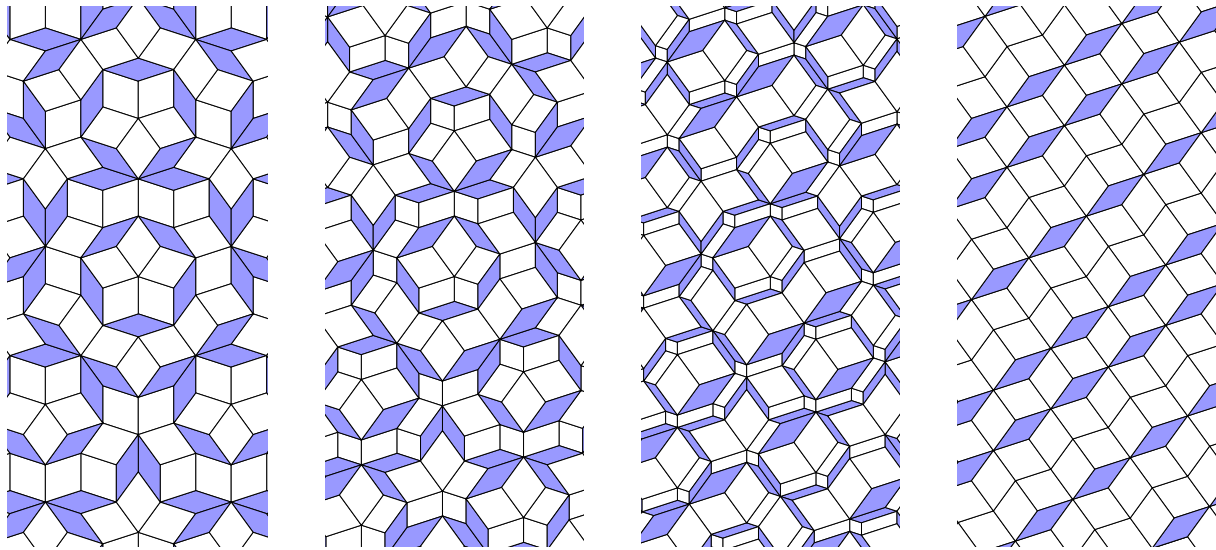
Ce chapitre reprend l’article [FP23] co-écrit avec mon directeur de thèse Thomas Fernique. Il décrit comment, sous certaines conditions, construire un ensemble apériodique de tuiles décorées donnant des barres d’Ammann à des pavages définis par coupe et projection, en utilisant des propriétés de leur pente. Nous avons commencé par trouver une pente particulière, celle des pavages cyrénaïques, pour obtenir un premier exemple, présenté à la conférence LATIN 2022 [PF22], avant de généraliser à toutes les pentes de $4 \rightarrow 2$ vérifiant les bonnes conditions. La construction repose notamment sur les *sous-périodes*, définies et illustrées dans la section 1. On observe en effet des liens étroits entre celles-ci et les barres d’Ammann dans le cas de Penrose (P3). En section 2 on définit ce que nous appelons *bonne projection* et détaille comment en trouver une, quand elle existe, puis le cas échéant comment construire le jeu de tuiles décorées correspondant. Enfin, en section 3 on prouve que l’ensemble obtenu est nécessairement apériodique quand la pente est totalement irrationnelle.

4.1 Ombres et sous-périodes

On adapte ici les définitions de Bédaride et Fernique [BF13]. L’**ombre** i_1, \dots, i_{n-3} (i_1, \dots, i_{n-3} -*shadow*) d’un pavage $n \rightarrow 2$ (avec $n \geq 4$) est la projection orthogonale $\omega_{i_1, \dots, i_{n-3}}$ de son relevé sur l’espace engendré par $\{e_j \mid 0 \leq j \leq n-1, j \neq i_1, \dots, i_{n-3}\}$. Cela correspond à réduire à zéro des longueurs de $\pi(e_{i_1}), \dots, \pi(e_{i_{n-3}})$ dans le pavage, de sorte que les tuiles définies par ces vecteurs disparaissent, tel qu’illustré à la figure 4.1. Un pavage $n \rightarrow 2$ possède donc $\binom{n}{3}$ ombres.



(a) À partir d'un pavage d'Ammann-Beenker (à gauche), on réduit progressivement la longueur d'un des quatre vecteurs définissant les tuiles, jusqu'à ce qu'elle soit nulle (à droite). L'ombre ainsi obtenue est périodique dans une direction.



(b) À partir d'un pavage de Penrose (à gauche), on réduit progressivement les longueurs de deux des cinq vecteurs définissant les tuiles, jusqu'à ce qu'elles soient nulles (à droite). L'ombre ainsi obtenue est périodique dans une direction.

FIGURE 4.1 – Ombres de pavages d'Ammann-Beenker et de Penrose.

Initialement, une **sous-période** i_1, \dots, i_{n-3} (i_1, \dots, i_{n-3} -*subperiod*) d'un pavage $n \rightarrow 2$ est une période première de son ombre i_1, \dots, i_{n-3} , donc un vecteur entier dans \mathbb{R}^3 . Par extension, on appelle sous-période d'une pente E tout vecteur de E qui se projette sur une sous-période d'un pavage de pente E . Une sous-période est donc un vecteur de E à 3 coordonnées entières : celles des positions $j \notin \{i_1, \dots, i_{n-3}\}$. On dit qu'une pente est

déterminée ou caractérisée par ses sous-périodes si seul un nombre fini de pentes ont les mêmes sous-périodes (dans les ombres). Par exemple, la pente des pavages d'Ammann-Beenker a quatre sous-périodes :

$$\begin{aligned} p_0 &= (\sqrt{2}, 1, 0, -1), \\ p_1 &= (1, \sqrt{2}, 1, 0), \\ p_2 &= (0, 1, \sqrt{2}, 1), \\ p_3 &= (-1, 0, 1, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

tandis que celle des pavages de Penrose en compte dix, chacun avec deux coordonnées non entières. Leurs liens avec les barres d'Ammann sont détaillés à la section suivante.

Cette notion a d'abord été introduite par Levitov [Lev88] sous le nom de *second intersection condition*, puis développée par Bédaride et Fernique, qui ont montré dans [BF15b] et [BF17] que dans le cas des pavages $4 \rightarrow 2$, un plan admet des règles locales faibles si et seulement s'il est déterminé par ses sous-périodes. On sait [BF13] que ce n'est pas le cas pour les pavages d'Ammann-Beenker : en effet, leurs sous-périodes sont aussi des sous-périodes de tous les pavages de Beenker (introduits dans [Bee82]), c'est-à-dire les pavages planaires de pente engendrée pour tout $s \in (0, \infty)$ par

$$u = (1, 2/s, 1, 0) \quad \text{and} \quad v = (0, 1, s, 1).$$

Les pavages d'Ammann-Beenker correspondent au cas $s = \sqrt{2}$ et n'admettent pas de règles locales. En revanche, les pavages de Penrose généralisés ont une pente caractérisée par ses sous-périodes [BF15b] et admettent des règles locales.

Dans cet article, nous nous concentrons sur les pavages $4 \rightarrow 2$ ayant une pente irrationnelle E caractérisée par quatre sous-périodes. Dans ce cas, chaque sous-période de E a exactement une coordonnée non entière. Puisque les sommets du pavage sont des points projetés de \mathbb{Z}^4 , nous définissons des "versions entières" des sous-périodes : si $p_i = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ est une sous-période, alors ses versions plancher et plafond sont respectivement $\lfloor p_i \rfloor = (\lfloor x_0 \rfloor, \lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \lfloor x_3 \rfloor)$ et $\lceil p_i \rceil = (\lceil x_0 \rceil, \lceil x_1 \rceil, \lceil x_2 \rceil, \lceil x_3 \rceil)$. Notez que seule la coordonnée non entière x_i est affectée, que $\lfloor p_i \rfloor, \lceil p_i \rceil \notin E$ et que $\lceil p_i \rceil - \lfloor p_i \rfloor = e_i$.

4.2 Barres d'Ammann et sous-périodes de Penrose

Voici les liens que nous avons observés entre les barres d'Ammann des pavages de Penrose et les sous-périodes de leur pente.

4.2.1 Sous-périodes de Penrose

Comme les pavages de Penrose sont des $5 \rightarrow 2$, leurs sous-périodes sont de la forme $p_{ij} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ et $x_k \in \mathbb{Z}$ pour $k \notin \{i, j\}$:

$$\begin{array}{ll}
 p_{01} = (1 - \varphi, \varphi - 1, 1, 0, -1), & p_{02} = (-\varphi, 0, \varphi, 1, -1), \\
 p_{03} = (\varphi, 1, -1, -\varphi, 0), & p_{04} = (\varphi - 1, 1, 0, -1, 1 - \varphi), \\
 p_{12} = (1, \varphi - 1, 1 - \varphi, -1, 0), & p_{13} = (1, \varphi, 0, -\varphi, -1), \\
 p_{14} = (0, \varphi, 1, -1, -\varphi), & p_{23} = (0, 1, \varphi - 1, 1 - \varphi, -1), \\
 p_{24} = (1, -1, -\varphi, 0, \varphi), & p_{34} = (1, 0, -1, 1 - \varphi, \varphi - 1).
 \end{array}$$

Dans ce qui suit, tous les indices sont dans \mathbb{F}_5 (toutes les opérations sont modulo 5) et nous définissons également certaines “versions entières” des sous-périodes, avec $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i < j$:

- pour le “plafond-plancher” $\lceil p_{ij} \rceil$, dans p_{ij} on remplace x_i par $\lceil x_i \rceil$ et x_j par $\lceil x_j \rceil$,
- pour le “plancher-plafond” $\lfloor p_{ij} \rfloor$, dans p_{ij} on remplace x_i par $\lfloor x_i \rfloor$ et x_j par $\lfloor x_j \rfloor$.

D’abord, on observe que pour chaque sous-période, $\pi(\lceil p_{ij} \rceil)$ et $\pi(\lfloor p_{ij} \rfloor)$ ont la même direction que $\pi(p_{ij})$, où π désigne la projection orthogonale sur la pente. Plus précisément,

- le plus court de $\pi(\lfloor p_{i,i+1} \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_{i,i+1} \rceil)$ (le premier sauf pour $i = 3$) est égal à $\pi(e_{\min(i-1, i+2)}) - \pi(e_{\max(i-1, i+2)})$ qui a la même direction que $\pi(e_i) - \pi(e_{i+1})$ et correspond à la diagonale longue d’un losange fin, et l’autre est φ fois plus longue ;
- le plus court de $\pi(\lfloor p_{i,i+2} \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_{i,i+2} \rceil)$ est égal à $\pm\varphi(\pi(e_i) - \pi(e_{i+2}))$ ce qui correspond à la diagonale courte d’un losange épais, et l’autre est φ fois plus longue (ce qui correspond à la diagonale longue d’un losange épais).

Par exemple, $\lfloor p_{14} \rfloor = (0, 1, 1, -1, -1)$, $\lceil p_{14} \rceil = (0, 2, 1, -1, -2)$, et pour $a \in \mathbb{R}$ on a

$$(0, 1 + a, 1, -1, -(1 + a)) = ae_1 + (e_1 + e_2) - (e_3 + e_4) - ae_4$$

Par conséquent, comme $\pi(e_i + e_{i+1}) = -\varphi\pi(e_{i-2})$ pour tout $i \in \mathbb{F}_5$,

$$\begin{aligned}
 \pi(0, 1 + a, 1, -1, -(1 + a)) &= a\pi(e_1) - \varphi\pi(e_4) + \varphi\pi(e_1) - a\pi(e_4) \\
 &= (\varphi + a)(\pi(e_1) - \pi(e_4))
 \end{aligned}$$

Donc pour $a = 0, \varphi - 1, 1$ on obtient que $\pi(\lfloor p_{14} \rfloor)$, $\pi(p_{14})$ et $\pi(\lceil p_{14} \rceil)$ sont colinéaires. Seul l’ordre des coordonnées change pour les autres sous-périodes.

4.2.2 Liens avec les barres d'Ammann

Tout d'abord, les directions des sous-périodes sont les mêmes que celles des barres d'Ammann, $\pi(p_{ij})$ étant orthogonale à $\pi(e_i) + \pi(e_j)$ pour tous i, j . Par exemple, $p_{01} \perp e_3$ et nous avons $\pi(e_0) + \pi(e_1) = -\varphi\pi(e_3)$ puisque la diagonale longue d'un losange épais est φ fois plus longue que le côté. La figure 4.2 illustre ces relations, qui sont les mêmes dans toutes les directions à rotation près : elle montre une partie d'un pavage de Penrose avec des barres d'Ammann ainsi que $\lfloor p_{ij} \rfloor$ et $\lceil p_{ij} \rceil$ pour une sous-période. De plus, lorsque le côté d'une tuile a pour longueur φ , d'une part les "distances" entre les barres d'Ammann d'un ensemble donné, mesurées non pas orthogonalement mais avec un angle de $\frac{2\pi}{5}$ (72 degrés) sont $S = 2 \sin \frac{2\pi}{5}$ et $L = \varphi S$; et d'autre part, les normes de $\pi(\lfloor p_{i,i+1} \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_{i,i+1} \rceil)$ sont L et $S + L = \varphi L$, c'est à dire φ fois plus longues (la diagonale longue d'un losange fin a une longueur de L). Notons qu'il y a exactement un segment d'Ammann dans chaque direction dans chaque tuile. Ainsi, en tenant compte des distances entre barres consécutives, le respect des conditions sur les barres d'Ammann force les sous-périodes.

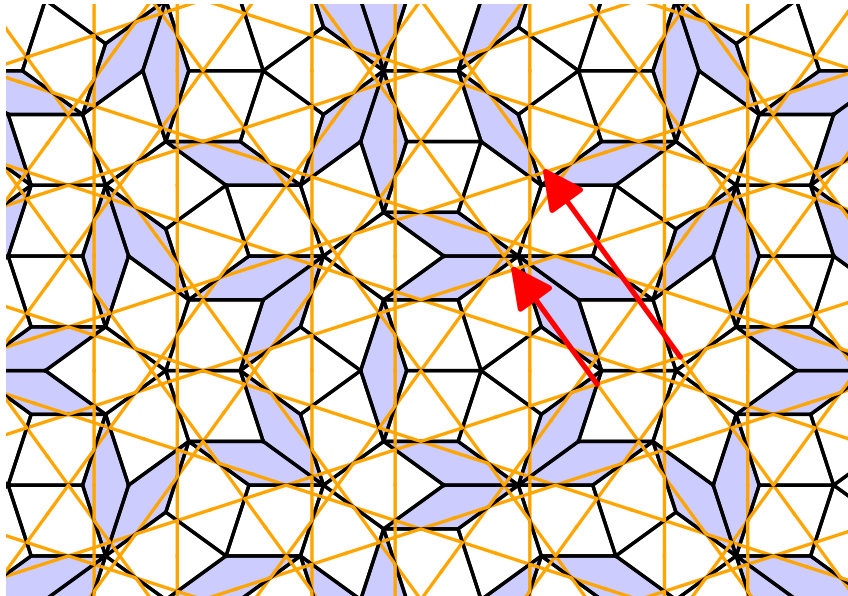


FIGURE 4.2 – Barres d'Ammann en orange et projetés des *sous-périodes* d'une direction en rouge.

4.3 La FP-méthode

Dans cette section, nous présentons une construction permettant d'obtenir des barres d'Ammann pour certains pavages $4 \rightarrow 2$ et nous l'illustrons avec ce que nous avons appelé *pavages cyrénaïques*.

4.3.1 Bonnes projections

Dans la section 1.2, nous avons défini ce qu'est une projection valide pour une pente E et mentionné le cas classique de la projection orthogonale. Il existe cependant d'autres projections valides, et c'est ce qui jouera un rôle clé ici. Nous définirons en effet les barres d'Ammann comme des droites dirigées par des sous-périodes et il sera commode que la i -ième sous-période projetée $\pi(p_i)$ soit colinéaire à $\pi(e_i)$, de sorte que l'image d'une droite dirigée par p_i est toujours une droite dans l'ombre i (Figure 4.3). On introduit donc la définition suivante :

Définition 2. Soient e_0, e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 , et $E \subset \mathbb{R}^4$ une pente 2-dimensionnelle caractérisée par ses sous-périodes p_0, p_1, p_2, p_3 . Une **bonne projection** (fine projection) pour une E est une projection valide $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\pi(p_i)$ et $\pi(e_i)$ sont colinéaires.

La figure 4.4 illustre la différence entre deux projections valides, l'une étant bonne mais pas l'autre, sur la pente des pavages cyrénaïques que nous présentons dans la sous-section suivante. Avec la bonne projection, les sous-périodes projetées ont les mêmes directions que les côtés des tuiles. C'est pourquoi si les segments sur les tuiles d'un pavage T sont dirigés par $\pi(p_i)$ alors la continuité des lignes de direction i est préservée dans l'ombre i de T , pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, comme l'illustre la figure 4.3. En effet, considérons une droite L de direction i , alors elle est parallèle aux côtés des tuiles qui disparaissent dans l'ombre i de T . Considérons maintenant une tuile t_0 qui disparaît dans cette ombre, contenant un segment $[BC] \subset L$, et ses voisins t_{-1} et t_1 contenant des segments $[AB], [CD] \subset L$. Prendre l'ombre i correspond à traduire les tuiles restantes dans la direction i , ainsi par une telle translation le point d'extrémité d'un segment d'Ammann est envoyé sur un point de la même ligne (plus précisément l'image de l'autre point d'extrémité du même segment). Par conséquent, les images des points B et C sont sur la même ligne, de sorte que les points A, B, C, D sont toujours alignés.

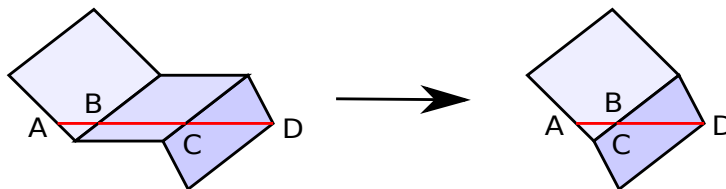


FIGURE 4.3 – Les segments alignés dans un motif restent alignés dans l'ombre correspondant à la direction de la droite.

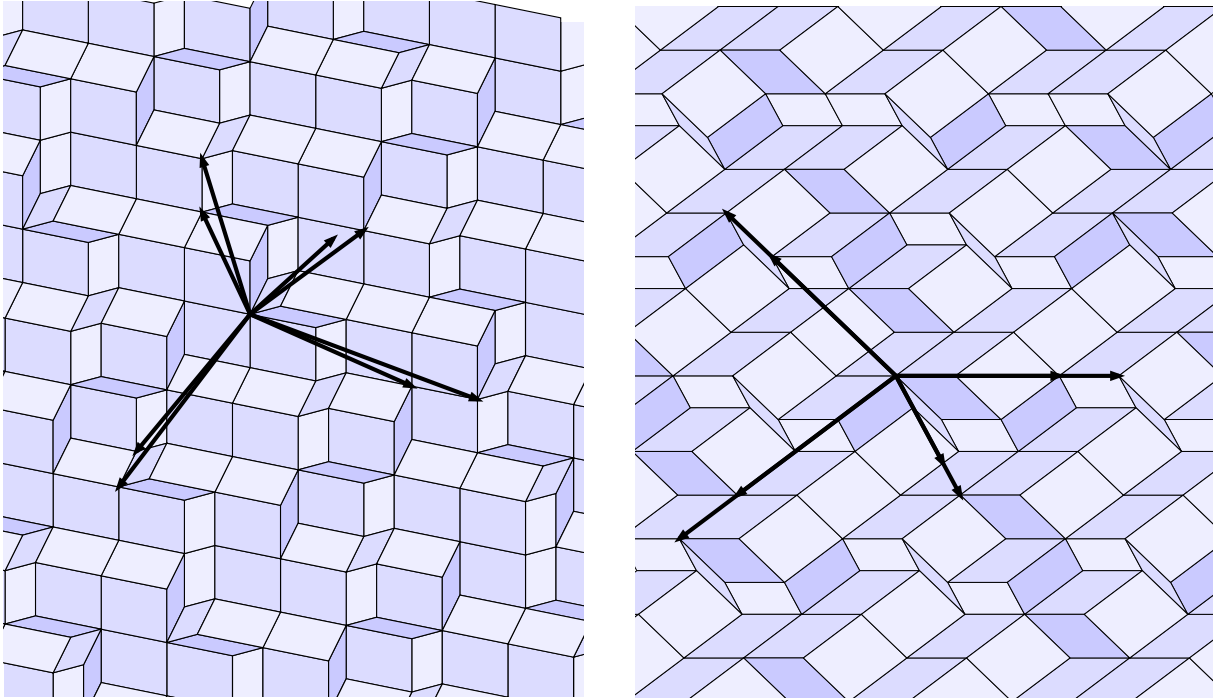


FIGURE 4.4 – Pavage cyrénaïque avec $\pi(\lfloor p_i \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_i \rceil)$ pour chaque sous-période p_i . À gauche, nous avons utilisé la projection orthogonale, qui est valide mais pas *bonne* ; à droite, nous avons utilisé une bonne projection. Les couleurs des pavages sont les mêmes sur les deux images par rapport aux $\pi(e_i)$. En partant du motif central, on peut voir comment chaque pavage est une déformation de l'autre.

4.3.2 Trouver des bonnes projections

Étant donnée une pente E avec des sous-périodes p_0, \dots, p_3 , nous cherchons une bonne projection π de la manière suivante. Nous la définissons par sa matrice 2×4 A , qui doit satisfaire $Ae_i = \lambda_i Ap_i$ pour $i = 0, \dots, 3$, où $\Lambda := (\lambda_i)_{i=0, \dots, 3}$ est à déterminer. En notant M la matrice 4×4 dont la i -ième colonne est $e_i - \lambda_i p_i$, ceci s'écrit $AM = 0$. Les 2 lignes de A doivent donc être dans le noyau gauche de M . Puisque l'image des facettes de $E + [0, 1]^4$ doit couvrir \mathbb{R}^2 , A doit être de rang 2. Par conséquent, le noyau gauche de M doit être de dimension au moins égale à 2, c'est-à-dire que M doit être de rang au plus 2. Cela revient à dire que tous les mineurs 3×3 de M doivent être nuls. Chaque mineur produit une équation polynomiale en les λ_i . Toute solution du système formé par ces équations donne une matrice M dont le noyau gauche peut être calculé. Si le noyau n'est pas vide, alors n'importe quelle base de celui-ci donne une matrice A appropriée.

Bien sûr, avec 4 variables et 16 équations, il n'y a aucune garantie qu'une solution existe, et souvent, lorsqu'une projection respecte la condition de colinéarité de la définition

2, elle n'est pas valide : certains tuiles sont superposées dans ce qui devrait être un pavage. La figure 1.4 montre par exemple ce qui se passe dans le cas des pavages *golden octagonal* (introduits dans [BF15b]) lorsque la matrice obtenue A est utilisée. Pour trouver une pente E avec une bonne projection, on procède comme suit :

1. On choisit au hasard les trois coordonnées entières de chaque sous-période p_i ;
2. On vérifie qu'il n'y a qu'un nombre fini de pentes admettant ces sous-périodes ;
3. On utilise la procédure ci-dessus pour trouver une bonne projection (s'il y en a une) ;
4. On répète les étapes précédentes jusqu'à ce qu'une bonne projection soit trouvée.

Pour avoir une idée de la proportion de pentes irrationnelles pour lesquelles une bonne projection existe, nous avons effectué quelques statistiques avec la procédure suivante. Pour un paramètre entier k , on choisit aléatoirement un polynôme quadratique P à coefficients dans $[-k, k]$ jusqu'à ce qu'on en trouve un irréductible, puis deux nombres irrationnels x et y dans le corps quadratique défini par P . On choisit également au hasard deux vecteurs u et v dans \mathbb{Z}^4 avec des coefficients dans $[-k, k]$, puis on remplace la première coordonnée de u par x et la seconde de v par y . Enfin, on applique la méthode ci-dessus à la pente E engendrée par u et v . Pour $k = 3$, sur 999 pentes, 222 n'étaient pas caractérisées par des sous-périodes et 116 admettaient une bonne projection. Pour $k = 5$, sur 7015 pentes, 765 n'étaient pas caractérisées par des sous-périodes et 1000 admettaient une bonne projection.

Parmi les premiers exemples que nous avons trouvés, le suivant a retenu notre attention car il présente des sous-périodes très courtes. Voici les coordonnées entières de celles-ci :

$$\begin{aligned} p_0 &= (*, 0, 1, 1), \\ p_1 &= (1, *, -1, 1), \\ p_2 &= (1, -1, *, 0), \\ p_3 &= (2, 1, -1, *), \end{aligned}$$

où $*$ représente la coordonnée non entière. Nous avons calculé qu'il n'y a que deux façons de choisir ces coordonnées non entières pour que les sous-périodes définissent effectivement

un plan, avec $a = \pm\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} p_0 &= (a, 0, 1, 1), \\ p_1 &= (1, a - 1, -1, 1), \\ p_2 &= (1, -1, a + 1, 0), \\ p_3 &= (2, 1, -1, a). \end{aligned}$$

En procédant comme expliqué ci-dessus, on obtient

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -a & -a & -2a \\ 0 & a+3 & a & -a \\ -a & a & -a+3 & a \\ -a & -a & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dont le noyau gauche est généré, par exemple, par les lignes de la matrice

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & 2 & -a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Seul $a = \sqrt{3}$ définit une projection valide, donc on choisit cette valeur. On désigne par E_c la pente engendrée par les p_i et on appelle **pavages cyrénaïques** (*Cyrenaic tilings*) les pavages $4 \rightarrow 2$ de pente E_c , illustrés à la figure 4.4.

4.3.3 Définir les prototiles

Nous décrivons ici la méthode FP, que nous avons utilisée pour obtenir par exemple le jeu de tuiles \mathcal{C} représenté à la figure 6. Soit E un plan irrationnel de dimension 2 dans \mathbb{R}^4 caractérisé par ses sous-périodes et qui admet une bonne projection π . Considérons un pavage de pente E obtenu en utilisant la bonne projection π . Pour chaque sommet de ce pavage, on trace les quatre droites dirigées par les sous-périodes projetées $\pi(p_i)$ passant par ce sommet. La figure 4.5 montre ce que l'on obtient pour un pavage cyrénaïque. Ces droites décorent les tuiles du pavage avec des segments qui peuvent prendre quatre directions différentes. L'ensemble de ces tuiles décorées, considérées à translation près, définit le jeu de tuiles voulu. Notons que le jeu de tuiles ne dépend pas du pavage initialement considéré, car les pavages $4 \rightarrow 2$ ayant une pente irrationnelle donnée partagent les mêmes motifs finis (ce fait connu est par exemple prouvé par la Prop. 1 dans [BF17]). Nous pouvons maintenant prouver :

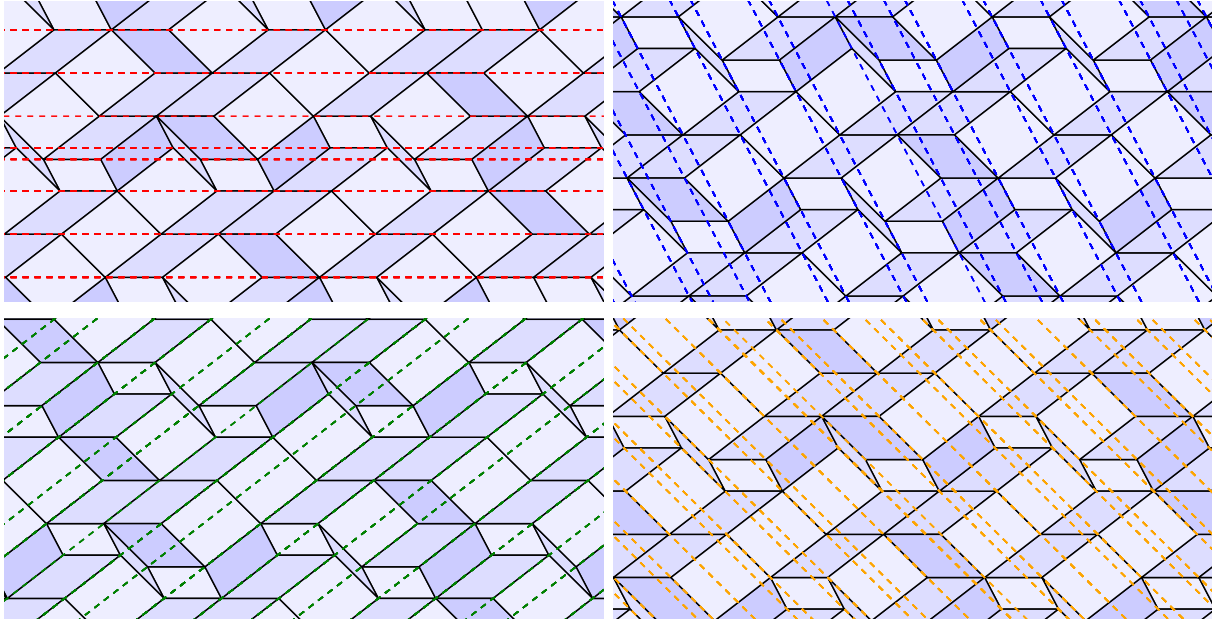


FIGURE 4.5 – Un pavage cyrénaïque avec toutes les lignes dans les directions des sous-périodes, passant par chaque sommet du pavage. Les directions sont indiquées séparément pour faciliter la visualisation, et les lignes sont en pointillés pour que les côtés des tuiles soient visibles.

Proposition 4. *Tout jeu de tuiles obtenu à l'aide de la méthode FP est fini.*

Preuve. On prouve que le nombre d'intervalles (distances) différents entre deux lignes consécutives dans une direction donnée est fini. Cela donne un nombre fini de façons de décorer un pavage par des segments parallèles, et donc un nombre fini de tuiles différentes.

Considérons une sous-période p_i et l'ensemble \mathcal{D}_i de toutes les droites de E dirigées par $\pi(p_i)$ et passant par les sommets du pavage, c'est-à-dire par tous les points $\pi(x)$ avec $x \in \mathbb{Z}^4 \cap (E + [0, 1]^4)$. Puisque la distance d'un sommet à ses voisins est $\|\pi(e_k)\|$ pour un certain k , l'intervalle entre deux lignes consécutives de \mathcal{D}_i est au plus $d_1 := \max_{j \neq i} \{\|\pi(e_j)\|\}$.

Soit $\Delta \in \mathcal{D}_i$, $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $\pi(x) \in \Delta$, et $\Delta' \in \mathcal{D}_i$ qui est le plus proche de Δ (Fig. 4.6). Alors la distance entre $\pi(x)$ et sa projection orthogonale $\pi'(x)$ sur Δ' est au plus d_1 . En outre, la distance entre deux sommets situés sur Δ' est au plus égale à $d_2 := \max(\|\pi(\lfloor p_i \rfloor)\|, \|\pi(\lceil p_i \rceil)\|)$. En effet, si $y \in \mathbb{Z}^4 \cap (E + [0, 1]^4)$ alors $y + p_i \in E + [0, 1]^4$ et a trois coordonnées entières de sorte qu'il se trouve sur un bord de \mathbb{Z}^4 (vu comme une grille dans \mathbb{R}^4), entre $y + \lfloor p_i \rfloor$ et $y + \lceil p_i \rceil$; or, au moins un de ces deux points est dans $\mathbb{Z}^4 \cap (E + [0, 1]^4)$, donc sa projection est aussi un sommet du pavage, qui se trouve sur Δ' (puisque $\pi(p_i)$, $\pi(\lfloor p_i \rfloor)$ et $\pi(\lceil p_i \rceil)$ sont colinéaires). Par conséquent, la distance entre $\pi'(x)$ et le sommet le plus proche $\pi(y)$ du pavage qui se trouve sur Δ' est au plus $d_2/2$. Par conséquent, $\text{dist}(\pi(x), \pi(y)) \leq d := \sqrt{d_1^2 + d_2^2/4}$, c'est-à-dire qu'au moins un

sommet sur Δ' est dans la boule $B(\pi(x), d)$. Par conséquent, il suffit de mesurer les intervalles autour d'une droite Δ dans les d -motifs du pavage pour dresser la liste de tous les intervalles possibles entre deux droites consécutives dans le pavage entier. Comme le d -atlas est fini, le nombre d'intervalles l'est aussi. \square

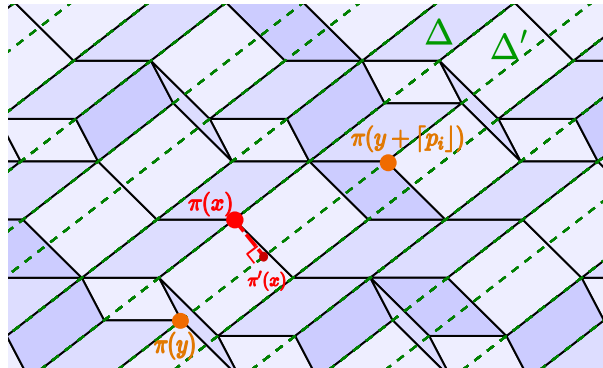


FIGURE 4.6 – Illustration de la preuve de la Proposition 4. $[p_i]$ désigne $[p_i]$ ou $\lceil p_i \rceil$.

Bien que la preuve précédente ne donne pas de borne explicite sur le nombre de pavages, elle donne une procédure constructive pour obtenir ces pavages. Il suffit en effet de calculer la constante d (qui dépend des sous-périodes et de la projection), puis d'énumérer les d -motifs (par exemple en énumérant tous les motifs de taille d et en ne gardant que ceux qui peuvent être relevés dans un tube $E + [0, 1]^4$ – en pratique nous avons utilisé un algorithme plus efficace basé sur la notion de région [BF20] décrite dans l'annexe ?? – et, pour chaque d -motif, de tracer les droites et d'énumérer les nouvelles tuiles décorées obtenues. Dans le cas des pavages cyrénaïques, il suffit d'énumérer les tuiles qui apparaissent dans le 5-atlas en termes de distance de graphe. On obtient 2 ou 3 intervalles dans chaque direction, et l'ensemble \mathcal{C} de 36 prototiles décorées de la figure 6.

4.4 Paver avec des FP-tuiles

Par construction, des tuiles FP obtenues à partir d'une pente E caractérisée par des sous-périodes peuvent être utilisées pour former tous les pavages par coupe et projection canoniques de pente E . Cependant, même en respectant les règles des barres d'Amann, rien ne garantit encore que ces tuiles ne puissent pas être utilisées pour paver d'autres façons, et obtenir par exemple des pavages qui seraient périodiques ou non planaires. Nous allons prouver ici que cela ne peut pas se produire.

Disons qu'on dispose d'un ensemble S de tuiles décorées par des segments d'Amann obtenues à partir d'une pente donnée $E \subset \mathbb{R}^4$ caractérisée par des sous-périodes

$(p_i)_{i \in \{0,1,2,3\}}$ avec une bonne projection π , et que nous voulons montrer que tout pavage avec ces tuiles est planaire de pente E . Soit \mathcal{T} l'ensemble de tous les pavages qui peuvent être réalisés avec (seulement) des tuiles de S . Par construction (règles d'assemblage des tuiles de S), quatre ensembles de lignes apparaissent sur tout $T \in \mathcal{T}$ et les lignes de chaque ensemble sont parallèles à une sous-période projetée $\pi(p_i)$ et à $\pi(e_i)$ pour le même i . On peut donc parler de l'ombre i de T comme du relevé dans \mathbb{R}^3 du pavage obtenu en réduisant à zéro la longueur des côtés de tuiles qui sont parallèles à $\pi(p_i)$. Ensuite, comme montré à la section 4.3.1, pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, la continuité des lignes dans la direction i est préservée dans l'ombre i de T .

On peut alors utiliser les droites pour montrer qu'une ombre est périodique (dans une direction) et déterminer sa période première : en partant d'un sommet de l'ombre, on suit la droite dans la direction choisie jusqu'à ce qu'on atteigne un autre sommet, pour chaque configuration valide des tuiles. Si le vecteur du premier sommet au suivant est toujours le même, alors il s'agit d'une période première de l'ombre.

Lemme 5. *Supposons que E est une pente bidimensionnelle dans \mathbb{R}^4 caractérisée par des sous-périodes p_0, \dots, p_3 , π est une bonne projection, et \mathcal{T} est un jeu de tuiles obtenu à partir de E et π en utilisant la méthode FP. Alors pour tout pavage composé de tuiles de \mathcal{T} (respectant les règles des barres d'Ammann), son ombre i est $\omega_i(p_i)$ -périodique pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

Preuve. Pour plus de clarté, le diagramme de la figure 4.7 résume les notations et les relations entre les espaces que nous utilisons. En partant du relevé (dans \mathbb{R}^4) d'un pavage de \mathbb{R}^2 , la projection π nous ramène au pavage. Comme dans la section 4.1, ω_i désigne la projection du relevé parallèlement à e_i . Cela correspond à la réduction à zéro de la longueur de chaque arête de type $\pi(e_i)$ dans le pavage, ce qui est fait en appliquant Ω_i au pavage. On obtient ainsi l'ombre i projetée, qui est également un pavage de \mathbb{R}^2 et peut être obtenue à partir de l'ombre i par la projection π_i . Lors de la construction du jeu de tuiles à l'aide de notre algorithme, on pourrait ajouter un peu plus d'informations sur les tuiles : chaque extrémité d'une décoration (intersection d'une ligne avec un côté d'une

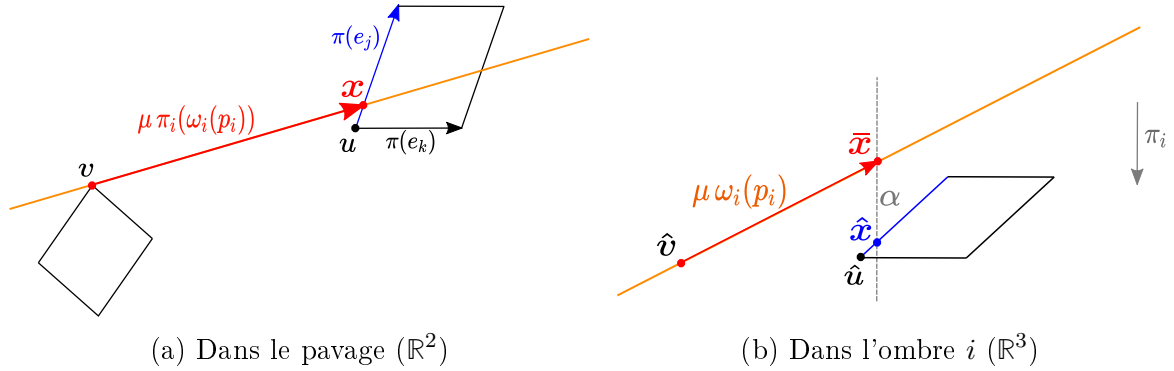
$$\begin{array}{ccc}
 \text{Relevé dans } \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\omega_i} & \text{Ombre } i \text{ dans } \mathbb{R}^3 \\
 \pi \downarrow & & \uparrow \downarrow \pi_i \\
 \text{Pavage } (\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\Omega_i} & \text{Ombre } i \text{ projetée } (\mathbb{R}^2)
 \end{array}$$

FIGURE 4.7 – Diagramme résumant les notations utilisées dans le lemme 5.

tuile) peut être identifiée par deux points \hat{x} et \bar{x} dans \mathbb{R}^3 , comme décrit dans les étapes 1 et 2 de cette preuve. Notons que cette information "supplémentaire" est entièrement déterminée par un point x qui est déjà encodé dans la prototuile. Elle n'est donc utile que pour montrer le résultat à l'étape 3 de cette preuve, mais nous n'avons pas besoin de l'encoder.

Étape 1. Pour les étapes 1 et 2, nous considérons l'ombre i d'un "bon" pavage, à savoir le pavage canonique utilisé pour obtenir les prototuelles décorées, avec les droites ajoutées dessus. On sait donc que son ombre i , notée S_i , est périodique. À partir de $\pi_i(S_i)$, qui est un pavage de \mathbb{R}^2 , son relevé dans \mathbb{R}^3 est S_i et le relevé d'un point y dans ce pavage est $\hat{y} \in S_i$ tel que $\pi_i(\hat{y}) = y$, c'est-à-dire que \hat{y} est sur une facette 2-dimensionnelle de \mathbb{R}^3 dont les sommets (points entiers) sont dans l'ombre et se projettent sur les sommets d'une tuile t dans l'ombre i projetée. Considérons maintenant un point y dans une copie de t , et sa position x dans t . Alors $\hat{x} := \hat{y} \bmod \mathbb{Z}^3$ est la position de \hat{y} dans la facette de l'ombre qui se projette sur t , et elle ne dépend pas de la position de la tuile dans le pavage. De plus, on a $\pi_i(\hat{x}) = x$.

Étape 2. En outre, on relève les droites dans \mathbb{R}^3 de la manière suivante. Si y est sur



une droite dirigée par $\pi_i(\omega_i(p_i))$, par construction il y a un sommet v sur cette droite. Considérons la droite Δ dans \mathbb{R}^3 dirigée par $\omega_i(p_i)$ et passant par \hat{v} . Le projeté de cette droite est la droite où se trouve y , donc il existe $\bar{y} \in \Delta$ tel que $\pi_i(\bar{y}) = y$. Par conséquent, on a $\bar{y} = \hat{v} + \mu \omega_i(p_i)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Alors x est envoyé sur $\bar{x} := \mu \omega_i(p_i) \bmod \mathbb{Z}^3 = \bar{y} \bmod \mathbb{Z}^3$. On montre que \bar{x} est entièrement déterminé par x , c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la position de la tuile dans le pavage. En effet, $\ker(\pi_i)$ est de dimension 1, donc $\ker(\pi_i) = \mathbb{R}q_i$ avec $q_i \in \mathbb{R}^3$ et $\|q_i\| = 1$. Puisque $\pi_i(\hat{x}) = \pi_i(\bar{x}) = x$, nous avons $\hat{x} - \bar{x} = \alpha q_i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $\hat{x} - \bar{x} \equiv \hat{x} - \mu \omega_i(p_i) \equiv \alpha q_i \bmod \mathbb{Z}^3$, ce qui est équivalent à $\alpha q_i + \mu \omega_i(p_i) \equiv \hat{x}$, qui ne dépend pas de x . De plus, π_i est une projection valide, donc $q_i \wedge \omega_i(p_i) \neq 0$, donc α et μ sont déterminés par x .

En d'autres termes, quelle que soit l'exemplaire de chaque tuile qui a produit la prototuile

dans le jeu de tuiles, pour une position donnée x dans la prototuile, \bar{x} sera le même. On observe également que $\bar{x} = 0$ si et seulement si x est un sommet de la tuile. En effet, si $\bar{x} = 0$ alors $\mu \in \mathbb{Z}$ car $\omega_i(p_i)$ est un vecteur entier dont les coordonnées sont premières entre elles. Et par définition $\bar{x} = \hat{v} + \mu \omega_i(p_i) \bmod \mathbb{Z}^3$ où v est un sommet du pavage, donc \hat{v} est un sommet de l'ombre et il s'ensuit que l'ombre i est $\omega_i(p_i)$ -périodique, donc \bar{y} est aussi un sommet de l'ombre, donc y est un sommet du pavage.

Étape 3. On montre enfin que l'ombre i de *tout* pavage composé avec les tuiles de \mathcal{T} est périodique avec la bonne période. On considère maintenant un pavage composé uniquement avec les tuiles de \mathcal{T} qui peuvent apparaître dans l'ombre i projetée, en respectant les règles des barres d'Ammann pour les droites dirigées par $\pi(p_i)$ (la continuité des droites ne peut pas être respectée dans d'autres directions avec seulement ces tuiles). Si y est un sommet de ce pavage, alors pour le x correspondant on a $\bar{x} = 0$. En suivant la droite partant de y dans la direction i , on atteint un point z dans le pavage. Puisque $\omega_i(p_i) \in \mathbb{Z}^3$, nous avons $\bar{z} = x + \pi_i(\bar{\omega}_i(p_i)) = \bar{x} + \omega_i(p_i) \equiv 0 \bmod \mathbb{Z}^3$. Par conséquent, z est également un sommet de l'ombre, qui est donc $\omega_i(p_i)$ -périodique. \square

Par exemple, tout pavage composé avec des tuiles de \mathcal{C} a les mêmes sous-périodes que les pavages cyrénaïques. Si la preuve ci-dessus semble obscure, voici un exemple de ce qui se passe dans les ombres. Nous observons que chaque ombre i est périodique de période $q_i := \omega_i(p_i)$ où p_i est la sous-période i des pavages cyrénaïques. C'est ce qu'illustre la figure 4.9. Dans chaque ombre, il y a trois tuiles originales (non décorées), chacune pouvant apparaître dans des versions différentes si l'on prend en compte les décorations. Pour chaque ombre i , on ne considère ici que les décorations dans la direction i , où l'on a la continuité des lignes (les autres décorations ne sont pas pertinentes ici). Toutes les tuiles possibles sont données sur la ligne du haut, et en suivant les flèches à partir de chaque tuile, on peut voir toutes les possibilités de placer d'autres tuiles afin de continuer la ligne qui dirige le vecteur rouge. Pour chaque ombre, le vecteur est le même pour toutes les configurations possibles, ce qui signifie que l'ombre est périodique, et nous trouvons exactement les sous-périodes des pavages cyrénaïques.

Le corollaire suivant est obtenu en ajoutant à cela le résultat principal (Théorème 1) de [BF15b] : “*Les sous-périodes d'un pavage par losanges de codimension 2 imposent une planarité irrationnelle si et seulement si trois d'entre elles, chacune dans une ombre avec une seule période, peuvent être relevées dans un plan irrationnel non dégénéré sur des vecteurs non colinéaires deux à deux. Cela vaut lorsque les sous-périodes caractérisent un nombre fini de pentes.*”. Ceci implique notamment que si un pavage du plan est composé

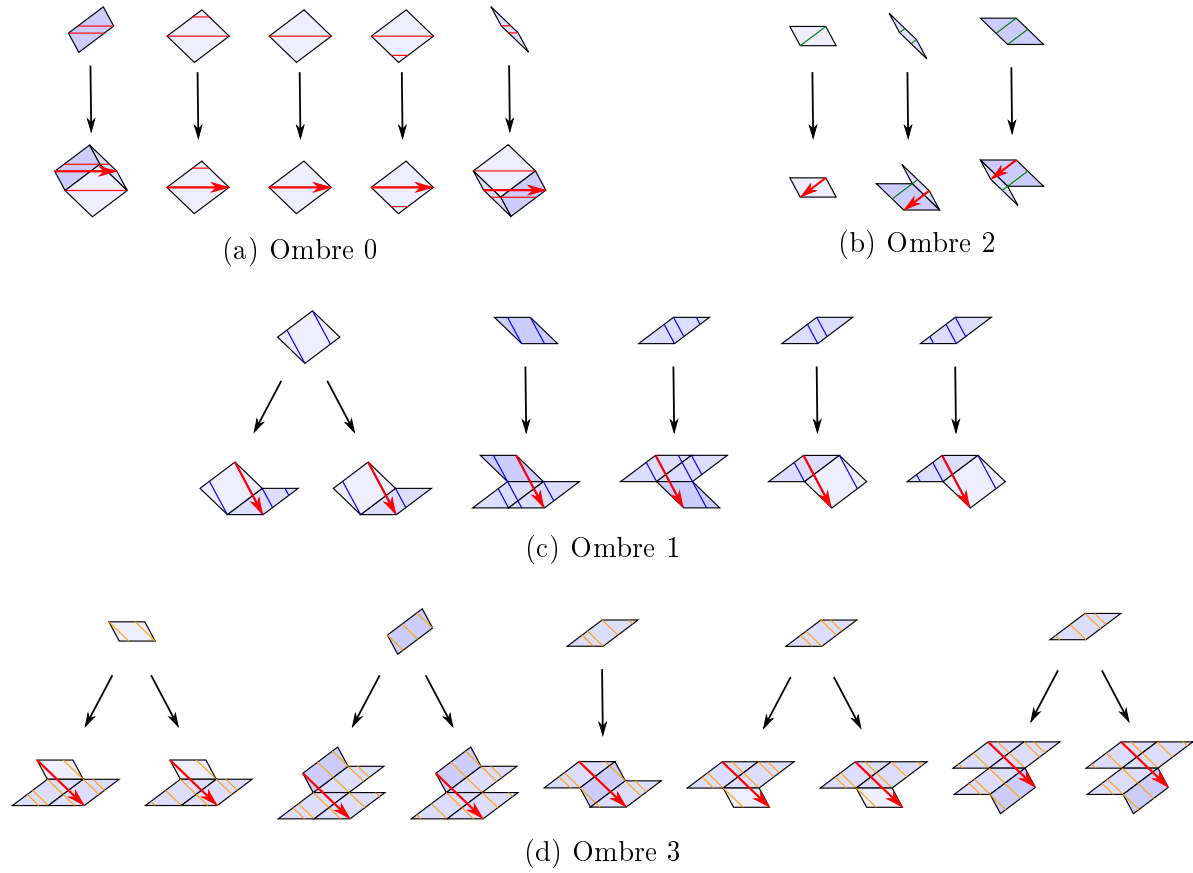


FIGURE 4.9 – Périodes des 4 ombres des pavages réalisables avec l'ensemble \mathcal{C} : en partant d'un sommet quelconque et en suivant une ligne dans la direction i , selon la première tuile traversée, il y a au plus deux possibilités jusqu'à atteindre un autre sommet, et le vecteur entre les deux sommets est toujours le même.

de losanges définis par 4 vecteurs (codimension 2) et qu'il a des sous-périodes caractérisant une pente irrationnelle E , alors ce pavage est planaire de pente E . Par conséquent,

Corollaire 4. *Tout pavage composé de tuiles de \mathcal{T} est planaire de pente E .*

Il n'y a aucune garantie que leur épaisseur soit toujours 1. Toutefois, pour une pente totalement irrationnelle E , le théorème suivant s'ensuit.

Théorème 2. *Tout jeu de tuiles obtenu par la FP-méthode à partir d'une pente totalement irrationnelle est apériodique.*

Chapitre 5

Tuiles de Wang et partition de Markov pour des pavages $4 \rightarrow 2$

Ce chapitre présente ma contribution à un article en préparation avec Sébastien Labbé et Jana Lepšova [LLP24]. Ces derniers approfondissent l'étude de l'ensemble de tuiles de Wang correspondant aux pavages de Penrose (P3) ainsi que le système dynamique correspondant. L'idée est de trouver un lien éventuel avec les pavages de Jeandel-Rao, qui sont des pavages par tuiles de Wang pour lesquels Sébastien Labbé a exhibé un schéma de coupe et projection, dans lequel le nombre d'or apparaît. Mon travail, inspiré par un article de Sébastien Labbé mais initié de façon autonome, visait à tenter une approche en sens inverse, c'est-à-dire partant du schéma de coupe et projection pour peut-être retrouver autrement le même jeu de tuiles. Comme la pente des pavages *golden octagonal* est également liée au nombre d'or, cela a été le point de départ. Bien qu'on ne trouve pas exactement le résultat visé, ma construction a effectivement été confirmée par des expérimentations avec Sébastien Labbé, de sorte qu'une collaboration a permis d'aller plus loin et d'ouvrir de nouvelles pistes de recherche intéressantes. Il s'agit donc ici de poser une première pierre.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, une **tuile de Wang** (*Wang tile*) est une tuile carrée dont chaque côté (nord, sud, est, ouest) est coloré, et deux tuiles de Wang ne peuvent être adjacentes dans un pavage que si leur côté commun est de même couleur. Contrairement à la plupart des jeux de tuiles, comme ceux de Penrose ou même celui de Robinson dont les tuiles sont carrées [Rob71], seules les translations de prototuiles sont autorisées (pas les rotations ni les réflexions). Paver avec des tuiles de Wang revient donc à associer à tout point de \mathbb{Z}^2 une tuile de Wang (de côté 1), sans violer les règles d'assemblage. Depuis que Jeandel et Rao ont trouvé des ensembles apériodiques de 11

tuiles de Wang et montré qu'on ne pouvait pas faire plus petit [JR21], la recherche en ce domaine est davantage qualitative, au lieu de se focaliser sur la recherche d'un plus petit ensemble apériodique.

Dans une série d'articles [Lab18 ; Lab19 ; Lab20 ; Lab21a], Sébastien Labbé étudie sous l'angle des systèmes dynamiques de pavages quelques ensembles apériodiques de tuiles de Wang dont notamment celui de Jeandel-Rao. Dans l'article de 2021, il présente pour ce dernier une *partition de Markov* du domaine fondamental d'un tore 2-dimensionnel ainsi qu'une action de rotation sur ce tore, offrant une *représentation symbolique* pour ces pavages. Autrement dit, en numérotant correctement les régions de la partition et les tuiles de Wang, tout point x du tore correspond de façon presque unique à un pavage de Jeandel-Rao : à partir de x , l'action de rotation permet d'associer une tuile à chaque point de $x + \mathbb{Z}^2$ pour obtenir un pavage valide, et à partir d'un pavage une intersection de préimages permet de trouver le point x qui lui correspond sur le tore. En outre, l'article décrit un schéma de coupe et projection $4 \rightarrow 2$ associé, avec une pente engendrée par des vecteurs dont les coordonnées sont dans $\mathbb{Q}[\varphi]$.

Il existe des ensembles de tuiles de Wang associés à des familles de pavages, comme les pavages par losanges de Penrose (P3) dont la pente est engendrée par des vecteurs de $\mathbb{Q}[\varphi]^5$, mais ceux-ci contiennent davantage de tuiles que l'ensemble de Jeandel-Rao. On peut alors se demander si les pavages par coupe et projection associés à ces derniers pourraient être les pavages *golden octagonal*, puisque leur pente est engendrée par des vecteurs de $\mathbb{Q}[\varphi]^4$. Afin de tester cette hypothèse, il faut dans un premier temps chercher un jeu de tuiles de Wang correspondant à ceux-ci. Bien que la méthode soit inspirée du cas de Penrose, la construction du jeu de tuiles de Wang est moins évidente, notamment pour s'assurer qu'on obtient bien un ensemble apériodique. Ensuite, on montre comment la fenêtre du schéma de coupe et projection peut être utilisée pour partitionner le domaine fondamental d'un tore, sur lequel une *action de décalage* permet d'obtenir une *représentation symbolique* associée aux pavages pouvant être réalisés avec le jeu de tuiles de Wang associé.

Les termes en italique ci-dessus appartiennent au vocabulaire de la théorie des systèmes dynamiques. Comme l'indique E. A. Robinson, les pavages de Penrose combinent des propriétés qui ressemblent à ce qu'on peut trouver dans celle-ci [Rob96 ; Rob04]. On peut en effet les définir (ou construire) de trois façons : ils ont des règles locales, peuvent être obtenus par coupe et projection et sont substitutifs. Robinson note

que ces propriétés des pavages apériodiques sont justement celles qui sont reliées aux quasicristaux. Les pavages *golden octagonal* ont les deux premières, mais sont-ils aussi substitutifs? Les étudier sous l'angle des systèmes dynamiques permet de répondre à cette question, via les tuiles de Wang associées. Ce chapitre apporte donc aussi un élément de compréhension des liens entre règles locales, coupe et projection, et substitutions.

Après une première section dans laquelle les notions nécessaires sont définies, le travail de construction du jeu de tuiles et de la partition du tore est présenté en section 2, aboutissant à l'énoncé du théorème. Ce dernier est démontré en section 3, après introduction des outils utilisés à cette fin. Enfin, un début de généralisation ainsi que des perspectives de recherche sont avancées en section 4.

5.1 Systèmes dynamiques et partition de Markov

Nous avons besoin pour ce chapitre de quelques notions supplémentaires. Dans un premier temps, on apporte quelques précisions sur la fenêtre des schémas de coupe et projection. Ensuite, les systèmes dynamiques de pavages sont présentés, puis le cas particulier des sous-décalages multidimensionnels, incluant les pavages par des tuiles de Wang. Pour ces derniers, on introduit leur représentation sous forme de transducteurs ou d'automates finis. Enfin, on définit les partitions de Markov et \mathbb{Z}^2 -actions sur un tore.

5.1.1 Compléments sur la fenêtre et motifs interdits

Reprenons dans la Figure 5.1 le schéma illustrant la méthode par coupe et projection. Nous avons vu au chapitre 1 que la fenêtre W est l'image de $E + [0, 1]^n$ projeté sur F parallèlement à E et que c'est un ensemble compact. F est aussi appelé **espace interne** (*internal space*), alors que E est appelé **espace réel** (*real space*). Rappelons que les pavages *golden octagonal* sont des $4 \rightarrow 2$ dont la pente E_G est engendrée par

$$\vec{u} = (1, \varphi, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (0, 1, \varphi, 1).$$

Comme E_G est totalement irrationnelle, c'est-à-dire qu'elle ne contient aucune droite rationnelle, ces pavages sont apériodiques. En outre, la projection parallèlement à E de l'ensemble dénombrable $I := \mathbb{Z}^n \cap (E + [0, 1]^n)$ est dense dans W . De plus, pour les pavages $4 \rightarrow 2$, la projection sur F de l'hypercube engendré par e_0, e_1, e_2 et e_3 donne un octogone dont les côtés sont dirigés par $\pi^\perp(e_0), \pi^\perp(e_1), \pi^\perp(e_2)$ et $\pi^\perp(e_3)$, d'où leur nom de **pavages octogonaux** (*octagonal tilings*).

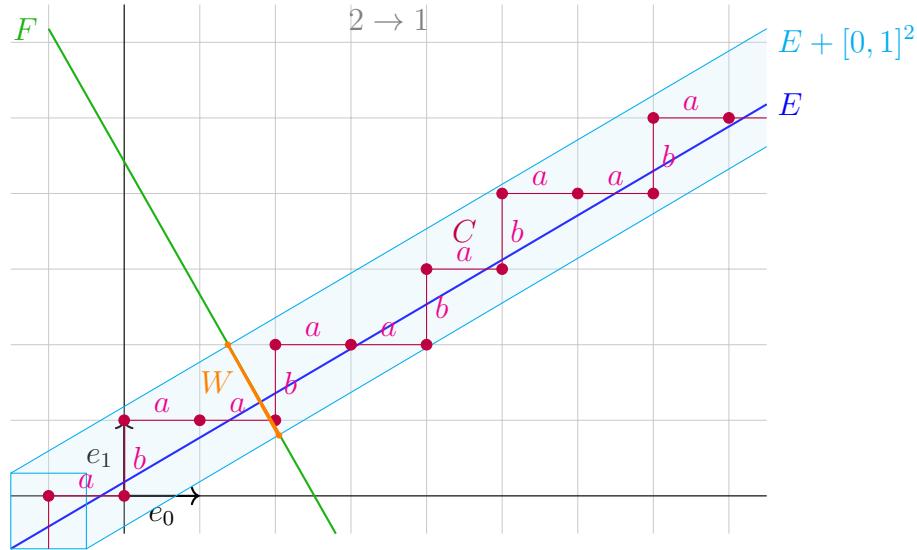
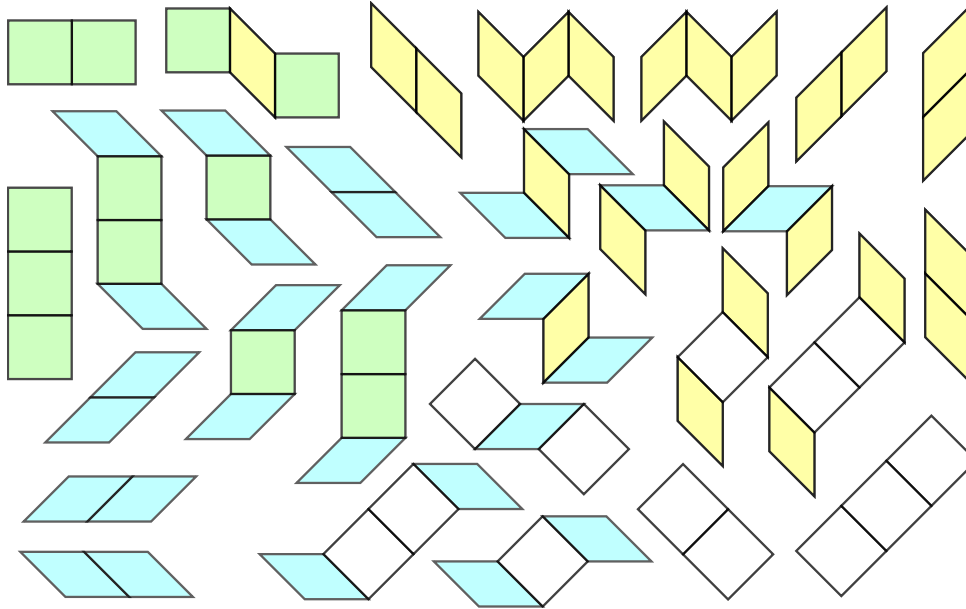


FIGURE 5.1 – Rappel du schéma de coupe et projection de la Figure 1.3. La fenêtrage W est le segment orange, intersection de F et du tube.

En outre, la fenêtrage a les propriétés suivantes pour les pentes irrationnelles. Tout motif apparaissant dans un pavage de pente E correspond à une région de W telle que tous les points de I projetés dans la même région de W produisent le même motif dans le pavage. Par exemple, dans la Figure 5.1, tout point entier situé au-dessus de E se projette dans la partie de W qui est au-dessus de E et, à partir d'un tel point, la coupe ne peut se prolonger que vers la droite et pas vers le haut, de sorte que le motif correspondant est a , tandis que les points au-dessous de E correspondent à b . Cela fonctionne également lorsqu'on étend les motifs – les régions devenant plus petites au fur et à mesure que les motifs s'agrandissent. De plus, la fréquence de chaque motif dans le pavage est égale à la proportion de la fenêtrage occupée par la région correspondante.

Dans ce chapitre, on utilise à nouveau le fait que la pente ait des règles locales mais en examinant les motifs interdits plutôt que les sous-périodes. Un motif est interdit si et seulement si la région qui lui correspond dans la fenêtrage a une aire nulle. Nous avons déjà vu que les pavages de Penrose peuvent être définis par un ensemble fini de motifs interdits. Nous utilisons dans ce chapitre le fait que les pavages *golden octagonal* ont aussi cette propriété. On peut en effet les définir par l'ensemble de motifs interdits de la Figure 5.2. Celle-ci reprend les 24 motifs donnés dans [BF15b], avec 4 supplémentaires : ajouter ces petits motifs nous évite de devoir regarder des motifs plus grands pour éliminer des configurations non valides¹.

1. Rappelons que la propriété qui nous intéresse est l'existence d'un ensemble fini de motifs interdits suffisant à caractériser les pavages, peu importe la taille de cet ensemble.

FIGURE 5.2 – Motifs interdits des pavages *golden octagonal*.

5.1.2 Systèmes dynamiques de pavages

Il existe plusieurs sous-ensembles notables de systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques de pavages ont notamment fait l'objet d'une bonne introduction par Arthur Robinson [Rob04], qui s'inscrit dans le cadre des systèmes dynamiques symboliques, plus généralement présentés dans l'ouvrage de Lind et Marcus [LM95].

Un **système dynamique** (*dynamical system*) est un couple (X, T) , où X est un espace topologique et T est une fonction $G \times X \rightarrow X$ définissant une action continue à gauche d'un groupe topologique G sur X , c'est-à-dire que si $x \in X$ et $g, h \in G$, alors en utilisant la notation additive pour l'opération dans G et e pour l'élément identité, on a $T(e, x) = x$ et $T(g + h, x) = T(g, T(h, x))$. En d'autres termes, si l'on dénote la transformation $x \mapsto T(g, x)$ par T^g , alors $T^{g+h} = T^g T^h$.

Soit $Y \subset X$. On note \bar{Y} la fermeture topologique de Y et $T(Y) := \cup_{g \in G} T^g(Y)$ la T -fermeture de Y . On dit que Y est **invariant par T** (*T -invariant*), ou **invariant sous l'action de T** , si $T(Y) = Y$. Un système dynamique (X, T) est dit **minimal** si X ne contient aucun sous-ensemble propre à la fois non vide, fermé et invariant par T . L'action à gauche de G sur X est **libre** (*free*) si $g = e$ chaque fois qu'il existe $x \in X$ tel que $T^g(x) = x$.

Soient (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques tels que T et S sont des actions du même groupe topologique G . Un **homomorphisme** (*homomorphism*) $\theta : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ est une fonction continue $\theta : X \rightarrow Y$ satisfaisant la propriété de

commutation $S^g \circ \theta = \theta \circ T^g$ pour tout $g \in G$. Un homomorphisme $\theta : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ est appelé **monomorphisme** (*embedding*) s'il est injectif, un **épimorphisme** (*factor map*) s'il est surjectif, et **isomorphisme** (*isomorphism*) s'il est à la fois injectif et surjectif. Si $\theta : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ est un épimorphisme, alors (Y, S) est un **facteur** (*factor*) de (X, T) , et (X, T) est une **extension** (*extension*) de (Y, S) . Si θ est un isomorphisme et que de plus son inverse est continue, alors c'est une **conjugaison topologique** (*topological conjugacy*). Deux systèmes dynamiques sont **topologiquement conjugués** (*topologically conjugate*) s'il existe une conjugaison topologique entre eux.

On se penche plus particulièrement sur le cas des systèmes dynamiques de pavages. Dans ce contexte, une tuile est un compact connexe, et deux tuiles sont **équivalentes** si l'une est l'image de l'autre par une translation. Considérant un ensemble \mathcal{T} de tuiles non-équivalentes de \mathbb{R}^d , l'ensemble $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ de tous les pavages de \mathbb{R}^d réalisables avec des translatés des tuiles de \mathcal{T} est appelé **espace de pavage complet** (*full tiling space*). De manière générale, si X est un espace de pavages de \mathbb{R}^d , T est l'action de translation : $x \in X$ et $v \in \mathbb{R}^d$ alors $T^v x = \{t - v : t \in x\}$.

Nous étions dans ce cas au chapitre précédent, en tenant compte des règles d'assemblage (barres d'Ammann). En revanche, dans le cas des pavages P3 de Penrose par exemple l'ensemble à considérer dans le cadre des systèmes dynamiques contient 20 tuiles décorées au lieu de 2 : il y a dix orientations possibles pour chaque. C'est en fait le cas dans le schéma de coupe et projection, puisque chaque paire de vecteurs (dans chaque sens) définit une prototuile. Concernant les pavages *golden octagonal*, on ne dispose pas d'un ensemble explicite de tuiles décorées dont l'espace de pavage complet est précisément l'ensemble de ces pavages, et on ne sait pas combien de prototiles il faudrait. Dans la suite, on considère le groupe abélien $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, naturellement adapté au cas des tuiles de Wang.

5.1.3 Sous-décalages de type fini

Nous présentons maintenant les sous-décalages multidimensionnels, un type particulier de systèmes dynamiques [LM95, §13.10], [Lin04; Hoc16]. Les exemples sont donnés en dimension 1, ce qui permet de facilement comprendre les notions – le passage aux dimensions supérieures ne posant pas de difficulté particulière ici. Soit \mathcal{A} un ensemble fini, $d \geq 1$, et soit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ l'ensemble de toutes les applications $x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathcal{A}$, muni de la topologie produit compacte. Un élément de \mathcal{A} est appelé **symbole** (*symbol*) et un élément $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est appelé **configuration** (*configuration*) et nous l'écri-

vons sous la forme $x = (x_{\mathbf{k}}) = (x_{\mathbf{k}} \mid \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d)$, où $x_{\mathbf{k}} \in \mathcal{A}$ désigne la valeur de x en \mathbf{k} . Autrement dit, une configuration est le placement d'un symbole en chaque position de \mathbb{Z}^d .

Quand $d = 1$, ce qui correspond naturellement au cas ayant été le plus étudié, \mathcal{A} est appelé **alphabet** (*alphabet*), ses éléments lettres et une configuration est un mot biinfini. Ce mot est n -naire si \mathcal{A} contient n lettres. Notons qu'ici la position de l'origine est importante : par exemple, si on définit le mot $w^{(i)}$ comme le mot binaire sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ayant exactement un 1 en position i et que des 0 ailleurs, alors $w^{(i)} \neq w^{(j)}$ pour $i \neq j$ puisque leur valeur en $k = i$ n'est pas la même ($w_i^{(i)} = 1 \neq 0 = w_i^{(j)}$). La topologie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est compatible avec la métrique définie pour toutes les configurations $x, x' \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ par

$$\text{dist}(x, x') = 2^{-\min\{\|\mathbf{n}\|_1 : \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, x_{\mathbf{n}} \neq x'_{\mathbf{n}}\}}$$

où $\|\mathbf{n}\|_1 = |n_1| + \dots + |n_d|$. Dans cette métrique, deux configurations x, x' sont à une distance de $2^{-\|\mathbf{n}\|_1}$ si et seulement si $x_{\mathbf{n}} \neq x'_{\mathbf{n}}$ et $x_{\mathbf{k}} = x'_{\mathbf{k}}$ pour tout \mathbf{k} tel que $\|\mathbf{k}\|_1 < \|\mathbf{n}\|_1$, c'est-à-dire si elles sont égales sur une boule de rayon $\|\mathbf{n}\|_1 - \epsilon$ centrée en $\mathbf{0}$ (sans atteindre le rayon $\|\mathbf{n}\|_1$). Ceci a du sens, si ce n'est que des configurations se ressemblant beaucoup sont à distance maximale l'une de l'autre. Par exemple, on a $\text{dist}(w^{(i)}, w^{(j)}) = 2^{-0}$ pour tout $i \neq j$ alors que ces deux mots ont des 0 presque partout, juste parce que l'unique 1 n'est pas à la même position. C'est ce qui motive la notion de sous-décalage.

L'**action de décalage** (*shift action*) $\sigma : \mathbf{n} \mapsto \sigma^{\mathbf{n}}$ du groupe additif \mathbb{Z}^d sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est définie par

$$(\sigma^{\mathbf{n}}(x))_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\mathbf{n}} \tag{5.1}$$

pour tout $x = (x_{\mathbf{k}}) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. En reprenant l'exemple ci-dessus, on a donc $(\sigma^{j-i}(w^{(j)}))_i = w_j^{(j)}$: si on décale de $j - i$ positions les lettres de $w^{(j)}$, alors le 1 de $w^{(j)}$ se trouvera en position i – et comme le 1 est unique dans chaque mot, avec des 0 partout ailleurs, on a alors $\sigma^{j-i}(w^{(j)}) = w^{(i)}$. On peut ainsi regrouper tous les mots qui sont les même à décalage près. Soit $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, on note \overline{X} la fermeture topologique de X et $\overline{X}^{\sigma} := \{\sigma^{\mathbf{n}}(x) \mid x \in X, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d\}$ la **fermeture par décalage** (*shift closure*) de X . Autrement dit, chaque fois que X contient une configuration x , sa fermeture par décalage doit contenir toutes les images de x par l'action σ . Par exemple, $\overline{w^{(i)}}^{\sigma} = \{w^{(j)} : j \in \mathbb{Z}\}$.

On dit que X est **invariant par décalage** (*shift-invariant*) si $\overline{X}^{\sigma} = X$. L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ de toutes les configurations possibles est appelé **décalage complet** (*full shift*). Un **sous-décalage** (*subshift*) est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ qui est invariant sous l'action de décalage. Il est important de vérifier que l'ensemble est fermé. Par exemple, bien que

$\overline{w^{(i)}^\sigma}$ soit invariant sous l'action de décalage (par construction), ce n'est pas un sous-décalage car il n'est pas fermé. En effet, ses éléments d'indice positif ou nul forment une suite convergente dont la limite est le mot ne contenant que des 0. Il faut donc ajouter ce dernier mot pour obtenir un sous-décalage. Un sous-décalage peut cependant être petit, et même fini. Il y a des exemples triviaux comme les singletons $\{0^\mathbb{Z}\}$ et $\{1^\mathbb{Z}\}$. On peut aussi définir w comme étant le mot contenant des 1 aux positions impaires et des 0 aux positions paires. Dans ce cas, $\overline{w^\sigma} = \{w, \sigma(w)\}$ est un sous-décalage de $\{0, 1\}^\mathbb{Z}$. Si $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-décalage, on note $\sigma = \sigma^X$ la restriction de l'action de décalage (5.1) à X . Dans certains cas, il est utile de spécifier l'action de décalage de \mathbb{Z}^d explicitement et d'écrire (X, σ) au lieu de X .

Une configuration $x \in X$ est **périodique** s'il existe un vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $x = \sigma^\mathbf{n}(x)$. Dans le cas contraire, elle est **non-périodique**. On dit qu'un sous-décalage non vide X est **apériodique** si l'action de décalage σ sur X est libre, c'est-à-dire s'il ne contient aucune configuration périodique. C'est le cas par exemple du sous-décalage engendré par le mot biinfini de Fibonacci. Lorsque X est un sous-décalage, (X, σ) est un système dynamique.

Pour tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{Z}^d$, on désigne par $\pi_S : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^S$ la projection qui restreint chaque $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ à S . Dans ce contexte, un **motif** (*pattern*) peut être vu comme une fonction $p \in \mathcal{A}^S$ pour un sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{Z}^d$. A chaque motif $p \in \mathcal{A}^S$ correspond donc un sous-ensemble $\pi_S^{-1}(p) \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ appelé **cylindre** (*cylinder*). On sait (voir par exemple [Hoc16, Prop. 9.2.4] pour une preuve) qu'un sous-ensemble non vide $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-décalage si et seulement s'il existe un ensemble \mathcal{F} de **motifs interdits** (*forbidden patterns*) tel que

$$X = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \mid \text{pour tout } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \text{ et } S \subset \mathbb{Z}^d, \pi_S \circ \sigma^\mathbf{n}(x) \notin \mathcal{F}\}. \quad (5.2)$$

Un sous-décalage $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un **sous-décalage de type fini** (*subshift of finite type*), abrégé en **SFT**, s'il existe un ensemble *fini* \mathcal{F} vérifiant (5.2). Dans la suite, on considère des sous-décalages de type fini sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, c'est-à-dire le cas où $d = 2$. Notamment, l'ensemble des pavages valides réalisables avec un jeu de tuiles de Wang donné, c'est-à-dire son espace de pavage complet, est appelé **décalage de Wang** (*Wang shift*). C'est en fait un sous-décalage, dont les symboles sont les tuiles et les motifs interdits sont les dominos formés par deux tuiles assemblées le long d'une arête n'ayant pas la même couleur.

5.1.4 Automates finis et transducteurs

Comme l'ont noté Kari [Kar96] puis Jeandel et Rao [JR21], il est parfois utile de représenter un décalage de Wang sous forme de transducteur, un cas particulier d'automate fini². Un **transducteur** (*transducer*) M est un graphe orienté dont les sommets sont appelés **états** et les arcs sont des **transitions**, étiquetées par des paires $a|b$ de lettres où a correspond à une entrée (*input*) et b à une sortie (*output*). Il n'y a pas d'état initial ou final. Étant donné un jeu de tuiles de Wang \mathcal{T} , on peut encoder chaque tuile par le quadruplé de ses couleurs, dans un ordre fixé. Dans l'implémentation servant pour la preuve du théorème, l'ordre utilisé est (t, b, s, a) où les états initial s (*source*) et final t (*target*) d'un arc sont respectivement les bords (verticaux) ouest et est, et le couple $a|b$ correspond aux bords horizontaux des tuiles avec a au sud et b au nord. Autrement dit, le transducteur $M_{\mathcal{T}}$ correspondant à \mathcal{T} est l'ensemble

$$M_{\mathcal{T}} = \left\{ s \xrightarrow{a|b} t : (t, b, s, a) \in \mathcal{T} \right\}.$$

Dans ce travail, comme il s'agit dans un premier temps de construire un nouvel ensemble de tuiles et non d'étudier un jeu de tuiles donné, il s'est révélé plus pratique d'utiliser des automates finis légèrement différents, du moins pendant la phase de construction (quand on ne sait pas encore exactement quelles seront les étiquettes des côtés des tuiles). Dans le premier, les états et transitions sont les mêmes que dans un transducteur tel que décrit ci-dessus mais les étiquettes sont les noms des tuiles à la place des couples $a|b$ de bords horizontaux. Ceci permet de voir facilement si des tuiles peuvent former une séquence sur une ligne : les tuiles T_1, T_2, \dots, T_n avec $T_i = (t_i, b_i, s_i, a_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$ peuvent être placées bord à bord de gauche à droite (d'ouest en est) si et seulement si $M_{\mathcal{T}}$ contient un chemin constitué de transitions $s_{i-1} \xrightarrow{a_i|b_i} t_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dans le second, les états sont les bords horizontaux et un arc de a à b étiqueté T indique que l'ensemble \mathcal{T} contient une tuile T ayant les couleurs a au sud et b au nord. Dans ce cas, on fait la même chose mais suivant les colonnes : les tuiles T_1, T_2, \dots, T_n peuvent être placées bord à bord de bas en haut (du sud au nord) si et seulement si $M_{\mathcal{T}}$ contient un chemin constitué de transitions $a_{i-1} \xrightarrow{s_i|t_i} b_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Les transducteurs restent cependant plus adaptés dès lors que le jeu de tuiles est donné (ou sa construction terminée).

2. ou automate à nombre fini d'états, si on traduit littéralement le nom en anglais *finite state automaton*. Ils sont parfois abrégés en *FSM* car leur autre nom est *finite state machine* : ce sont en effet des machines de Turing particulières.

5.1.5 Partition de Markov

En dimension 1, on considère un système dynamique (X_1, R_1) où $X_1 = \mathbb{R}/(1 + \alpha)\mathbb{Z}$ est l'ensemble des réels quotienté par le réseau $\Gamma_1 = (1 + \alpha)\mathbb{Z}$, c-à-d. les réels sont considérés modulo $1 + \alpha$, et l'action $R_1 : \mathbb{Z} \times X_1 \rightarrow X_1$ est définie par $R_1(n, x) = R_1^n(x) = x + n$. Cela revient à enrouler la droite des réels autour d'un cercle (tore 1-dimensionnel) de longueur $1 + \alpha$, et à faire des pas entiers dans le sens positif (sens de la flèche, antihoraire) ou négatif. Si α est irrationnel, alors les points de \mathbb{Z} sont uniformément répartis sur le cercle : $\mathbb{Z}/(1 + \alpha)\mathbb{Z}$ est dense dans X_1 . En partitionnant X_1 en $\mathcal{P}_1 = \{P_b, P_r\}$ avec une région bleue $P_b = [0, \alpha[$ et une région rouge $P_r = [\alpha, 1 + \alpha[$, on peut alors attribuer une couleur à chaque point de \mathbb{Z} selon la région dans laquelle il tombe. Le mot biinfini formé par ces couleurs peut donc être vu comme un pavage de \mathbb{R} . Pour α irrationnel, on obtient un mot sturmien, qu'on aurait pu obtenir aussi avec un schéma de coupe et projection $2 \rightarrow 1$ de pente α . La Figure 5.3 donne un exemple avec le mot biinfini de Fibonacci, en plaçant l'origine à 0 (comme sur le cercle trigonométrique).

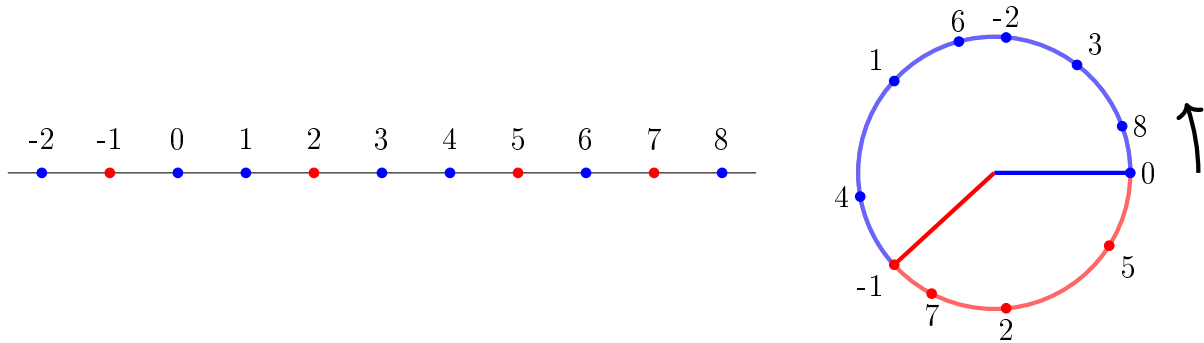


FIGURE 5.3 – À droite, le tore $X = \mathbb{R}/(1 + \varphi)\mathbb{Z}$ est partitionné de sorte que l'arc de cercle bleu a pour longueur φ et le rouge 1. À gauche, sur la droite \mathbb{R} on place les points entiers et on les colore en fonction de la région de la partition dans laquelle ils tombent modulo $1 + \varphi$ (qui est la longueur du cercle).

On peut en fait partir de n'importe quel point de cercle, et obtenir un décalage du mot. On peut donc associer à chaque point du cercle le mot ainsi construit qui lui correspond. En outre, tout comme la fenêtre du schéma de coupe et projection permet de déterminer la fréquence d'apparition d'un motif pour une pente irrationnelle donnée, on peut faire la même chose ici (avec α irrationnel). Soit $S \subset \mathbb{Z}$ fini. Un motif $w \in \mathcal{A}^S$ est **autorisé pour** \mathcal{P}_1, R_1 (*authorized for* \mathcal{P}_1, R_1) si $\bigcap_{k \in S} R^{-k}(P_{w_k}) \neq \emptyset$. Cela signifie que pour chaque symbole w_k du motif w , on regarde dans quelle portion du cercle (intervalle exact) devrait se trouver l'image de 0 pour que w_k ait sa couleur. Pour cette opération, on peut toujours décaler le motif de sorte que le premier symbole de w soit placé en 0. Par exemple, en

considérant que 0=bleu et 1=rouge, 11 n'est pas autorisé car $[\alpha, \alpha + 1[\cap [\alpha - 1, \alpha[= \emptyset$. En revanche 010 est autorisé car $[0, \alpha[\cap [\alpha - 1, \alpha[\cap [\alpha - 1, 2\alpha - 1[\neq \emptyset$.

L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathcal{P},R}$ des mots autorisés pour \mathcal{P}, R est le langage d'un unique sous-décalage $\mathcal{X}_{\mathcal{P},R} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, appelé **système dynamique symbolique** (*symbolic dynamical system*) correspondant à \mathcal{P}, R . En fait, tout pavage (mot biinfini) d'un tel système correspond de façon unique à un point du cercle : pour tout point $p \in \mathbb{R}$, le codage de rotation $p + \mathbb{Z}$ donné par la partition du cercle donne un mot biinfini $w : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ qui est une **représentation symbolique** (*symbolic representation*) de p . Si de plus $\mathcal{X}_{\mathcal{P},R}$ est un décalage de type fini, alors \mathcal{P} est une **partition de Markov** (*Markov partition*). Dans la suite, comme dans l'article de Sébastien Labbé [Lab21a], on fait la même chose en dimension 2.

5.2 Construction du jeu de tuiles de Wang

Comme les tuiles de Wang sont carrées et placées bord à bord, on cherche un découpage des pavages *golden octagonal* dont le graphe est isomorphe à la grille carrée. On obtient ainsi 15 motifs de base mais ceux-ci sont insuffisants car ils permettent de paver le plan périodiquement. On distingue alors différentes versions de certains motifs de sorte à obtenir un ensemble apériodique de tuiles de Wang. On met en évidence un parallèle entre une construction "à la main" et l'utilisation de la fenêtre pour arriver au même résultat. Ceci nous permet de voir une région de la fenêtre comme le domaine fondamental d'un tore, partitionné selon les motifs et muni de deux vecteurs de déplacement, correspondant aux relations d'adjacence horizontale et verticale entre les tuiles. Enfin, la construction permet de formuler le théorème.

5.2.1 Découpage des pavages *golden octagonal* en 15 formes

La méthode utilisée ici a été inspirée par l'exercice 11.1.2 dans [GS87] portant sur les pavages de Penrose par losanges (P3), et appliquée à un pavage *golden octagonal* (figure 5.4, à gauche). L'idée est de décorer les tuiles avec des segments joignant le milieu d'un côté au milieu du côté opposé de certaines tuiles. Comme les tuiles sont des losanges et que le pavage est bord à bord avec des bords verticaux et horizontaux, en joignant tous les côtés verticaux de cette manière, on obtient des lignes "horizontales" et en joignant les côtés horizontaux, on obtient des lignes "verticales" comme dans la Figure 5.4 (au milieu). En coupant le long de ces lignes, on peut décomposer le pavage en formes finies, comme sur la Figure 5.4 (à droite).

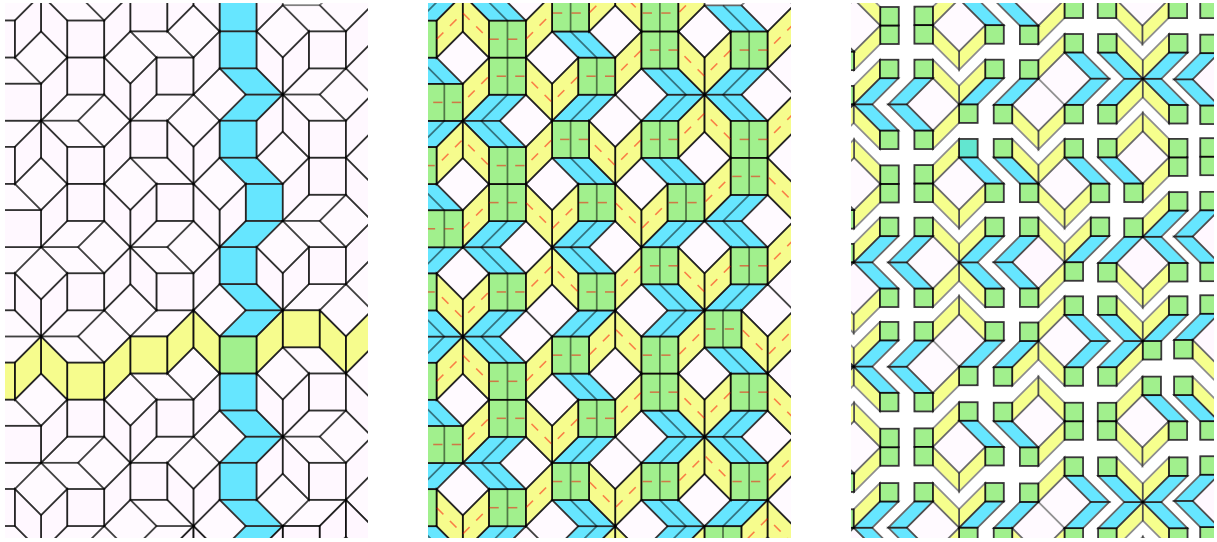


FIGURE 5.4 – À gauche : Pavage *golden octagonal*, avec une bande jaune “horizontale” de tuiles partageant des bords verticaux et une bande bleue “verticale” de tuiles partageant des bords horizontaux. Au milieu : toutes les tuiles à bords verticaux sont colorées en jaune, toutes celles à bords horizontaux en bleu, ainsi chaque carré vert est l’intersection d’une bande bleue et d’une bande jaune ; chaque bande est ensuite coupée en deux (lignes pointillées). À droite : si l’on coupe le long de toutes les lignes en pointillés, de nouvelles tuiles apparaissent avec de petits carrés verts dans leurs coins, des bords “verticaux” bleus, des bords “horizontaux” jaunes et parfois des carrés inclinés (blancs) à l’intérieur.

En utilisant une partie d’un pavage et les règles locales, 7 formes ont été identifiées à isométrie près, ou 15 à translation près (si aucune réflexion ni rotation n’est permise), qui sont essentiellement des carrés déformés que l’on peut assembler bord à bord pour composer des pavages. Les lignes se croisent aux centres des tuiles ayant des arêtes à la

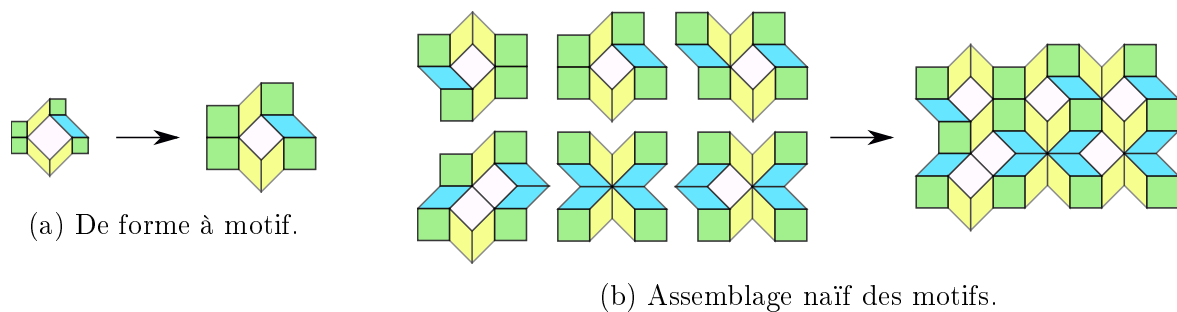


FIGURE 5.5 – Les motifs et leur assemblage.

fois verticales et horizontales, qui sont des carrés (non inclinés). Chacun de ces carrés est ainsi réparti entre 4 formes, chaque losange traversé par une ligne entre 2 formes, tandis que chaque carré incliné reste entier à l’intérieur d’une forme. On appelle donc

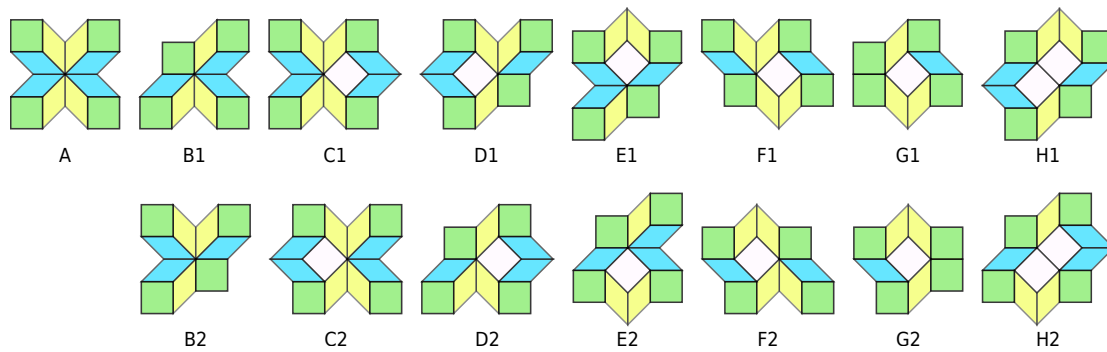


FIGURE 5.6 – Les 15 motifs servant de base aux tuiles de Wang.

coins (*corners*) les carrés verts, et **bords** (*edges*) les portions de bandes composées allant d'un coin au suivant (incluant les coins). On distingue les **bords horizontaux** (*horizontal edges*), ou bords nord et sud, formés par des losanges jaunes et carrés verts, et les **bords verticaux** (*vertical edges*), ou bords est et ouest, formés par des losanges bleus et carrés verts – chacun de ces derniers appartient donc à deux bords. Notons que nous aurions pu choisir n'importe quel type de tuile à la place du carré, et la même procédure aurait permis d'obtenir un ensemble fini de formes (mais pas de la même taille).

Afin de travailler avec des tuiles entières, et pour des raisons pratiques que nous verrons plus tard, nous complétons les formes en motifs, c'est-à-dire que chaque portion de tuile apparaissant dans une forme donnée est complétée en tuile entière, comme dans la Figure 5.5a. On obtient ainsi les motifs illustrés dans la Figure 5.6. Pour l'assemblage, les bords sont superposés tel que décrit dans ce paragraphe. Deux motifs adjacents se chevauchent toujours. Deux motifs i et j peuvent être placés côte à côte horizontalement si et seulement si le bord est de i correspond au bord ouest de j . De même, deux motifs i et j peuvent être placés côte à côte verticalement si et seulement si le bord nord de i correspond au bord sud de j . Par exemple, dans la Figure 5.5b le motif G1 est placé entre G2 à l'ouest et F1 à l'est ; il a au sud un motif A qui est situé entre H2 et C2, ces deux derniers ayant des bords nord correspondant respectivement aux bords sud de G2 et F1, qui se trouvent ainsi au-dessus d'eux. Les motifs utilisés permettent donc non pas de paver mais de recouvrir le plan. Cependant, ce n'est pas un problème puisque les bords doivent se recouvrir exactement, et cela revient donc à assembler bord à bord les formes dont ils sont issus de sorte à compléter chaque tuile du *golden octagonal* ; or un tel assemblage des formes constitue bien un pavage (considérant les formes fermées). Comme l'illustre la Figure 5.7, il n'y a que trois arêtes horizontales et cinq arêtes verticales.

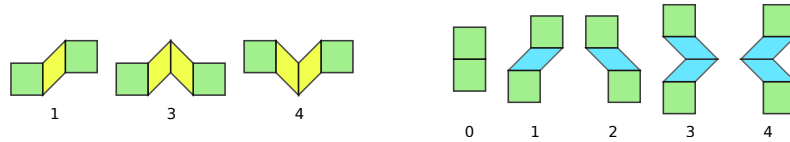
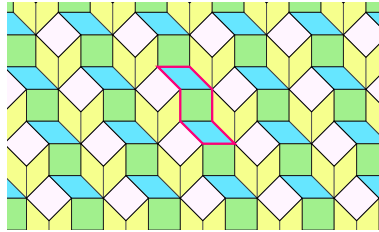


FIGURE 5.7 – Bords horizontaux et verticaux naïfs.

5.2.2 Recodage des motifs en 21 tuiles de Wang

Nous voulons que l'ensemble des pavages réalisables avec notre jeu de tuiles de Wang soit topologiquement conjugué à l'ensemble des pavages *golden octagonal*, qui sont apériodiques. Si nous ne prenons en compte que les côtés des tuiles, il est possible de réaliser des pavages périodiques avec seulement F1. Le jeu de tuiles de Wang correspondant aux 15 formes ci-dessus ne serait donc pas apériodique, et un motif interdit des *golden octagonal* apparaîtrait, comme le montre la Figure 5.8.

FIGURE 5.8 – Partie d'un pavage périodique composé de motifs F1, et produisant un motif en rouge qui est interdit dans les pavages *golden octagonal*.

Pour remédier à cela, on prend en compte les règles locales des pavages *golden octagonal*, ce qui peut être fait “à la main” puisque le rayon des règles locales est petit. Par exemple, on veut que les couleurs nord et sud de F1, et/ou ses couleurs est et ouest, soient différentes. En d'autres termes, on veut différentes versions du bord horizontal étiqueté 4 et/ou du bord vertical étiqueté 2. Pour ce faire, on ajoute quelques tuiles au bord, de telle sorte qu'aucun motif interdit ne puisse apparaître lors de l'assemblage des motifs. Les nouvelles arêtes horizontales et verticales sont illustrées dans les Figures 5.9 et 5.10.

Comme précédemment, on ne peut assembler deux motifs que si leurs bords se superposent exactement, y compris les tuiles qu'on vient d'ajouter. Ainsi, le bord nord de F1 est maintenant 4c tandis que son bord sud est 4b. Cependant, pour les bords verticaux la situation n'est pas aussi claire : le bord ouest doit être 2b, mais le bord est peut être 2a ou 2b si l'on ne considère que l'adjacence immédiate sur les côtés. On utilise des automates finis et des observations sur des motifs un peu plus grands pour déterminer quels “dominos” peuvent être composés ou non. Initialement, on n'avait qu'un seul bord vertical 0, sans la tuile bleue en haut de 0a et 0b : la tuile supplémentaire n'apparaît pas dans

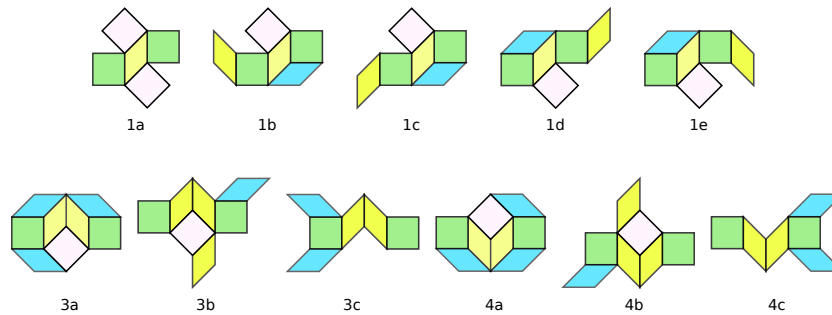


FIGURE 5.9 – Bords horizontaux augmentés, avec des contraintes sur ce qui peut se trouver ou non au-dessus et en dessous. Pour les bords 1b à 1e, il a fallu aussi tenir compte aussi de tuiles adjacentes sur les côtés.

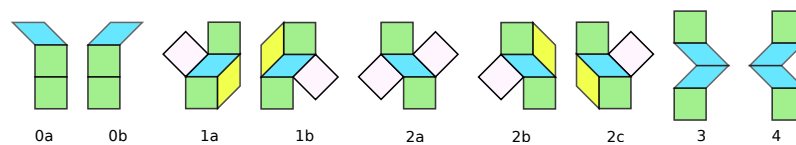


FIGURE 5.10 – Bords verticaux augmentés, avec des contraintes sur ce qui peut se trouver de chaque côté (lorsque c'est nécessaire). Pour les bords 0a et 0b, il a fallu aussi tenir compte aussi de tuiles adjacentes au-dessus.

les dominos considérés. Comme certaines lignes ne sont composées que de motifs **F** et **G** alors qu'aucune autre ligne ne les contient, l'automate pour les bords verticaux a deux composantes connexes (Figure 5.11). Chaque bord augmenté correspond à une couleur pour les côtés des tuiles de Wang, et les automates finis déterminent comment chaque motif doit produire une ou plusieurs tuiles de Wang.

Si l'on considère les bords verticaux, chaque motif correspond exactement à une flèche, à l'exception de **G1** et **G2**, qui apparaissent chacun deux fois. Par conséquent, dans cette direction, il n'y a qu'une seule couleur possible de chaque côté pour chaque motif, à l'exception de **G1** et **G2** qui doivent être dédoublés d'un côté (à l'ouest pour **G1**, à l'est pour **G2**).

Si l'on considère les bords horizontaux, l'automate (Figure 5.12) est fortement connexe. Initialement, les bords horizontaux 1b et 1c ne faisaient qu'un bord 1', sans tuile jaune à gauche, et de même les bords 1d et 1e sans tuile jaune à droite formaient un même bord 1'' (de la même façon que pour 0a et 0b). La plupart des motifs correspondent à une seule flèche, à l'exception de **D1**, **D2**, **H1** et **H2**, qui devraient être dédoublés, et de **G1** et **G2**, qui apparaissent quatre fois chacun. En fait, lorsque les contraintes verticales et horizontales sont combinées, il n'y a qu'une seule possibilité pour **D1**, **D2**, **H1** et **H2**, de sorte qu'il n'est possible de n'avoir qu'une seule tuile de Wang pour chaque motif, à l'exception de **G1** et **G2**.

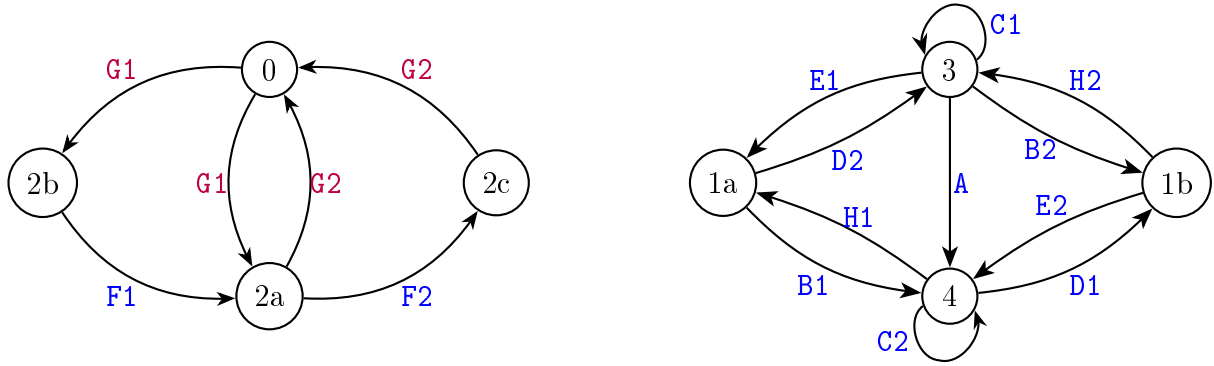


FIGURE 5.11 – Automate permettant de déterminer quels motifs peuvent être adjacents horizontalement. Chaque nœud correspond à un bord vertical, et il existe une flèche étiquetée P du bord x au bord y s'il existe un motif P avec (éventuellement³) le bord x à l'ouest et y à l'est.

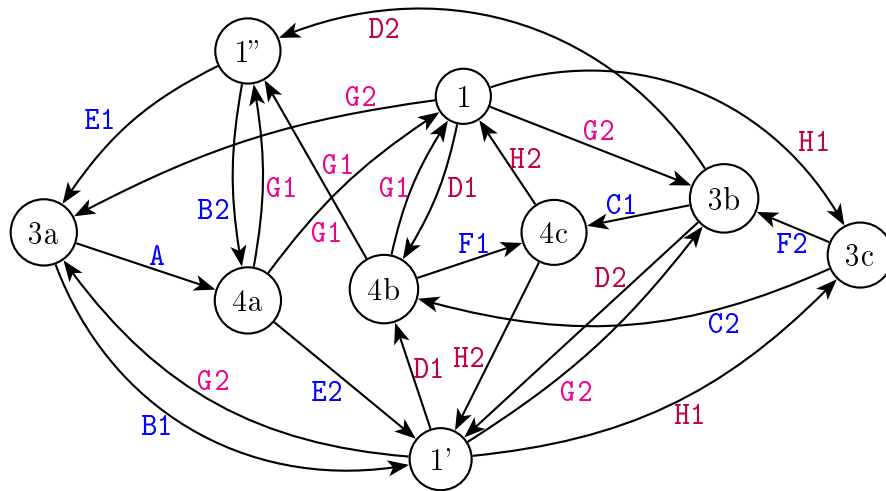


FIGURE 5.12 – Automate permettant de déterminer quels motifs peuvent être adjacents verticalement. Chaque nœud correspond à un bord horizontal, et il y a une flèche étiquetée P du bord x au bord y s'il existe un motif P avec (éventuellement) le bord x au sud et y au nord.

En conséquence, puisqu'il y a $2 \cdot 4 = 8$ possibilités pour chaque motif G , et une seule pour tout autre motif, nous avons un ensemble de 29 tuiles de Wang. Cependant, une fois de plus, certaines tuiles ne peuvent jamais apparaître dans un pavage composé avec cet ensemble, de sorte que nous obtenons finalement l'ensemble de 21 tuiles de la Figure 5.13, que l'on note \mathcal{T}_G . En réalité, toutes les tuiles inutiles n'ont pas été retirées en vérifiant les possibilités "à la main" : la fenêtre du schéma de coupe et projection a été utilisée à deux fins, y compris pour cette tâche. Les sous-sections suivantes décrivent donc comment.

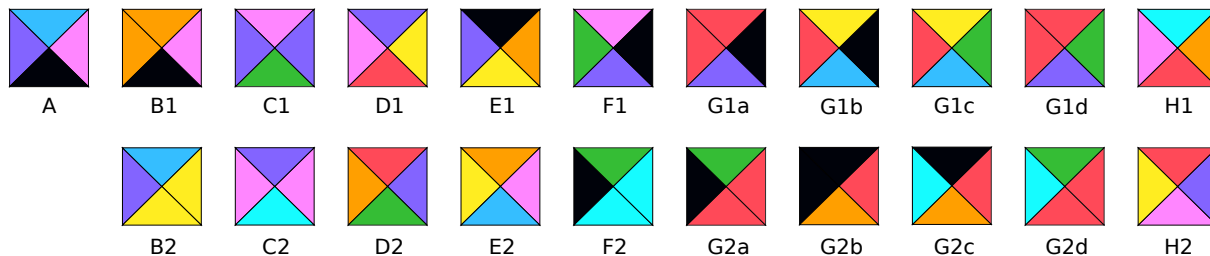


FIGURE 5.13 – Ensemble \mathcal{T}_G de 21 tuiles de Wang, obtenu à partir des pavages *Golden Octagonal*. Les tuiles **G** apparaissent en plusieurs versions afin de s'assurer que les règles locales des pavages *golden octagonal* ne soient pas enfreintes lors de l'assemblage des tuiles.

5.2.3 Partition de la fenêtre

Tout d'abord, même si le rayon des règles locales est petit – et donc le nombre de possibilités assez limité –, nous voulions nous assurer qu'aucun motif n'était oublié. C'est pourquoi nous avons d'abord utilisé la fenêtre à cette fin. Comme mentionné dans la sous-section 5.1.1, la fenêtre pour les pavages octogonaux est un octogone. En utilisant n'importe quelle projection valide, la région correspondant à une tuile unique est un parallélogramme (projection d'une facette d'hypercube). Dans la Figure 5.14 (à gauche), la fenêtre pour les pavages *golden octagonal* est divisée en six parallélogrammes, correspondant aux six tuiles (à translation près). Par construction, tous nos motifs ont des carrés (non inclinés) dans leurs coins. Nous vérifions donc qu'ils couvrent la région de la fenêtre correspondant à tous les motifs ayant un carré dans le coin inférieur gauche (position $(0,0)$), c'est-à-dire la région carrée délimitée en bleu, que l'on note S . Pour y voir plus clair, S est représenté à plus grande échelle sur la droite, avec les sous-régions correspondant aux 15 motifs formant une partition. Notons que les frontières des régions et sous-régions sont dirigées par les projetés des vecteurs de la base canonique, comme on peut le voir dans l'octogone. Les surfaces relatives de ces sous-régions donnent les fréquences des motifs :

$$\begin{aligned}
 \nu([G1]) = \nu([G2]) &= 5 - 3\varphi \simeq 14.5898\% \\
 \nu([A]) = \nu([D1]) = \nu([D2]) &= 5\varphi - 8 \simeq 9.017\% \\
 \nu([H1]) = \nu([H2]) &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\varphi \simeq 7.2949\% \\
 \nu([E1]) = \nu([E2]) = \nu([F1]) = \nu([F2]) &= \frac{5}{2}\varphi - 4 \simeq 4.5085\% \\
 \nu([B1]) = \nu([B2]) = \nu([C1]) = \nu([C2]) &= \frac{13}{2} - 4\varphi \simeq 2.7864\%
 \end{aligned}$$

La somme de ces fréquences est de 100%, ce qui confirme qu'aucun motif n'est manquant.

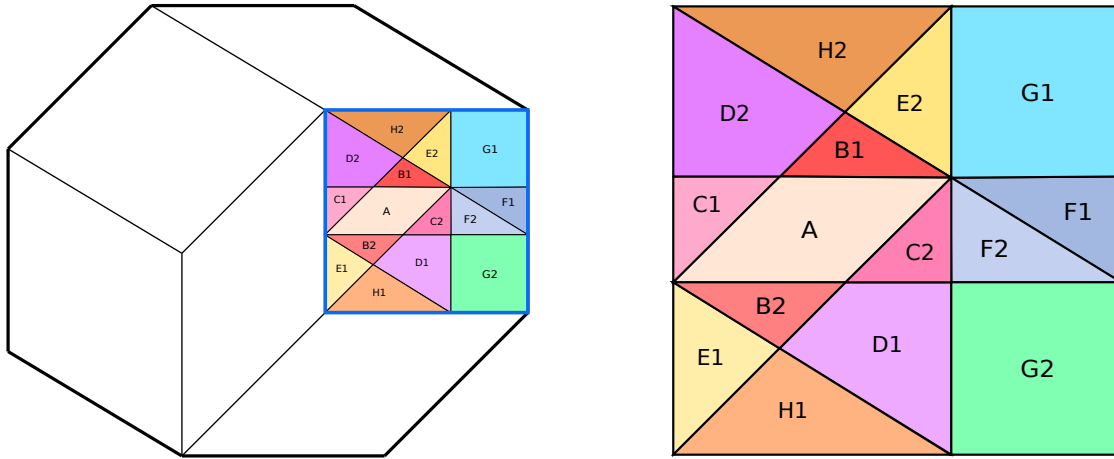


FIGURE 5.14 – Partition de la fenêtre. À gauche : l’octogone est la fenêtre entière pour les pavages *golden octagonal*, et le carré délimitée en bleu S est la région correspondant à une tuile carrée non inclinée. À droite : le carré S est partitionné selon les 15 motifs fins de la Figure 5.6, qui ont tous un carré dans leur coin “inférieur gauche” (position $(0, 0)$).

Pourtant, comme nous l’avons vu, ces 15 motifs ne permettent pas d’obtenir un jeu de tuiles de Wang apériodique. En prenant les motifs augmentés pour $G1$ (resp. $G2$) obtenus par toutes les unions possibles de $G1$ (resp. $G2$) avec ses arêtes augmentées admissibles selon les automates, c’est-à-dire huit versions de $G1$ (resp. $G2$), nous pouvons également déterminer à quelles sous-sous-régions de la fenêtre ils correspondent. On constate alors que la sous-région $G1$ (resp. $G2$) n’est divisée qu’en quatre sous-régions : l’aire est de 0 pour les autres versions de $G1$ (resp. $G2$). Par conséquent, le carré S est finalement divisé en 21 sous-régions (figure 5.15, à gauche).

5.2.4 \mathbb{Z}^2 -action associée

Une autre façon de confirmer que les versions éliminées de $G1$, $G2$ et même les autres motifs pour lesquels nous avons eu plusieurs possibilités à un moment donné n’apparaissent pas, consiste à identifier une action définie sur S qui fait correspondre un motif aux motifs adjacents à l’est (donc horizontalement) ou au nord (donc verticalement). On note R_{e_1} et R_{e_2} les vecteurs de l’espace interne correspondant aux déplacements respectivement horizontal et vertical. Chacun d’eux existe en deux versions équivalentes modulo la taille de S , de sorte que depuis certains points de S , on peut choisir les vecteurs R_{e_1} et R_{e_2} qui restent à l’intérieur de S . Par exemple, à partir du point rouge p de la Figure 5.15, l’ajout du vecteur R_{e_1} long vers le haut ou du vecteur R_{e_1} plus court vers le bas mène au même point p_1 (modulo la taille de S), mais seul le premier vecteur reste à l’intérieur de S au lieu d’atteindre un point du bord inférieur de S et de continuer à partir de son

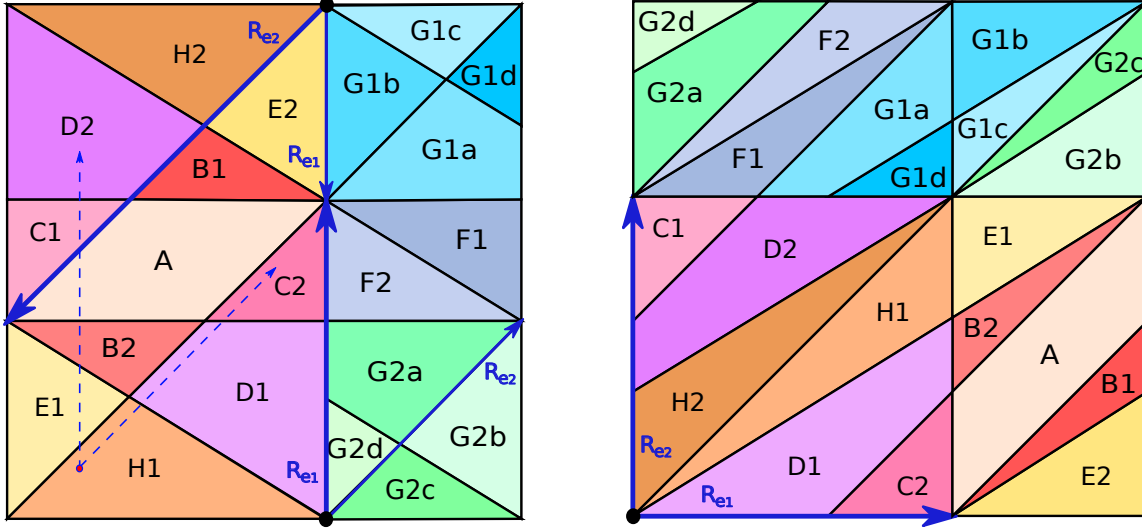


FIGURE 5.15 – Partition affinée de la fenêtre. À gauche : le carré S est partitionné selon les 21 motifs finis obtenus à partir de ceux de la Figure 5.6, en ajoutant à chacun les tuiles supplémentaires de l’arête augmentée appropriée pour chaque côté. Les deux points noirs sont identifiés. À droite : partition \mathcal{P}_G obtenue à partir d’une version remodelée de la fenêtre, de sorte que les vecteurs de la \mathbb{Z}^2 -action soient des vecteurs horizontaux et verticaux unitaires (lorsque la taille du carré est $\varphi \times \varphi$).

point équivalent sur la ligne supérieure. Pour R_{e_2} au contraire, on préfère la version la plus courte à partir du même point p . En d’autres termes, le carré S doit être vu comme le domaine fondamental d’un tore, sur lequel (R_{e_1}, R_{e_2}) agit. Puisque, dans notre exemple, p se trouve dans la région H1 alors il correspond à une tuile H1. Les points $p + R_{e_1}$ et $p + R_{e_2}$ se trouvent respectivement dans les régions D2 et C2, ce qui signifie qu’une tuile D2 doit être placé à l’est de H1 et une tuile C2 au nord.

Une chose est un peu embêtante ici : l’action horizontale correspond à un vecteur vertical tandis que l’action verticale correspond à une direction diagonale. De plus, les vecteurs n’ont pas la même taille. Ainsi, afin de faciliter les calculs, il est pratique d’appliquer une déformation continue de S de sorte que R_{e_1} et R_{e_2} soient des vecteurs unitaires respectivement horizontal et vertical. En partant d’une base de l’espace interne telle que $S = [0, 1]^2$, on applique donc la transformation $\psi : S \rightarrow [0, \varphi]^2$ définie par

$$\psi(x, y) = \varphi((\varphi^{-1} - x + y) \bmod 1, (\varphi^{-1} - x) \bmod 1).$$

On obtient ainsi la partition \mathcal{P}_G (Figure 5.15, à droite) du tore \mathbb{R}^2/Γ_G , où $\Gamma_G = \langle (\varphi, 0), (0, \varphi) \rangle_{\mathbb{Z}}$, et la \mathbb{Z}^2 -action associée $R_G : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2/\Gamma_G \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma_G$ est définie par $R_G(\mathbf{n}, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{n}$. On note $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ le système dynamique symbolique associé à la partition \mathcal{P}_G, R_G .

5.2.5 Génération du jeu de tuiles à partir de \mathcal{P}_G, R_G

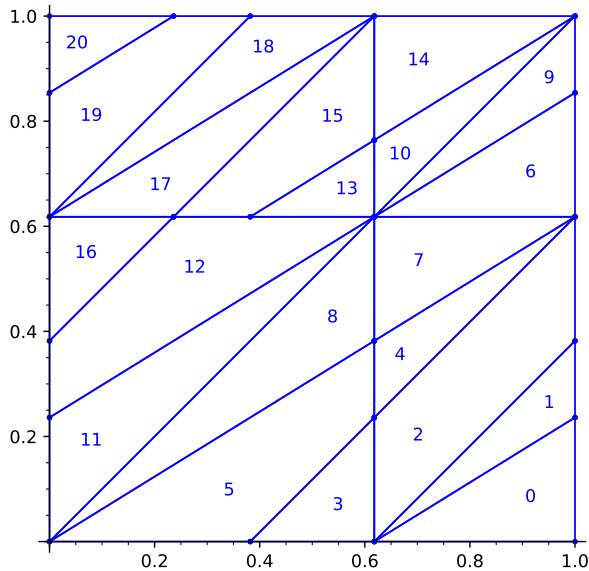
Après avoir choisi manuellement les couleurs, ce qui a donné l'ensemble de la Figure 5.13, nous avons utilisé Sagemath pour automatiser la construction. En effet, dès lors qu'un $4 \rightarrow 2$ a des règles locales, le nombre de motifs obtenus est fini et le découpage de la fenêtre selon les régions calculées nous permet de trouver les tuiles de Wang sans avoir besoin d'examiner à vue les motifs interdits : on se contente d'identifier les actions de rotations correspondant aux règles d'adjacence des motifs. Les fonctions `dominoes_to_wang_color` et `partition_to_wang_tiles` peuvent ainsi être utilisées pour construire un ensemble de Wang à partir de n'importe quelle partition correctement construite en utilisant la fenêtre, transformée de sorte à ce que les vecteurs de rotation soient horizontal et vertical.

On présente ici la démarche dans le cas des pavages *golden octagonal*, donc tous les calculs se font dans $\mathbb{Q}(\varphi)$, et on travaille en valeurs exactes (pas en `float`) afin d'éviter les erreurs d'approximation. En fait, les 15 régions correspondant aux motifs initiaux suffisent : le raffinement de la partition correspondante nous a donné, en utilisant les mêmes fonctions que dans la section suivante, la bonne subdivision pour les régions G1 et G2, sans avoir à regarder les règles locales. En d'autres termes, ces dernières découlent de la partition (toujours avec l'action appropriée) puisque les motifs interdits correspondent à une région d'aire nulle dans la fenêtre. On part ici de la partition \mathcal{P}_G (Figure 5.15, à droite). On définit d'abord φ :

```
sage: z = polygen(QQ, "z") 1
sage: K.<phi> = NumberField(z**2-z-1, "phi", embedding=RR(1.6)) 2
```

On construit la partition :

```
sage: from slabbe import PolyhedronPartition 3
sage: square = Polyhedron([(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)]) 4
sage: P = PolyhedronPartition([square]) 5
sage: inequalities = [ [1/phi,-1,0], [1/phi,0,-1], [0,1,-1], [phi^-1,1,-1], 6
....: [phi^-2,1,-1], [-phi^-2,1,-1], [-phi^-1,1,-1], [0,1,-phi], [-phi^-1,1,-phi], 7
....: [phi^-2,1,-phi], [phi^-1,1,-phi], [1,1,-phi], [1+phi^-2,1,-phi]] 8
sage: for ineq in inequalities: 9
....: P = P.refine_by_hyperplane(ineq) 10
sage: d = {0:0, 1:1, 2:3, 3:2, 4:5, 5:4, 6:8, 7:7, 8:6, 9:11, 10:9, 11:12, 12:13, 11
....: 13:10, 14:12, 15:15, 16:14, 17:16, 18:17, 19:18, 20:19, 21:20} 12
sage: P = P.merge_atoms(d) 13
sage: P.plot() 14
Graphics object consisting of 131 graphics primitives 15
```



Sagemath a numéroté automatiquement les régions de la partition; le tableau 5.1 donne la correspondance avec les noms donnés dans la section précédente.

TABLE 5.1 – Correspondance entre les étiquettes des régions de la partition.

Nouveau nom	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ancien nom	E2	B1	A	C2	B2	D1	G2b	E1	H1	G2c	G1c
Nouveau nom	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Ancien nom	H2	D2	G1d	G1b	G1a	C1	F1	F2	G2a	G2d	

On définit maintenant la \mathbb{Z}^2 -action sur le tore. Pour ces calculs, on a réduit la partition d'un facteur φ , de sorte que le carré (base) a pour côté 1. Les vecteurs de rotation ont donc pour norme φ^{-1} , et leur complément à 1 est φ^{-2} (c-à-d $\varphi^{-1} + \varphi^{-2} = 1$).

```
sage: from slabbe import PolyhedronExchangeTransformation as PET          16
sage: base = matrix.column([(1,0),(0,1)])                                17
sage: R0e1 = PET.toral_translation(base, vector((phi^-2,0)))             18
sage: R0e2 = PET.toral_translation(base, vector((0,phi^-2)))            19
```

On définit une fonction auxiliaire, qui regroupe dans une même composante les tuiles pouvant former un domino, puis attribue une même couleur à chaque côté commun de deux tuiles composant un domino de la même composante :

```
def dominoes_to_wang_color(dominoes):
    edges = [(a,'g'),(b,'d')] for (a,b) in dominoes]
    G = DiGraph(edges, format='list_of_edges')
    C = G.connected_components()
    color_left = {}
```

```

color_right = {}
for i,c in enumerate(C):
    for (a,code) in c:
        if code == 'd':
            color_left[a] = i
        elif code == 'g':
            color_right[a] = i
        else:
            raise ValueError
return color_right,color_left

```

Enfin, on utilise le codage de rotation pour déterminer quels sont les dominos horizontaux et verticaux qui peuvent être formés, puis on utilise la fonction précédente pour attribuer les couleurs aux bords des tuiles, afin de retourner le jeu de tuiles de Wang découlant de la partition.

```

def partition_to_wang_tiles(P, R0e1, R0e2):
    from slabbe.coding_of_PETs import PETsCoding
    coding = PETsCoding((R0e1,R0e2), P)
    Q,d = coding.partition_for_patterns((2,1))
    horizontal_dominos = [(a,b) for [[a],[b]] in d.values()]
    Q,d = coding.partition_for_patterns((1,2))
    vertical_dominos = [(a,b) for [[a],[b]] in d.values()]
    color_right,color_left = dominos_to_wang_color(horizontal_dominos)
    color_top,color_bottom = dominos_to_wang_color(vertical_dominos)
    labels = sorted(color_right)
    tiles = [(color_right[a],color_top[a],color_left[a],color_bottom[a]) for a in labels]
    tiles = [tuple(str(b) for b in tile) for tile in tiles]
    from slabbe import WangTileSet
    return WangTileSet(tiles)

```

On définit l'ensemble T_0 de tuiles de Wang, qui est égal à \mathcal{T}_G . Par défaut, la fonction code les couleurs sous forme de nombres. Pour la partie suivante, on préférera des lettres donc on renomme les bords :

```

sage: from slabbe import WangTileSet                                20
sage: T = partition_to_wang_tiles(P, R0e1, R0e2)                    21
sage: T                                                              22
Wang tile set of cardinality 21                                       23
sage: alphabet = "ABCDEFGHIJK"                                       24
sage: Ta = [alphabet[int(tile[0])] + alphabet[int(tile[1])] + alphabet[int(tile[2])] + 25
            alphabet[int(tile[3])] for tile in T]

```


sage: T0 = WangTileSet(Ta)

et on obtient :

$$T_0 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} B \\ A 0 D \\ J \end{array} & \begin{array}{c} C \\ A 1 E \\ K \end{array} & \begin{array}{c} C \\ A 2 B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} F \\ A 3 A \\ E \end{array} & \begin{array}{c} H \\ D 4 B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} A \\ D 5 A \\ E \end{array} & \begin{array}{c} J \\ F 6 C \\ C \end{array} & \begin{array}{c} I \\ E 7 B \\ C \end{array} & \begin{array}{c} A \\ E 8 A \\ F \end{array} & \begin{array}{c} K \\ F 9 H \\ C \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} B \\ I 10 G \\ H \end{array} & \begin{array}{c} G \\ B 11 D \\ A \end{array} & \begin{array}{c} D \\ B 12 E \\ A \end{array} & \begin{array}{c} E \\ I 13 F \\ A \end{array} & \begin{array}{c} B \\ C 14 G \\ I \end{array} & \begin{array}{c} E \\ C 15 F \\ A \end{array} & \begin{array}{c} D \\ B 16 B \\ G \end{array} & \begin{array}{c} E \\ C 17 I \\ G \end{array} & \begin{array}{c} F \\ H 18 C \\ D \end{array} & \begin{array}{c} A \\ G 19 C \\ D \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} A \\ G 20 H \\ D \end{array} \\ \hline \end{array} \right\}$$

En utilisant la correspondance donnée dans la Table 5.1, et en notant que les tuiles sont tournées de 180 degrés par rapport aux motifs, on peut associer les couleurs des bords à leurs lettres. Ceci est fait dans les Tables 5.2 et 5.3.

TABLE 5.2 – Correspondance entre les étiquettes des bords verticaux.

Nouveau nom	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Ancien nom	4	3	2a	1b	1a	0a	0b	2c	2b

TABLE 5.3 – Correspondance entre les étiquettes des bords horizontaux.

Nouveau nom	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Ancien nom	1a	4a	3a	3b	4b	3c	4c	1e	1d	1c	1b

5.3 Structure substitutive

L'une des questions qui nous intéresse est de préciser les liens qu'il peut y avoir entre le caractère substitutif et le fait d'admettre des règles locales. Exhiber une structure substitutive des pavages *golden octagonal*, qui ont des règles locales, est une étape en ce sens. Nous avons donc entamé une démarche expérimentale afin de trouver une telle structure. En résumé, nous avons effectué une induction de Rauzy sur la partition \mathcal{P}_G ainsi que la désusbtitution du décalage de Wang Ω_G de l'ensemble \mathcal{T}_G (Figure 5.13), permettant ainsi de montrer le caractère substitutif des *golden octagonal*. On s'appuie sur des notions introduites (ou rappelées) dans les articles de Sébastien Labbé mentionnés en début de chapitre : induction de Rauzy, transformation par échange de polygones, mots de retour, partition auto-induite, mots 2-dimensionnels et leur langage, les morphismes 2-dimensionnels, la reconnaissabilité, ainsi que les marqueurs, l'autosimilarité et les désusbtstitutions. Pour ce travail en cours, quelques résultats avec leurs démonstrations

peuvent déjà être présentés ici. Les preuves sont assistées par ordinateur, et les calculs un peu longs ont été mis en annexe.

Dans un premier temps, nos expérimentations ont permis de montrer un résultat pouvant se résumer ainsi :

Théorème 3. *Le système dynamique symbolique $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ associé à la partition \mathcal{P}_G, R_G est l'image par un morphisme surjectif (à décalage près) d'un système dynamique substitutif.*

Démonstration. On suit la démarche de Sébastien Labbé dans [Lab21b]. Un énoncé plus précis du résultat ainsi que les calculs nécessaires à la preuve se trouvent à l'Annexe B.1, où les lignes de calcul sont numérotées. On utilise certaines structures et fonctions de la bibliothèque `slabbe` de Sébastien Labbé :

- `PolyhedronPartition` afin de définir une partition,
- `PolyhedronExchangeTransformation` pour les rotations sur le tore, utilisée pour l'induction de Rauzy,
- les fonctions `InducedPartition` et `InducedTransformation`, dont les algorithmes sont définis dans l'article [Lab21b],
- `Substitution2d` pour la correspondance de noms de regions dans deux partitions égales à étiquetage près.

En outre, chaque β du théorème (dans l'énoncé plus précis donné en annexe) correspond à deux inductions à la suite notées γ , une horizontale et une verticale, suivies d'une mise à l'échelle et un déplacement de la partition, de sorte que cette dernière soit toujours dans le carré $[0, 1]^2$ et dans la bonne orientation. On utilise donc la fonction suivante :

```
def induce_twice(P0, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq):
    P1,gamma0 = R0e2.induced_partition(y_ineq,P0,substitution_type="column")
    R1e1,_ = R0e1.induced_transformation(y_ineq)
    R1e2,_ = R0e2.induced_transformation(y_ineq)
    P2,gamma1 = R1e1.induced_partition(x_ineq,P1,substitution_type="row")
    R2e1,_ = R1e1.induced_transformation(x_ineq)
    R2e2,_ = R1e2.induced_transformation(x_ineq)
    P2_scaled = (-phi*P2).translate((1,1))
    return P2_scaled, gamma0, gamma1 #, R2e1, R2e2
```

Comme l'action R_G est cartésienne, d'après la proposition 7.3 dans [Lab21b], les morphismes γ_i calculés sont surjectifs à décalage près pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, et γ_{11} est une permutation donc bijective (lignes 29 à 32). En renommant les morphismes, on a $\beta_0 = \gamma_1\gamma_2$, $\beta_1 = \gamma_3\gamma_4$, $\beta_2 = \gamma_5\gamma_6$, $\beta_3 = \gamma_7\gamma_8$, $\beta_4 = \gamma_9\gamma_{10}$ et enfin $\tau = \gamma_{11}$. \square

Dans un deuxième temps, on travaille sur l'ensemble de tuiles de Wang \mathcal{T}_G obtenu à partir de la partition \mathcal{P}_G , et on obtient un résultat similaire.

Théorème 4. *Le décalage de Wang Ω_G de l'ensemble \mathcal{T}_G est l'image par un morphisme surjectif (à décalage près) d'un décalage de Wang substitutif.*

Démonstration. 1. On suit la démarche de Sébastien Labbé dans [Lab19], notamment en utilisant les algorithmes 1 et 2 puis en appliquant le lemme 3.5 et le théorème 3.6. On utilise donc les structure et fonctions correspondantes de la bibliothèque `s1abbe` de Sébastien Labbé :

- `WangTileSet` afin de définir un jeu de tuiles de Wang,
- les fonctions `FindMarkers` et `FindSubstitution`, dont les algorithmes sont définis dans l'article [Lab19].

Un énoncé plus précis du résultat ainsi que les calculs nécessaires à la preuve se trouvent à l'Annexe B.2. En résumé, on répète plusieurs fois le même procédé. À chaque étape, on trouve des *marqueurs*, par exemple au début des lignes constituées uniquement de tuiles **F** et **G**, puis chaque ligne marquée est fusionnée avec la ligne se trouvant juste au-dessus (ou en dessous, tant que l'opération est toujours la même), de sorte à créer de nouvelles tuiles. Quand un domino vertical devient ainsi une nouvelle tuile, les étiquettes des côtés sont concaténées (Fig. 7 de [Lab19]). On s'arrête quand on obtient un nouvel ensemble de tuiles qui est équivalent à un ensemble précédemment obtenu, c-à-d. le même à étiquetage près.

2. L'autosimilarité est la condition d'arrêt du point précédent, et calculée dans Sagemath : $\omega = \delta_9\delta_{10}\delta_{11}$ (lignes 301 à 308). L'apériodicité découle du lemme 7 dans [Lab18] et du fait que Ω_G est apériodique. En effet, par construction, s'il existait dans Ω_G un pavage périodique, alors en remplaçant chaque tuile par le motif correspondant d'un pavage *golden octagonal*, on obtiendrait un pavage *golden octagonal* (sans motif interdit, donc respectant la pente) périodique, ce qui est impossible. \square

L'ensemble de tuiles substitutif calculé contient 19 tuiles. Comme les ensembles **T8** et **T10** de la preuve sont équivalents, on peut prendre l'ensemble de tuiles **T8**, dont les tuiles sont énumérées aux lignes 224 à 242, et simplifier les étiquettes. Cependant, les garder pourrait nous permettre (travail à venir) de trouver un éventuel lien avec des mots unidimensionnels, et/ou avec les sous-périodes ou directions de non-expansivité.

En attendant, d'en savoir plus, on conclut sur le lien entre les deux espaces de pavages :

Théorème 5. *Le système dynamique symbolique $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ et le décalage de Wang Ω_G sont topologiquement conjugués.*

Démonstration. $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ et Ω_G ont la même structure substitutive, dans le sens où les substitutions calculées pour les Théorèmes 3 et 4 vérifient les égalités suivantes : $\beta_0 = \delta_1\delta_2$, $\beta_1 = \delta_3\delta_4$, $\beta_2 = \delta_5\delta_6$, $\beta_3 = \delta_7\delta_8$ et enfin $\beta_4\tau = \omega$, comme on peut le voir aux lignes de calcul 57, 64, 71, 99, 129, 159, 189, 218, 247 et 276, montrant que $\delta_i = \gamma_i$ pour tout $\forall i \in \{1, \dots, 10\}$ (l'ordre radix est utilisé afin de pouvoir comparer les substitutions sur des objets différents). Par conséquent, ils sont topologiquement conjugués. \square

En outre, on déduit de ce qui précède que

Corollaire 5. *Les pavages golden octagonal sont substitutifs.*

Enfin, bien que la partition raffinée ne soit pas la même que celle obtenue pour les pavages de Jeandel-Rao, elle y ressemble. On conjecture donc un lien entre les deux.

Conjecture 1. *Le décalage de Wang autosimilaire obtenu à partir du décalage de Wang de Jeandel-Rao est un facteur du décalage de Wang autosimilaire obtenu à partir du décalage de Wang des pavages golden octagonal.*

Il pourrait aussi y avoir un lien avec la partition obtenue pour les pavages de Penrose, également étudiée dans l'article en cours.

Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse établissent ou renforcent des liens entre différentes façons de définir ou construire des pavages quasipériodiques. Le dernier chapitre fait un pont entre schéma de coupe et projection et décalages de Wang.

Conjecture 2. *Pour tout pavage canonique $4 \rightarrow 2$ dont la pente E a des règles locales, il existe un découpage donnant un ensemble fini de motifs finis équivalent à un ensemble apériodique de tuiles de Wang. En outre en partitionnant la fenêtre de E et en identifiant les actions définissant les dominos autorisés, on a une partition de Markov d'un tore 2-dimensionnel offrant une représentation symbolique des pavages.*

Les droites (ou segments) séparant les régions correspondent en effet aux bords des motifs, et les actions pourraient découler des sous-périodes. On cherche aussi un lien éventuel avec les directions de non-expansivité. Nous n'en sommes qu'au début de cet axe de recherche, mais avons bon espoir de fortifier le pont que nous avons commencé à bâtir.

Si les sous-périodes, en raison de leur lien avec les règles locales, nous aident effectivement pour la partition de la fenêtre, alors ce qui précède pourrait aussi avoir un lien avec les barres d'Ammann, et au passage montrer que leur caractère substitutif ne se limite pas au cas de Penrose. On se demande notamment si les mots définis par les intervalles entre les droites de chaque direction sont des mots de billard. On observe en effet que pour les pavages cyrénaïques il y a 3 intervalles – ou 2, avec possibilité qu'en changeant la projection ce soit 3. Or les mots de billard sont les mots sur un alphabet de trois lettres correspondant à un schéma de coupe et projection $3 \rightarrow 1$ avec pente irrationnelle, et on part ici de pavages $4 \rightarrow 2$: il s'agirait donc d'oublier une dimension.

Les mots observés entre les barres semblent être substitutifs mais nous n'en avons pour l'instant que des portions finies. Les sous-périodes pourraient nous permettre d'en savoir plus sur ces mots, avec une caractérisation systématique, car on aurait alors des propriétés sur la structure à longue portée. En outre, on sait que certains résultats sur les mots bi-infinis ne sont pas valables quand la dimension augmente, et un tel lien pourrait donner des conditions suffisantes (ou nécessaires) pour que ces résultats s'appliquent en dimension 2.

Conjecture 3. *Un pavage canonique $4 \rightarrow 2$ admet des règles locales si et seulement si il est substitutif.*

Nous avons vu en effet au chapitre 3 comment les propriétés substitutives peuvent être utilisées pour définir des constructions arbitrairement grandes dans des pavages. C'est ainsi que nous avons trouvé une famille infinie de sous-arbres induits pleinement feuillus, dont on a déduit l'expression de la fonction feuille pour les P2-graphes. Une chose nous a surpris : on s'attendait à une fonction non ultimement périodique, dépendant de φ . Comme les segments autour desquels les chenilles ondulent suivent les barres d'Ammann, là encore on pourrait avoir un lien avec les sous-périodes, ou les ombres auxquelles elles correspondent. On pourrait d'ailleurs davantage coller aux segments, en passant par le bas des bateaux au lieu du haut (pour aller d'une pointe à l'autre). L'inconvénient est que ce n'est pas possible quand le motif BS est inversé, avec l'étoile "en haut" et le bateau à l'envers en dessous. Toutefois, outre les feuilles qui peuvent souvent être aussi bien un cerf-volant qu'une fléchette, et cette alternative le long des bateaux, il semble que les arbres de Penrose pleinement feuillus soient très souvent des sous-chenilles de la famille $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou en soient proches.

Conjecture 4. *Soit \mathcal{C}^{P^2} l'ensemble des chenilles de Penrose dont le chemin dérivé est inclus dans celui d'une chenille C_k , ou passe par le bas de certains bateaux au lieu du haut. Soit I_n un arbre de Penrose pleinement feuillu d'ordre $n \in \mathbb{N}$.*

- *Si $L_{P^2}(n) > L_{P^2}(n-1)$, alors I_n est inclus dans une chenille de la famille $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$.*
- *Si $L_{P^2}(n) = L_{P^2}(n-1)$, alors I_n peut être factorisé en trois sous-chenilles incluses dans des chenilles $C_{k_1}, C_{k_2}, C_{k_3}$, dont deux ont un chemin dérivé contenant au plus trois sommets (de degré 3).*

Outre l'énumération de tous les sous-arbres induits pleinement feuillus des P2-graphes, on peut bien sûr étudier le problème FLIS et chercher la fonction feuille pour d'autres pavages. À ce titre, malgré les liens étroits entre les pavages de Penrose de types P2 et P3, on note que la fonction feuille est différente pour P3 dès $n = 12$: $L_{P^3}(12) = 6 < 7 = L_{P^2}(12)$. Ceci n'empêche cependant pas une transformation éventuelle entre les sous-arbres pleinement feuillus de l'un et l'autre types, qu'il serait amusant d'explorer. Bien sûr on peut regarder cela pour toute la classe MLD de Penrose (notamment HBS), et plus généralement pour les pavages substitutifs. D'autant que, si on trouve une façon d'exprimer les substitutions en termes de sous-périodes, ou éventuellement de coordonnées grassmanniennes, on se dirigerait vers une méthode générale. À cet égard, l'étude de différents mots apparaissant dans nos structures pourrait nous donner des pistes, permettant potentiellement d'appliquer des résultats déjà connus sur les mots sturmiens ou de billard.

Nous avons déjà commencé, pour voir dans un premier temps si on reconnaît des mots déjà répertoriés sur OEIS – notamment des mots sur $\{0, 1, 2\}$ correspondant aux types d'Étoiles, ou aux angles des virages –, ou si le langage des chenilles de Penrose est inédit.

Bibliographie

- [Ada22] C. ADAMS. *The Tiling Book : An Introduction to the Mathematical Theory of Tilings*. Miscellaneous Bks. American Mathematical Society, 2022.
- [Al 12] R. A. AL AJLOUNI. « The global long-range order of quasi-periodic patterns in Islamic architecture ». In : *Acta Crystallographica Section A* 68.2 (2012), p. 235-243.
- [Baa99] M. BAAKE. *A guide to mathematical quasicrystals*. 1999.
- [BGS23] M. BAAKE, F. GÄHLER et L. SADUN. *Dynamics and topology of the Hat family of tilings*. 2023.
- [BG13] M. BAAKE et U. GRIMM. *Aperiodic Order. Vol 1. A Mathematical Invitation*. T. 149. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge : Cambridge University Press, sept. 2013.
- [BF13] N. BÉDARIDE et T. FERNIQUE. « The Ammann–Beenker Tilings Revisited ». In : *Aperiodic Crystals*. Sous la dir. de S. SCHMID, R. L. WITHERS et R. LIFSHITZ. Dordrecht : Springer Netherlands, 2013, p. 59-65.
- [BF15a] N. BÉDARIDE et T. FERNIQUE. « No Weak Local Rules for the 4p-Fold Tilings ». In : *Discrete & Computational Geometry* 54.4 (oct. 2015), p. 980-992.
- [BF15b] N. BÉDARIDE et T. FERNIQUE. « When periodicities enforce aperiodicity ». In : *Communications in Mathematical Physics* 335.3 (fév. 2015), p. 1099-1120.
- [BF17] N. BÉDARIDE et T. FERNIQUE. « Weak local rules for planar octagonal tilings ». In : *Israel Journal of Mathematics* 222.1 (oct. 2017), p. 63-89.
- [BF20] N. BÉDARIDE et T. FERNIQUE. « Canonical projection tilings defined by patterns ». In : *Geometriae Dedicata* 208.1 (fév. 2020), p. 157-175.

- [Bee82] F. P. M. BEENKER. *Algebraic theory of non periodic tilings of the plane by two simple building blocks : a square and a rhombus*. Rapp. tech. TH Report 82-WSK-04. Technische Hogeschool Eindhoven, 1982.
- [Ber66] R. BERGER. *The Undecidability of the domino problem*. American Mathematical Society, 1966.
- [Blo+18] A. BLONDIN MASSÉ, J. de CARUFEL, A. GOUPIL, M. LAPOINTE, É. NADEAU et É. VANDOMME. « Fully Leafed Induced Subtrees ». In : *Combinatorial Algorithms*. Sous la dir. de C. ILIOPOULOS, H. W. LEONG et W.-K. SUNG. Cham : Springer International Publishing, 2018, p. 90-101.
- [BdG18] A. BLONDIN MASSÉ, J. DE CARUFEL et A. GOUPIL. « Saturated fully leafed tree-like polyforms and polycubes ». In : *Journal of Discrete Algorithms* 52-53 (2018). *Combinatorial Algorithms – Special Issue Devoted to Life and Work of Mirka Miller*, p. 38-54.
- [BCL05] A. BOUKERCHE, X. CHENG et J. LINUS. « A Performance Evaluation of a Novel Energy-Aware Data-Centric Routing Algorithm in Wireless Sensor Networks ». In : *Wireless Networks* 11 (sept. 2005), p. 619-635.
- [Bru81] N. G. de BRUIJN. « Algebraic theory of Penrose’s non-periodic tilings of the plane ». In : *Mathematics Proceedings* A84 (1981). Reprinted in [SO87], p. 39-66.
- [Bru86] N. G. de BRUIJN. « DUALIZATION OF MULTIGRIDS ». In : *J. Phys. Colloques* 47 (1986), p. C3-9-C3-18.
- [CLR15] S. CHEN, I. LJUBIC et S. RAGHAVAN. « The Generalized Regenerator Location Problem ». In : *INFORMS Journal on Computing* 27 (avr. 2015), p. 204-220.
- [Cul96] K. CULIK. « An aperiodic set of 13 Wang tiles ». In : *Discrete Mathematics* 160.1 (1996), p. 245-251.
- [Dee+14] A. DEEPAK, D. FERNÁNDEZ-BACA, S. TIRTHAPURA, M. SANDERSON et M. MCMAHON. « EvoMiner : frequent subtree mining in phylogenetic databases ». English (US). In : *Knowledge and Information Systems* 41.3 (nov. 2014), p. 559-590.
- [FL22] T. FERNIQUE et V. LUTFALLA. *Geometrical Penrose Tilings have Finite Type*. 2022.
- [FP23] T. FERNIQUE et C. PORRIER. *Ammann Bars for Octagonal Tilings*. 2023.

-
- [GR86] F. GAHLER et J. RHYNER. « Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 19.2 (fév. 1986), p. 267.
- [GBS94] F. GÄHLER, M. BAAKE et M. SCHLOTTMANN. « Binary tiling quasicrystals and matching rules ». In : *Phys. Rev. B* 50 (17 nov. 1994), p. 12458-12467.
- [Gar77] M. GARDNER. « MATHEMATICAL GAMES ». In : *Scientific American* 236.1 (1977), p. 110-121.
- [Gar88] M. GARDNER. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. W H Freeman & Co, 1988.
- [GS87] B. GRÜNBAUM et G. C. SHEPHARD. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman et Company, New York, 1987.
- [GS16] B. GRÜNBAUM et G. C. SHEPHARD. *Tilings and Patterns*. second. Dover Publications, 2016.
- [Gum06] P. GUMMELT. « Decagon covering model and equivalent HBS-tiling model ». In : *Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials* 221.8 (2006), p. 582-588.
- [Har04] E. O. HARRISS. « On Canonical Substitution Tilings ». Thèse de doct. University of London, 2004.
- [Hen86] C. L. HENLEY. « Sphere packings and local environments in Penrose tilings ». In : *Phys. Rev. B* 34 (2 juill. 1986). reprinted in [SO87], p. 797-816.
- [Hen91] C. L. HENLEY. « Random Tiling Models ». In : *Quasicrystals*. 1991, p. 429-524.
- [Hoc16] M. HOCHMAN. « Multidimensional shifts of finite type and sofic shifts ». In : *Combinatorics, words and symbolic dynamics*. T. 159. Encyclopedia Math. Appl. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016, p. 296-358.
- [JR21] E. JEANDEL et M. RAO. « An aperiodic set of 11 Wang tiles ». In : *Advances in Combinatorics* (jan. 2021).
- [Kar96] J. KARI. « A small aperiodic set of Wang tiles ». In : *Discret. Math.* 160 (1996), p. 259-264.
- [Knu00] D. E. KNUTH. « Dancing links ». In : (nov. 2000). Millenial Perspectives in Computer Science, 2000, 187–214.
- [Lab18] S. LABBÉ. « A self-similar aperiodic set of 19 Wang tiles ». In : *Geometriae Dedicata* 201.1 (août 2018), p. 81-109.

- [Lab19] S. LABBÉ. « Substitutive Structure of Jeandel-Rao Aperiodic Tilings ». In : *Discrete & Computational Geometry* 65.3 (déc. 2019), p. 800-855.
- [Lab20] S. LABBÉ. *Three characterizations of a self-similar aperiodic 2-dimensional subshift*. 2020.
- [Lab21a] S. LABBÉ. « Markov Partitions for Toral \mathbb{Z}^2 -rotations Featuring Jeandel–Rao Wang Shift and Model Sets ». In : *Annales Henri Lebesgue* 4 (jan. 2021), p. 283-324.
- [Lab21b] S. LABBÉ. « Rauzy induction of polygon partitions and toral \mathbb{Z}^2 -rotations ». In : *Journal of Modern Dynamics* 17.0 (2021), p. 481.
- [LLP24] S. LABBÉ, J. LEPŠOVA et C. PORRIER. *Markov Partitions for Golden Octagonal and Penrose tilings*. En préparation. 2024.
- [Le97] T. LE. « Local Rules for Quasiperiodic Tilings ». In : (jan. 1997).
- [Lev88] L. LEVITOV. « Local Rules for Quasicrystals ». In : *Communications in Mathematical Physics* 119 (1988), p. 627-666.
- [Lin04] D. LIND. « Multi-dimensional symbolic dynamics ». In : *Symbolic dynamics and its applications*. T. 60. Proc. Sympos. Appl. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 61-79.
- [LM95] D. LIND et B. MARCUS. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [Lor91] E. LORD. « Quasicrystals and Penrose patterns ». In : *Current science* 61 (1991), p. 313-319.
- [LS07] P. J. LU et P. J. STEINHARDT. « Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture ». In : *Science* 315.5815 (2007), p. 1106-1110.
- [Lüc90] R. LÜCK. « Penrose sublattices ». In : *Journal of Non-Crystalline Solids* 117-118 (1990), p. 832-835.
- [Maz23] J. MAZÁČ. « Patch frequencies in rhombic Penrose tilings ». In : *Acta Crystallographica Section A* 79.5 (sept. 2023).
- [OK89] OLAMY, Z. et KLÉMAN, M. « A two dimensional aperiodic dense tiling ». In : *J. Phys. France* 50.1 (1989), p. 19-33.
- [PK87] A. PAVLOVITCH et M. KLEMAN. « Generalised 2D Penrose tilings : structural properties ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 20.3 (fév. 1987), p. 687.

-
- [PTX84] C. PAYAN, M. TCHUENTÉ et N. H. XUONG. « Arbres avec un nombre maximum de sommets pendants ». In : *Discret. Math.* 49 (1984), p. 267-273.
- [Pen74] R. PENROSE. « The Rôle of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research ». In : *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* (1974). Reprinted in [SO87], p. 266-271.
- [Pen78] R. PENROSE. « Pentaplexity ». In : *Math. Intelligencer* 2.1 (1978), p. 32-37.
- [Pen79] R. PENROSE. « Set of tiles for covering a surface ». In : *United States Patent* 4,133,152 (1979).
- [Por19] C. PORRIER. « Arbres de Penrose pleinement feuillus ». Mém. de mast. Montréal, Qc, CA : Université du Québec à Montréal, avr. 2019.
- [Por23] C. PORRIER. *HBS Tilings extended : State of the art and novel observations*. 2023.
- [PB19] C. PORRIER et A. BLONDIN MASSÉ. « The Leaf Function for Graphs Associated with Penrose Tilings ». In : *2019 First International Conference on Graph Computing (GC)*. 2019, p. 37-44.
- [PB20] C. PORRIER et A. BLONDIN MASSÉ. « The Leaf Function of Graphs Associated with Penrose Tilings ». In : *International Journal of Graph Computing* 1.1 (2020), p. 1-24.
- [PF22] C. PORRIER et T. FERNIQUE. « A General Approach to Ammann Bars for Aperiodic Tilings ». In : *LATIN 2022 : Theoretical Informatics*. Sous la dir. d'A. CASTAÑEDA et F. RODRÍGUEZ-HENRÍQUEZ. Cham : Springer International Publishing, 2022, p. 574-589.
- [Rob96] E. A. ROBINSON. « The dynamical properties of Penrose tilings ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 348 (nov. 1996).
- [Rob04] E. A. ROBINSON. « Symbolic dynamics and tilings of \mathbb{R}^d ». In : *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* 60 (jan. 2004).
- [Rob71] R. M. ROBINSON. « Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane ». In : *Inventiones mathematicae* 12 (1971), p. 177-209.
- [Sen95] M. SENECHAL. *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, 1995.
- [Smi+23a] D. SMITH, J. S. MYERS, C. S. KAPLAN et C. GOODMAN-STRAUSS. *A chiral aperiodic monotile*. Mai 2023.

- [Smi+23b] D. SMITH, J. S. MYERS, C. S. KAPLAN et C. GOODMAN-STRAUSS. *An aperiodic monotile*. Mars 2023.
- [ST11] J. E. SOCOLAR et J. M. TAYLOR. « An aperiodic hexagonal tile ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 118.8 (nov. 2011), p. 2207-2231.
- [SO87] P. J. STEINHARDT et S. OSTLUND. *The Physics of Quasicrystals*. Collection of reprints. World Scientific, 1987, p. 574-589.
- [Ste04] W. STEURER. In : *Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials* 219.7 (2004), p. 391-446.
- [Ste18] W. STEURER. « Quasicrystals : What do we know ? What do we want to know ? What can we know ? » In : *Acta Crystallographica Section A* 74.1 (jan. 2018), p. 1-11.
- [Ste21] W. STEURER. « Gummelt versus Lück decagon covering and beyond. Implications for decagonal quasicrystals ». In : *Acta Crystallographica Section A* 77.1 (2021), p. 36-41.
- [WD09] S. WALTER et S. DELOUDI. *Crystallography of Quasicrystals : Concepts, Methods and Structures*. 1^{re} éd. Springer Series in Materials Science N°126. Springer, 2009.

Annexes

Annexe A

Calculs pour le chapitre 4

La lecture de cette annexe n'est pas nécessaire pour comprendre le chapitre, mais elle peut intéresser les lecteurs qui trouvent que trop de calculs sont passés sous silence. Certains de ces calculs sont difficiles et s'appuient sur des fonctions que nous avons écrites en utilisant SageMath (Python avec en plus des fonctions mathématiques classiques qui sont très utiles ici). Toutes ces fonctions sont disponibles à l'adresse suivante :

<https://github.com/cporrier/Cyrenaic>

L'objectif de cette annexe est d'expliquer comment ces fonctions marchent.

A.1 Génération de pavages par coupe et projection

On utilise la dualité entre multigrille et les schémas de coupe et projection. Une *grille* est un ensemble d'hyperplans parallèles régulièrement espacés (des lignes dans le cas d'un pavage $n \rightarrow 2$). Une **multigrille** (*multigrille*) est donc une matrice $d \times n$ G dont les lignes définissent la direction et l'espacement de chaque grille (vecteur normal à chaque hyperplan, la norme donnant l'espacement), et un **vecteur de décalage** (*shift vector*) S qui spécifie la façon dont chaque grille est translatée à partir de l'origine. Le décalage doit être choisi tel que au plus d hyperplans se croisent en un point (ceci est générique).

La fonction `generators_to_grid(E)` convertit une pente E , donnée par d vecteurs de \mathbb{R}^n qui l'engendrent, en une multigrille G .

Ensuite, à chaque intersection de d hyperplans correspond une tuile : elle est engendrée par les directions des hyperplans, et la i -ième coordonnée de sa position est le nombre d'hyperplans dans la i -ième direction entre l'origine et l'intersection considérée.

La fonction `dual(G,S,k)` calcule le *dual* de la multigrille G avec le vecteur de déplacement S et $2k + 1$ lignes dans chaque direction (puisque nous ne pouvons calculer qu'un

sous-ensemble du pavage infini). Il s'agit d'un ensemble de tuiles représentées chacune par une paire (t, pos) où t est le d -tuple des indices des vecteurs de la base standard qui définissent la prototuile et pos est la translation entière appliquée sur celle-ci (dans \mathbb{Z}^n).

A.2 Sous-périodes

A.2.1 Trouver les coordonnées entières d'une sous-période

Considérons une pente E engendrée par les vecteurs $u_1, \dots, u_d \in \mathbb{R}^n$. On suppose que les entrées des u_i sont dans $\mathbb{Q}(a)$ pour un certain nombre algébrique a , car il a été prouvé dans [BF20] que c'est une condition nécessaire pour avoir des règles locales. On veut trouver une sous-période p de E , c'est-à-dire un vecteur de E avec $d + 1$ coordonnées entières – le *type* de p nous donne les indices de ses coordonnées entières $a_{i_1}, \dots, a_{i_{d+1}}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1} \leq n$). Pour cela, on considère la matrice $n \times (d + 1)$ N dont les colonnes sont les u_j et la sous-période p à déterminer :

$$N = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_d & p \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

Puisque $p \in E$, cette matrice est de rang d et tous les mineurs d'ordre $(d + 1)$ sont donc nuls. En particulier, la nullité du mineur obtenu en sélectionnant les lignes i_1, \dots, i_d donne une équation linéaire sur les a_{i_k} . En effet, le développement du mineur selon la dernière colonne donne

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_{d+1}}) \times \begin{pmatrix} (-1)^1 G_{i_2 \dots i_{d+1}} \\ \vdots \\ (-1)^k G_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{d+1}} \\ \vdots \\ (-1)^{d+1} G_{i_1 \dots i_d} \end{pmatrix} = 0,$$

où $G_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{d+1}}$ est le déterminant de la matrice $d \rightarrow d$ obtenue en prenant les coordonnées i_1, \dots, i_{d+1} sauf i_k des u_i (c'est-à-dire les **coordonnées de Grassmann** (*Grassmann coordinates*) du plan). Puisque les a_i doivent être entiers, on peut les réécrire de la manière suivante. On remplace chaque coefficient $(-1)^k G_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{d+1}}$ par une ligne de longueur $\deg(a)$, le degré algébrique de a , dont la i -ième entrée est le coefficient de a^i dans $(-1)^k G_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{d+1}}$. On obtient ainsi une matrice $n \times \deg(a)$ à coefficients entiers. Ensuite, les a_i sont obtenus en calculant le noyau gauche de cette matrice.

L'algorithme ci-dessus est mis en œuvre dans la fonction `subperiods(E)`, qui produit une liste de sous-périodes représentées chacune par son type et ses $d + 1$ coordonnées entières. Illustrons ceci avec le pavage cyrénaïque. La pente E est générée par les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $a = \sqrt{3}$. Cherchons une sous-période dont les trois premières coordonnées sont entières. La matrice N est

$$N = \begin{pmatrix} a & 1 & a_1 \\ 0 & a-1 & a_2 \\ 1 & -1 & a_3 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix},$$

où $*$ désigne la coordonnée non entière qui ne nous intéresse pas ici. Considérons le mineur d'ordre 3 obtenu avec les trois premières lignes et développons-le selon la dernière colonne. On obtient :

$$(a_1, a_2, a_3) \times \begin{pmatrix} -a+1 \\ a+1 \\ -a+3 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme $a = \sqrt{3}$, $\deg(a) = 2$ et ceci est équivalent à

$$(a_1, a_2, a_3) \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Cette matrice 3×2 à coefficients entiers est de rang 2. Son noyau gauche est de dimension 1 et les a_i sont donnés par un vecteur entier premier dans ce noyau :

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, -1).$$

Ceci donne la sous-période $p_3 = (2, 1, -1, *)$, telle que donnée à la Sous-section 4.3.2.

A.2.2 Déterminer si une pente est caractérisée par ses sous-périodes

Pour déterminer si une pente E est caractérisée par ses sous-périodes, on calcule d'abord les sous-périodes de E comme expliqué dans la sous-section précédente. Ensuite, on forme la matrice dont les colonnes sont ces sous-périodes, avec les variables x_i comme coordonnées non entières (puisque seules les coordonnées entières sont connues). Comme ces sous-périodes doivent appartenir au plan E de dimension d , tout mineur d'ordre $(d+1)$ de cette matrice doit être nul. Il en résulte une équation. En considérant tous les mineurs, on obtient un système d'équations polynomiales. La pente est caractérisée par ses sous-périodes si et seulement si ce système est de dimension zéro.

Ceci est implémenté dans la fonction `is_determined_by_subperiods(E)`.

A.2.3 Trouver les coordonnées non-entières des sous-périodes

Pour calculer les sous-périodes d'une pente E vues comme des vecteurs dans E , on calcule d'abord les coordonnées entières des sous-périodes comme expliqué ci-dessus. On considère ensuite les entrées non entières inconnues avec les variables x_i . La matrice formée par les sous-périodes est de rang d puisque toutes les sous-périodes doivent être dans le plan de dimension d E . Ses mineurs d'ordre $(d+1)$ doivent donc tous être nuls. Cela donne un système polynomial d'équations dans les x_i . Nous prenons la solution qui est dans E : cela nous donne toutes les coordonnées des sous-périodes.

Ceci est implémenté dans la fonction `lifted_subperiods(E)`.

A.3 Construction d'un ensemble de tuiles décorées

La méthode permettant de trouver une bonne projection est décrite dans la sous-section 4.3.2. Elle est implémentée par la fonction `fine_projection(E)`. Nous avons également implémenté la fonction `valid_projection(A,E)`, qui vérifie si la projection A est valide pour la pente E .

A.3.1 Calculer le r -atlas

Le calcul du r -atlas d'un pavage par coupe et projection repose principalement sur les notions de fenêtre et de *région*. On rappelle ici brièvement ces notions ; le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails dans [BF20].

Considérons un pavage fortement planaire $n \rightarrow d$ de pente donnée E . Considérons le motif le plus simple : une seule arête dirigée par $\pi(e_i)$. Pour décider si ce motif apparaît quelque part dans le pavage, nous devons décider s'il existe un sommet x du pavage tel que $x + \pi(e_i)$ est aussi un sommet du pavage. Par définition, un sommet x appartient au pavage si et seulement si son relevé \hat{x} appartient au tube $E + [0, 1]^n$. L'idée est de regarder dans l'espace orthogonal à E , noté E' (parfois appelé *espace interne*, alors que E est appelé *espace réel*). On note π' la projection orthogonale sur E' . Maintenant, un sommet x appartient au pavage si $\pi'(\hat{x})$ appartient au polytope $W := \pi'([0, 1]^n)$. Ce polytope est appelé la *fenêtre* du pavage. De même, $x + \pi(e_i)$ appartient au pavage si $\pi'(\hat{x} + e_i)$ appartient à W , c'est-à-dire si $\pi'(\hat{x})$ appartient à $W - \pi'(e_i)$. Il existe donc deux sommets x et $x + \pi(e_i)$ du pavage si et seulement si le polytope suivant n'est pas vide :

$$R(e_i) := W \cap (W - \pi'(e_i)).$$

Le polytope $R(e_i)$ est appelé la **région** (*region*) du motif formé par une seule arête dirigée par $\pi(e_i)$. Ceci peut être étendu à n'importe quel motif P : un tel motif apparaît quelque part dans le pavage si sa région, définie comme suit, n'est pas vide :

$$R(P) := \bigcap_{x \in P} W - \pi'(\hat{x}),$$

où l'intersection est effectuée sur les sommets de P . Ceci est facilement implémenté dans la fonction `region(W, ip, P)`, qui prend comme paramètres la fenêtre, la projection interne et le motif.

Expliquons maintenant comment utiliser les régions pour calculer le r -atlas. Nous allons maintenir une liste des r -motifs déjà calculés, avec leurs régions dans la fenêtre W . On commence avec une liste vide et on la remplit progressivement de la manière suivante. Tant que les régions déjà calculées ne couvrent pas la totalité de W , on choisit d'abord au hasard un point z dans W qui n'est pas dans l'une des régions déjà calculées. On associe alors à z l'ensemble des points $u \in \mathbb{Z}^n$ de norme au plus r tel que $z + \pi'u \in W$. Cet ensemble est un r -motif, qui est nouveau car sa région ne chevauche pas les régions déjà calculées. On calcule la région de ce r -motif et on ajoute à la fois le motif et la région dans notre liste.

Il y a un petit détail supplémentaire délicat. Avant de calculer la région d'un r -motif, on doit "fermer" ce r -motif, c'est-à-dire ajouter les tuiles qui sont forcées par le r -motif : chaque fois que deux segments consécutifs sur la frontière du motif forment une encoche où une seule tuile peut être ajoutée, alors on doit ajouter cette tuile (parce qu'on sait

qu'il n'y a pas d'autre segment qui divise cette encoche - l'information qu'il n'y a rien est en effet une information à part entière).

Tout cela est implémenté dans la fonction `atlas(E,r)`, qui utilise deux fonctions auxiliaires.

A.3.2 Calcul des tuiles décorées

Pour calculer les tuiles décorées, nous calculons d'abord un atlas suffisamment grand (dans le cas des tuiles cyrénaïques, le 5-atlas est suffisant). Ensuite, pour chaque motif de cet atlas, on calcule les lignes dirigées par les sous-périodes qui passent par chaque sommet du motif et qui intersectent la tuile située à l'origine du motif : on obtient ainsi une tuile décorée. Cette opération est implémentée dans la fonction `decorated_tile`. On procède de la même manière pour chaque motif de l'atlas (fonction `decorated_tiles`) afin d'obtenir l'ensemble des tuiles décorées. La principale difficulté consiste à trouver un ordre sur les tuiles décorées (et sur les décorations) afin de pouvoir les comparer et détecter celles qui sont égales, pour ne garder qu'un exemplaire de chaque.

Annexe B

Calculs pour le chapitre 5

B.1 Induction de Rauzy

Voici plus précisément ce que nous avons montré au chapitre 5 :

Théorème 6 (énoncé précis du Théorème 3). *Soit $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$ le système dynamique symbolique associé à la partition \mathcal{P}_G, R_G . Il existe des réseaux $\Gamma_i \subset \mathbb{R}^2$, des alphabets \mathcal{A}_i , des \mathbb{Z}^2 -actions $R_i : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2/\Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma_i$ et des partitions topologiques \mathcal{P}_i de \mathbb{R}^2/Γ_i indexées par des lettres de l'alphabet \mathcal{A}_i qui donnent une structure substitutive à $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G}$. Plus précisément,*

1. *il existe des morphismes 2-dimensionnels reconnaissables $\beta_i : \mathcal{A}_{i+1} \rightarrow \mathcal{A}_i^{*2}$,*

$$\mathcal{X}_{\mathcal{P}_G, R_G} = \mathcal{X}_{\mathcal{P}_0, R_0} \xleftarrow{\beta_0} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_1, R_1} \xleftarrow{\beta_1} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_2, R_2} \xleftarrow{\beta_2} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_3, R_3} \xleftarrow{\beta_3} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4}$$

qui sont surjectifs à décalage près, c'est-à-dire $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_i, R_i} = \overline{\beta_i(\mathcal{X}_{\mathcal{P}_{i+1}, R_{i+1}})}^\sigma$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$;

2. *le sous-décalage $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4}$ est autosimilaire, avec $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4} = \overline{\beta_4 \tau(\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4})}^\sigma$: il existe un morphisme 2-dimensionnel reconnaissable β_4 et une bijection $\tau : \mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_5$*

$$\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4} \xleftarrow{\beta_4} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_5, R_5} \xleftarrow{\tau} \mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4}$$

qui sont surjectifs à décalage près, c-à-d. $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4} = \overline{\beta_4(\mathcal{X}_{\mathcal{P}_5, R_5})}^\sigma$, $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_5, R_5} = \tau(\mathcal{X}_{\mathcal{P}_4, R_4})$ et le produit $\beta_4 \tau$ est une autosimilarité expansive.

Voici les calculs complétant la preuve du Théorème 3, utilisant les précisions ci-dessus. À la suite les éléments de code donnés en 5.2.5 (fin de la section 5.2), on fait l'induction de Rauzy sur les partitions jusqu'à ce que le processus boucle :

```

sage: x_ineq = [phi^-1,-1,0] 27
sage: y_ineq = [phi^-1,0,-1] 28
sage: P_1,gamma1,gamma2 = induce_twice(P, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq) 29
sage: P_2,gamma3,gamma4 = induce_twice(P_1, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq) 30
sage: P_3,gamma5,gamma6 = induce_twice(P_2, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq) 31
sage: P_4,gamma7,gamma8 = induce_twice(P_3, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq) 32
sage: P_5,gamma9,gamma10 = induce_twice(P_4, R0e1, R0e2, x_ineq, y_ineq) 33
sage: P_3.is_equal_up_to_relabeling(P_4) 34
False 35
sage: P_4.is_equal_up_to_relabeling(P_5) 36
True 37
sage: from slabbe import Substitution2d 38
sage: gamma11 = Substitution2d.from_permutation(P_4.keys_permutation(P_5)) 39

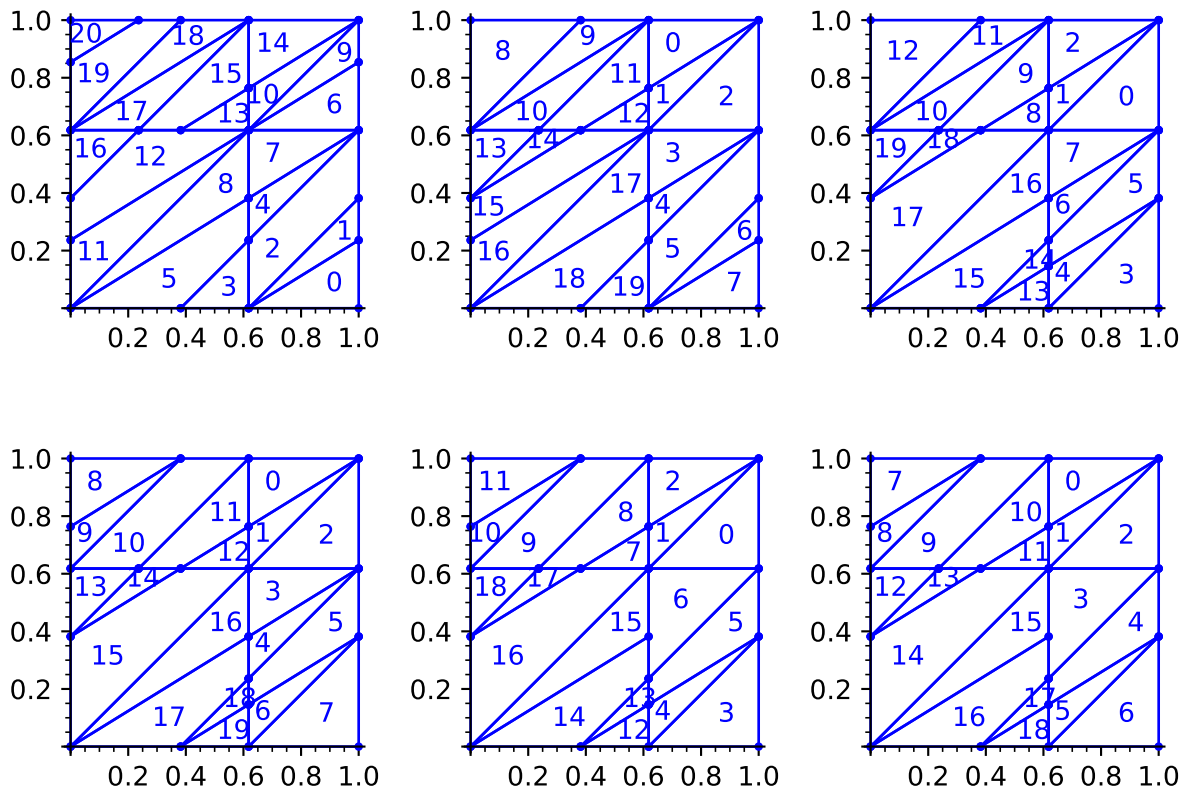
```

Voici la séquence des partitions calculées :

```

sage: ga = graphics_array([P.plot(), P_1.plot(),P_2.plot(), 40
....: P_3.plot(),P_4.plot(),P_5.plot()], ncols=3) 41

```



Voici la séquence des substitutions calculées :

```

sage: gamma1 42

```

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (0), & 1 &\mapsto (1), & 2 &\mapsto (2), & 3 &\mapsto (3), & 4 &\mapsto (5), \\
 5 &\mapsto (8), & 6 &\mapsto (11), & 7 &\mapsto \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, & 8 &\mapsto \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, & 9 &\mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
 10 &\mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, & 11 &\mapsto \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}, & 12 &\mapsto \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}, & 13 &\mapsto \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}, & 14 &\mapsto \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}, \\
 15 &\mapsto \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}, & 16 &\mapsto \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \end{pmatrix}, & 17 &\mapsto \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \end{pmatrix}, & 18 &\mapsto \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

sage: gamma2

43

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (4), & 1 &\mapsto (5), & 2 &\mapsto (6), & 3 &\mapsto (14), & 4 &\mapsto (15), \\
 5 &\mapsto (16), & 6 &\mapsto (17), & 7 &\mapsto (18), & 8 &\mapsto (3, 0), & 9 &\mapsto (4, 0), \\
 10 &\mapsto (4, 1), & 11 &\mapsto (4, 2), & 12 &\mapsto (5, 2), & 13 &\mapsto (11, 7), & 14 &\mapsto (11, 8), \\
 15 &\mapsto (13, 8), & 16 &\mapsto (13, 9), & 17 &\mapsto (14, 10), & 18 &\mapsto (15, 12), & 19 &\mapsto (16, 12).
 \end{aligned}$$

sage: gamma3

44

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (5), & 1 &\mapsto (6), & 2 &\mapsto (7), & 3 &\mapsto (16), & 4 &\mapsto (17), \\
 5 &\mapsto (18), & 6 &\mapsto (19), & 7 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & 8 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, & 9 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \\
 10 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, & 11 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}, & 12 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}, & 13 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}, & 14 &\mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}, \\
 15 &\mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}, & 16 &\mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}, & 17 &\mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

sage: gamma4

45

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (3), & 1 &\mapsto (4), & 2 &\mapsto (5), & 3 &\mapsto (11), & 4 &\mapsto (12), \\
 5 &\mapsto (13), & 6 &\mapsto (14), & 7 &\mapsto (15), & 8 &\mapsto (4, 0), & 9 &\mapsto (5, 0), \\
 10 &\mapsto (5, 1), & 11 &\mapsto (5, 2), & 12 &\mapsto (6, 2), & 13 &\mapsto (12, 7), & 14 &\mapsto (13, 7), \\
 15 &\mapsto (14, 7), & 16 &\mapsto (15, 8), & 17 &\mapsto (16, 9), & 18 &\mapsto (17, 9), & 19 &\mapsto (17, 10).
 \end{aligned}$$

sage: gamma5

46

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (3), & 1 &\mapsto (4), & 2 &\mapsto (5), & 3 &\mapsto (13), & 4 &\mapsto (14), \\
 5 &\mapsto (15), & 6 &\mapsto (16), & 7 &\mapsto (17), & 8 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & 9 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
 10 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, & 11 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, & 12 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, & 13 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}, & 14 &\mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}, \\
 15 &\mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}, & 16 &\mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}, & 17 &\mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}, & 18 &\mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}, & 19 &\mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

sage: gamma6

47

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (5), & 1 &\mapsto (6), & 2 &\mapsto (7), & 3 &\mapsto (15), & 4 &\mapsto (16), \\
 5 &\mapsto (17), & 6 &\mapsto (18), & 7 &\mapsto (19), & 8 &\mapsto (3, 0), & 9 &\mapsto (4, 0), \\
 10 &\mapsto (5, 0), & 11 &\mapsto (5, 1), & 12 &\mapsto (6, 2), & 13 &\mapsto (13, 8), & 14 &\mapsto (13, 9), \\
 15 &\mapsto (14, 10), & 16 &\mapsto (15, 11), & 17 &\mapsto (16, 12), & 18 &\mapsto (17, 12), & 19 &\mapsto (18, 12).
 \end{aligned}$$

sage: gamma7

48

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (5), & 1 &\mapsto (6), & 2 &\mapsto (7), & 3 &\mapsto (15), & 4 &\mapsto (16), \\
 5 &\mapsto (17), & 6 &\mapsto (18), & 7 &\mapsto (19), & 8 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & 9 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
 10 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, & 11 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, & 12 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, & 13 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}, & 14 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}, \\
 15 &\mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}, & 16 &\mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, & 17 &\mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}, & 18 &\mapsto \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

sage: gamma8

49

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (3), & 1 &\mapsto (4), & 2 &\mapsto (5), & 3 &\mapsto (13), & 4 &\mapsto (14), \\
 5 &\mapsto (15), & 6 &\mapsto (16), & 7 &\mapsto (4, 0), & 8 &\mapsto (5, 1), & 9 &\mapsto (5, 2), \\
 10 &\mapsto (6, 2), & 11 &\mapsto (7, 2), & 12 &\mapsto (14, 8), & 13 &\mapsto (15, 8), & 14 &\mapsto (16, 8), \\
 15 &\mapsto (16, 9), & 16 &\mapsto (17, 10), & 17 &\mapsto (18, 11), & 18 &\mapsto (18, 12).
 \end{aligned}$$

sage: gamma9

50

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (3), & 1 &\mapsto (4), & 2 &\mapsto (5), & 3 &\mapsto (12), & 4 &\mapsto (13), \\
 5 &\mapsto (14), & 6 &\mapsto (15), & 7 &\mapsto (16), & 8 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, & 9 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \\
 10 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, & 11 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, & 12 &\mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, & 13 &\mapsto \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}, & 14 &\mapsto \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \\
 15 &\mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}, & 16 &\mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}, & 17 &\mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}, & 18 &\mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

sage: gamma10

51

$$\begin{aligned}
 0 &\mapsto (5), & 1 &\mapsto (6), & 2 &\mapsto (7), & 3 &\mapsto (15), & 4 &\mapsto (16), \\
 5 &\mapsto (17), & 6 &\mapsto (18), & 7 &\mapsto (3, 0), & 8 &\mapsto (4, 0), & 9 &\mapsto (5, 0), \\
 10 &\mapsto (5, 1), & 11 &\mapsto (6, 2), & 12 &\mapsto (13, 8), & 13 &\mapsto (13, 9), & 14 &\mapsto (14, 10), \\
 15 &\mapsto (15, 11), & 16 &\mapsto (15, 12), & 17 &\mapsto (16, 12), & 18 &\mapsto (17, 12).
 \end{aligned}$$

sage: gamma11

52

$0 \mapsto (2), 1 \mapsto (1), 2 \mapsto (0), 3 \mapsto (6), 4 \mapsto (5),$
 $5 \mapsto (4), 6 \mapsto (3), 7 \mapsto (11), 8 \mapsto (10), 9 \mapsto (9),$
 $10 \mapsto (8), 11 \mapsto (7), 12 \mapsto (18), 13 \mapsto (17), 14 \mapsto (16),$
 $15 \mapsto (15), 16 \mapsto (14), 17 \mapsto (13), 18 \mapsto (12).$

B.2 Désubstitution des tuiles de Wang

Voici plus précisément ce que nous avons montré :

Théorème 7 (énoncé précis du Théorème 4). *Soit Ω_G le décalage de Wang de l'ensemble \mathcal{T}_G . Il existe des ensembles de tuiles \mathcal{T}_i avec leurs décalages de Wang associés Ω_i qui donnent une structure substitutive à Ω_G . Plus précisément,*

1. *il existe des morphismes 2-dimensionnels reconnaissables*

$$\Omega_G = \Omega_0 \xleftarrow{\delta_1} \Omega_1 \xleftarrow{\delta_2} \Omega_2 \xleftarrow{\delta_3} \Omega_3 \xleftarrow{\delta_4} \Omega_4 \xleftarrow{\delta_5} \Omega_5 \xleftarrow{\delta_6} \Omega_6 \xleftarrow{\delta_7} \Omega_7 \xleftarrow{\delta_8} \Omega_8$$

qui sont surjectifs à décalage près, c'est-à-dire $\Omega_i = \overline{\delta_{i+1}(\Omega_{i+1})}^\sigma \forall i \in \{0, 1, \dots, 8\}$;

2. *le sous-décalage Ω_8 est autosimilaire : il existe une autosimilarité 2-dimensionnelle $\Omega_8 \xleftarrow{\omega} \Omega_8$ qui est apériodique.*

On utilise l'algorithme `dancing_links` de Knuth [Knu00] pour désubstituer T_0 :

```

sage: T0.find_markers(i=2, radius=1, solver="dancing_links") 53
[[6, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20]] 54
sage: M = [6, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20] 55
sage: T1,delta1 = T0.find_substitution(i=2, M=M, radius=1, solver="dancing_links") 56
sage: assert delta1 == gamma1 57
sage: T1 58
Wang tile set of cardinality 19 59

```

et on obtient :

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} B \\ A 0 D \\ J \end{array} & \begin{array}{c} C \\ A 1 E \\ K \end{array} & \begin{array}{c} C \\ A 2 B \\ B \end{array} & \begin{array}{c} F \\ A 3 A \\ E \end{array} & \begin{array}{c} A \\ D 4 A \\ E \end{array} & \begin{array}{c} A \\ E 5 A \\ F \end{array} & \begin{array}{c} G \\ B 6 D \\ A \end{array} & \begin{array}{c} AF \\ A 7 J \\ K EC \end{array} & \begin{array}{c} AF \\ B 8 J \\ B BC \end{array} & \begin{array}{c} AF \\ B 9 K \\ B BH \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} DI \\ B 10 \\ B BG \end{array} & \begin{array}{c} DI \\ E 11 \\ E AF \end{array} & \begin{array}{c} EC \\ B 12 \\ C BG \end{array} & \begin{array}{c} EC \\ E 13 \\ F AF \end{array} & \begin{array}{c} BC \\ E 14 \\ A DI \end{array} & \begin{array}{c} BH \\ F 15 \\ A EC \end{array} & \begin{array}{c} BG \\ A 16 \\ A EC \end{array} & \begin{array}{c} BG \\ A 17 \\ G BC \end{array} & \begin{array}{c} BG \\ A 18 \\ G BH \end{array} \\ \hline \end{array} \right\}$$

On désubstitue T_1 :

```

sage: T1.find_markers(i=1, radius=1, solver="dancing_links") 60
[[0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 12]] 61
sage: M = [0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 12] 62

```

```

sage: T2,delta2 = T1.find_substitution(i=1, M=M, radius=2, solver="dancing_links") 63
sage: assert delta2 == gamma2 64
sage: T2 65
Wang tile set of cardinality 20 66

```

et on obtient :

$$T_2 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} A \\ D0A \\ E \end{array} & \begin{array}{c} A \\ E1A \\ F \end{array} & \begin{array}{c} G \\ B2D \\ A \end{array} & \begin{array}{c} E \\ BC3 \\ A \\ DI \end{array} & \begin{array}{c} F \\ BH4 \\ A \\ EC \end{array} & \begin{array}{c} A \\ BC5 \\ A \\ EC \end{array} & \begin{array}{c} A \\ BC6 \\ G \\ BC \end{array} & \begin{array}{c} A \\ BC7 \\ G \\ BH \end{array} & \begin{array}{c} FB \\ A8D \\ EJ \end{array} & \begin{array}{c} AB \\ D9D \\ EJ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} AC \\ D10E \\ EK \end{array} & \begin{array}{c} AC \\ D11B \\ EB \end{array} & \begin{array}{c} AC \\ E12B \\ FB \end{array} & \begin{array}{c} EJ \\ DI13 \\ EC \\ EK \end{array} & \begin{array}{c} EJ \\ DI14 \\ EC \\ EB \end{array} & \begin{array}{c} EJ \\ EC15 \\ BC \\ FB \end{array} & \begin{array}{c} EK \\ EC16 \\ BH \\ FB \end{array} & \begin{array}{c} EB \\ BC17 \\ BC \\ AB \end{array} & \begin{array}{c} FB \\ BH18 \\ BC \\ AC \end{array} & \begin{array}{c} AB \\ BC19 \\ EC \\ AC \end{array} \\ \hline \end{array} \right\}$$

On désubstitue T_2 :

```

sage: T2.find_markers(i=2, radius=1, solver="dancing_links") 67
[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]] 68
sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12] 69
sage: T3,delta3 = T2.find_substitution(i=2, M=M, radius=1, solver="dancing_links") 70
sage: assert delta3 == gamma3 71
sage: T3 72
Wang tile set of cardinality 18 73
sage: T3.table() 74
  Id Right Top Left Bottom 75
+---+-----+-----+-----+-----+ 76
  0 EC A BG A 77
  1 BC A BG G 78
  2 BH A BG G 79
  3 BH EK EC FB 80
  4 BG EB BC AB 81
  5 BG FB BH AC 82
  6 BG AB BG AC 83
  7 DIA A BCD A 84
  8 ECA A BHE A 85
  9 ECD G BGB A 86
 10 BCD G BGB G 87
 11 ECD FB DIA EK 88
 12 BCD FB DIA EB 89
 13 BCD FB ECA FB 90
 14 BCD AB ECD FB 91
 15 BHE AC ECD FB 92
 16 BGB AC BCD AB 93
 17 BGB AC BHE AC 94

```

On désubstitue T_3 :

<code>sage: T3.find_markers(i=1, radius=1, solver="dancing_links")</code>	95
<code>[[0, 1, 2, 7, 8, 9, 10]]</code>	96
<code>sage: M = [0, 1, 2, 7, 8, 9, 10]</code>	97
<code>sage: T4,delta4 = T3.find_substitution(i=1, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	98
<code>sage: assert delta4 == gamma4</code>	99
<code>sage: T4</code>	100
Wang tile <code>set</code> of cardinality 20	101
<code>sage: T4.table()</code>	102
Id Right Top Left Bottom	103
+-----+-----+-----+-----+-----+	104
0 BH EK EC FB	105
1 BG EB BC AB	106
2 BG FB BH AC	107
3 ECD FB DIA EK	108
4 BCD FB DIA EB	109
5 BCD FB ECA FB	110
6 BCD AB ECD FB	111
7 BHE AC ECD FB	112
8 EC EBA BC ABA	113
9 EC FBA BH ACA	114
10 BC FBA BH ACG	115
11 BH FBA BH ACG	116
12 BH ABA BG ACG	117
13 DIA FBA DIA EBA	118
14 DIA FBA ECA FBA	119
15 DIA ABA ECD FBA	120
16 ECA ACA ECD FBA	121
17 ECD ACG BCD ABA	122
18 ECD ACG BHE ACA	123
19 BCD ACG BHE ACG	124

On désubstitue T_4 :

<code>sage: T4.find_markers(i=2, radius=1, solver="dancing_links")</code>	125
<code>[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]]</code>	126
<code>sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]</code>	127
<code>sage: T5,delta5 = T4.find_substitution(i=2, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	128
<code>sage: assert delta5 == gamma5</code>	129
<code>sage: T5</code>	130
Wang tile <code>set</code> of cardinality 20	131
<code>sage: T5.table()</code>	132
Id Right Top Left Bottom	133
+-----+-----+-----+-----+-----+	134
0 ECD FB DIA EK	135

1 BCD FB DIA EB	136
2 BCD FB ECA FB	137
3 DIA FBA DIA EBA	138
4 DIA FBA ECA FBA	139
5 DIA ABA ECD FBA	140
6 ECA ACA ECD FBA	141
7 ECD ACG BCD ABA	142
8 ECDBH EK DIAEC EK	143
9 BCDBH EK DIAEC EB	144
10 BCDBH EK ECAEC FB	145
11 BCDBG EB ECDBC FB	146
12 BHEBG FB ECDBH FB	147
13 DIAEC EBA ECDBC FBA	148
14 ECAEC FBA ECDBH FBA	149
15 ECDBC FBA BCDBH ABA	150
16 ECDBH FBA BCDBH ABA	151
17 ECDBH ABA BCDBG ABA	152
18 ECDBH ABA BHEBG ACA	153
19 BCDBH ABA BHEBG ACG	154

On désubstitue T_5 :

<code>sage: T5.find_markers(i=1, radius=1, solver="dancing_links")</code>	155
<code>[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]]</code>	156
<code>sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]</code>	157
<code>sage: T6,delta6 = T5.find_substitution(i=1, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	158
<code>sage: assert delta6 == gamma6</code>	159
<code>sage: T6</code>	160
Wang tile <code>set</code> of cardinality 20	161
<code>sage: T6.table()</code>	162
Id Right Top Left Bottom	163
+---+-----+-----+-----+-----+	164
0 DIA ABA ECD FBA	165
1 ECA ACA ECD FBA	166
2 ECD ACG BCD ABA	167
3 ECDBC FBA BCDBH ABA	168
4 ECDBH FBA BCDBH ABA	169
5 ECDBH ABA BCDBG ABA	170
6 ECDBH ABA BHEBG ACA	171
7 BCDBH ABA BHEBG ACG	172
8 ECD FBAFB DIA EBAEK	173
9 ECD FBAFB ECA FBAEK	174
10 ECD ABAFB ECD FBAEK	175
11 BCD ABAFB ECD FBAEB	176

12 BCD ACAFB ECD FBAFB	177
13 ECDBH EBAEK ECDBC FBAEK	178
14 BCDBH EBAEK ECDBC FBAEB	179
15 BCDBH FBAEK ECDBH FBAFB	180
16 BCDBG FBAEB BCDBH ABAFB	181
17 BHEBG FBAFB BCDBH ABAFB	182
18 BHEBG ABAFB BCDBG ABAFB	183
19 BHEBG ABAFB BHEBG ACAFB	184

On désubstitue T_6 :

<code>sage: T6.find_markers(i=2, radius=1, solver="dancing_links")</code>	185
<code>[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]]</code>	186
<code>sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]</code>	187
<code>sage: T7,delta7 = T6.find_substitution(i=2, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	188
<code>sage: assert delta7 == gamma7</code>	189
<code>sage: T7</code>	190
Wang tile set of cardinality 19	191
<code>sage: T7.table()</code>	192
Id Right Top Left Bottom	193
+-----+-----+-----+-----+-----+	194
0 ECDBH ABA BCDBG ABA	195
1 ECDBH ABA BHEBG ACA	196
2 BCDBH ABA BHEBG ACG	197
3 BCDBH FBAEK ECDBH FBAFB	198
4 BCDBG FBAEB BCDBH ABAFB	199
5 BHEBG FBAFB BCDBH ABAFB	200
6 BHEBG ABAFB BCDBG ABAFB	201
7 BHEBG ABAFB BHEBG ACAFB	202
8 ECDBCDA ABA BCDBHECD ABA	203
9 ECDBHECA ACA BCDBHECD ABA	204
10 ECDBHECD ACG BCDBGBCD ABA	205
11 ECDBHECD ACG BHEBGBCD ACA	206
12 BCDBHECD ACG BHEBGBCD ACG	207
13 ECDBHECD FBAFB ECDBCDA FBAEK	208
14 BCDBHECD FBAFB ECDBCDA FBAEB	209
15 BCDBHECD FBAFB ECDBHECA FBAFB	210
16 BCDBHECD ABAFB ECDBHECD FBAFB	211
17 BCDBGBCD ABAFB BCDBHECD ABAFB	212
18 BHEBGBCD ACAFB BCDBHECD ABAFB	213

On désubstitue T_7 :

<code>sage: T7.find_markers(i=1, radius=1, solver="dancing_links")</code>	214
<code>[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]]</code>	215

<code>sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]</code>	216
<code>sage: T8,delta8 = T7.find_substitution(i=1, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	217
<code>sage: assert delta8 == gamma8</code>	218
<code>sage: T8</code>	219
Wang tile <code>set</code> of cardinality 19	220
<code>sage: T8.table()</code>	221
Id Right Top Left Bottom	222
+---+-----+-----+-----+-----+	223
0 BCDBH FBAEK ECDBH FBAFB	224
1 BCDBG FBAEB BCDBH ABAFB	225
2 BHEBG FBAFB BCDBH ABAFB	226
3 ECDBHECD FBAFB ECBCDIA FBAEK	227
4 BCDBHECD FBAFB ECBCDIA FBAEB	228
5 BCDBHECD FBAFB ECDBHECA FBAFB	229
6 BCDBHECD ABAFB ECDBHECD FBAFB	230
7 ECDBH FBAEBABA BCDBH ABAFBABA	231
8 ECDBH FBAFBABA BCDBH ABAFBACA	232
9 BCDBH FBAFBABA BCDBH ABAFBACG	233
10 BCDBH ABAFBABA BCDBG ABAFBACG	234
11 BCDBH ABAFBABA BHEBG ACAFBACG	235
12 ECBCDIA FBAFBABA ECBCDIA FBAEBABA	236
13 ECBCDIA FBAFBABA ECDBHECA FBAFBABA	237
14 ECBCDIA ABAFBABA ECDBHECD FBAFBABA	238
15 ECDBHECA ABAFBACA ECDBHECD FBAFBABA	239
16 ECDBHECD ABAFBACG BCDBHECD ABAFBABA	240
17 ECDBHECD ACAFBACG BCDBHECD ABAFBACA	241
18 BCDBHECD ACAFBACG BCDBHECD ABAFBACG	242

On désubstitue T_8 :

<code>sage: T8.find_markers(i=2, radius=1, solver="dancing_links")</code>	243
<code>[[0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11]]</code>	244
<code>sage: M = [0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11]</code>	245
<code>sage: T9,delta9 = T8.find_substitution(i=2, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	246
<code>sage: assert delta9 == gamma9</code>	247
<code>sage: T9</code>	248
Wang tile <code>set</code> of cardinality 19	249
<code>sage: T9.table()</code>	250
Id Right Top Left Bottom	251
+---+-----+-----+-----+-----+	252
0 ECDBHECD FBAFB ECBCDIA FBAEK	253
1 BCDBHECD FBAFB ECBCDIA FBAEB	254
2 BCDBHECD FBAFB ECDBHECA FBAFB	255
3 ECBCDIA FBAFBABA ECBCDIA FBAEBABA	256

4	ECBCDIA FBAFBABA ECDBHECA FBAFBABA	257
5	ECBCDIA ABAFBABA ECDBHECD FBAFBABA	258
6	ECDBHECA ABAFBACA ECDBHECD FBAFBABA	259
7	ECDBHECD ABAFBACG BCDBHECD ABAFBABA	260
8	ECDBHECD BCDBH FBAEK ECBCDIA ECDBH FBAEK	261
9	BCDBHECD BCDBH FBAEK ECBCDIA ECDBH FBAEB	262
10	BCDBHECD BCDBH FBAEK ECDBHECA ECDBH FBAFB	263
11	BCDBHECD BCDBG FBAEB ECDBHECD BCDBH FBAFB	264
12	BCDBHECD BHEBG FBAFB ECDBHECD BCDBH FBAFB	265
13	ECBCDIA ECDBH FBAEBABA ECDBHECD BCDBH FBAFBABA	266
14	ECDBHECA ECDBH FBAFBABA ECDBHECD BCDBH FBAFBABA	267
15	ECDBHECD BCDBH FBAFBABA BCDBHECD BCDBH ABAFBABA	268
16	ECDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BCDBG ABAFBABA	269
17	ECDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BHEBG ABAFBACA	270
18	BCDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BHEBG ABAFBACG	271

On désubstitue T_9 :

<code>sage: T9.find_markers(i=1, radius=1, solver="dancing_links")</code>	272
<code>[[0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]]</code>	273
<code>sage: M = [0, 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12]</code>	274
<code>sage: T10,delta10 = T9.find_substitution(i=1, M=M, radius=1, solver="dancing_links")</code>	275
<code>sage: assert delta10 == gamma10</code>	276
<code>sage: T10</code>	277
Wang tile <code>set</code> of cardinality 19	278
<code>sage: T10.table()</code>	279
Id Right Top Left Bottom	280
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+	281
0 ECBCDIA ABAFBABA ECDBHECD FBAFBABA	282
1 ECDBHECA ABAFBACA ECDBHECD FBAFBABA	283
2 ECDBHECD ABAFBACG BCDBHECD ABAFBABA	284
3 ECDBHECD BCDBH FBAFBABA BCDBHECD BCDBH ABAFBABA	285
4 ECDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BCDBG ABAFBABA	286
5 ECDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BHEBG ABAFBACA	287
6 BCDBHECD BCDBH ABAFBABA BCDBHECD BHEBG ABAFBACG	288
7 ECDBHECD FBAFBABAFBAFB ECBCDIA FBAEBABAFBAEK	289
8 ECDBHECD FBAFBABAFBAFB ECDBHECA FBAFBABAFBAEK	290
9 ECDBHECD ABAFBABAFBAFB ECDBHECD FBAFBABAFBAEK	291
10 BCDBHECD ABAFBABAFBAFB ECDBHECD FBAFBABAFBAEB	292
11 BCDBHECD ABAFBACAFBAFB ECDBHECD FBAFBABAFBAFB	293
12 ECDBHECD BCDBH FBAEBABAFBAEK ECDBHECD BCDBH FBAFBABAFBAEK	294
13 BCDBHECD BCDBH FBAEBABAFBAEK ECDBHECD BCDBH FBAFBABAFBAEB	295
14 BCDBHECD BCDBH FBAFBABAFBAEK ECDBHECD BCDBH FBAFBABAFBAFB	296
15 BCDBHECD BCDBG FBAFBABAFBAEB BCDBHECD BCDBH ABAFBABAFBAFB	297

16 BCDBHECDBHEBG FBAFBABAFBAFB BCDBHECDBCDBH ABAFBABAFBAFB	298
17 BCDBHECDBHEBG ABAFBABAFBAFB BCDBHECDBCDBG ABAFBABAFBAFB	299
18 BCDBHECDBHEBG ABAFBABAFBAFB BCDBHECDBHEBG ABAFBACAFBAFB	300

Le processus a bouclé :

```
sage: T8.is_equivalent(T10) 301
True 302
sage: T7.is_equivalent(T9) # (already one step before actually) 303
True 304
sage: _,_,_,delta11 = T8.is_equivalent(T10, certificate=True) 305
sage: assert delta11 == gamma11 306
```

L'autosimilarité est :

```
sage: omega = delta9*delta10*delta11 307
sage: omega 308
```

$$\begin{aligned}
 0 \mapsto (16), \quad 1 \mapsto (15), \quad 2 \mapsto (14), \quad 3 \mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad 4 \mapsto \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}, \\
 5 \mapsto \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad 6 \mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad 7 \mapsto (15, 5), \quad 8 \mapsto (14, 4), \quad 9 \mapsto (14, 3), \\
 10 \mapsto (13, 3), \quad 11 \mapsto (12, 3), \quad 12 \mapsto \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}, \quad 13 \mapsto \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}, \quad 14 \mapsto \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}, \\
 15 \mapsto \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}, \quad 16 \mapsto \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}, \quad 17 \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}, \quad 18 \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Unicité du sous-décalage autosimilaire par rapport à oméga :

```
sage: seeds = flatten(omega.prolongable_seeds_list()) 309
sage: seeds_as_table = [[list(col[:-1]) for col in m.columns()] for m in seeds] 310
sage: seeds_as_table 311
[[[0, 3], [9, 15]], [[16, 18], [14, 16]], [[0, 3], [10, 15]], [[16, 18], [13, 16]], 312
 [[0, 3], [11, 15]], [[16, 18], [12, 16]], [[1, 3], [9, 15]], [[15, 18], [14,
 16]], [[1, 3], [10, 15]], [[15, 18], [13, 16]], [[1, 3], [11, 15]], [[15, 18],
 [12, 16]], [[2, 3], [9, 15]], [[14, 18], [14, 16]], [[2, 3], [10, 15]], [[14,
 18], [13, 16]], [[2, 3], [11, 15]], [[14, 18], [12, 16]], [[3, 3], [12, 15]],
 [[11, 18], [11, 16]], [[3, 3], [13, 15]], [[11, 18], [10, 16]], [[3, 3], [14,
 15]], [[11, 18], [9, 16]], [[0, 3], [9, 16]], [[16, 18], [14, 15]], [[0, 3], [10,
 16]], [[16, 18], [13, 15]], [[0, 3], [11, 16]], [[16, 18], [12, 15]], [[1, 3],
 [9, 16]], [[15, 18], [14, 15]], [[1, 3], [10, 16]], [[15, 18], [13, 15]], [[1,
 3], [11, 16]], [[15, 18], [12, 15]], [[2, 3], [9, 16]], [[14, 18], [14, 15]],
 [[2, 3], [10, 16]], [[14, 18], [13, 15]], [[2, 3], [11, 16]], [[14, 18], [12,
 15]], [[3, 3], [12, 16]], [[11, 18], [11, 15]], [[3, 3], [13, 16]], [[11, 18],
 [10, 15]], [[3, 3], [14, 16]], [[11, 18], [9, 15]], [[0, 4], [9, 15]], [[16, 17],
```



```

[[14, 16]], [[0, 4], [10, 15]], [[16, 17], [13, 16]], [[0, 4], [11, 15]], [[16,
17], [12, 16]], [[1, 4], [9, 15]], [[15, 17], [14, 16]], [[1, 4], [10, 15]],
[[15, 17], [13, 16]], [[1, 4], [11, 15]], [[15, 17], [12, 16]], [[2, 4], [9,
15]], [[14, 17], [14, 16]], [[2, 4], [10, 15]], [[14, 17], [13, 16]], [[2, 4],
[11, 15]], [[14, 17], [12, 16]], [[3, 4], [12, 15]], [[11, 17], [11, 16]], [[3,
4], [13, 15]], [[11, 17], [10, 16]], [[3, 4], [14, 15]], [[11, 17], [9, 16]],
[[0, 4], [9, 16]], [[16, 17], [14, 15]], [[0, 4], [10, 16]], [[16, 17], [13,
15]], [[0, 4], [11, 16]], [[16, 17], [12, 15]], [[1, 4], [9, 16]], [[15, 17],
[14, 15]], [[1, 4], [10, 16]], [[15, 17], [13, 15]], [[1, 4], [11, 16]], [[15,
17], [12, 15]], [[2, 4], [9, 16]], [[14, 17], [14, 15]], [[2, 4], [10, 16]],
[[14, 17], [13, 15]], [[2, 4], [11, 16]], [[14, 17], [12, 15]], [[3, 4], [12,
16]], [[11, 17], [11, 15]], [[3, 4], [13, 16]], [[11, 17], [10, 15]], [[3, 4],
[14, 16]], [[11, 17], [9, 15]], [[0, 5], [9, 15]], [[16, 16], [14, 16]], [[0, 5],
[10, 15]], [[16, 16], [13, 16]], [[0, 5], [11, 15]], [[16, 16], [12, 16]], [[1,
5], [9, 15]], [[15, 16], [14, 16]], [[1, 5], [10, 15]], [[15, 16], [13, 16]],
[[1, 5], [11, 15]], [[15, 16], [12, 16]], [[2, 5], [9, 15]], [[14, 16], [14,
16]], [[2, 5], [10, 15]], [[14, 16], [13, 16]], [[2, 5], [11, 15]], [[14, 16],
[12, 16]], [[3, 5], [12, 15]], [[11, 16], [11, 16]], [[3, 5], [13, 15]], [[11,
16], [10, 16]], [[3, 5], [14, 15]], [[11, 16], [9, 16]], [[0, 5], [9, 16]], [[16,
16], [14, 15]], [[0, 5], [10, 16]], [[16, 16], [13, 15]], [[0, 5], [11, 16]],
[[16, 16], [12, 15]], [[1, 5], [9, 16]], [[15, 16], [14, 15]], [[1, 5], [10,
16]], [[15, 16], [13, 15]], [[1, 5], [11, 16]], [[15, 16], [12, 15]], [[2, 5],
[9, 16]], [[14, 16], [14, 15]], [[2, 5], [10, 16]], [[14, 16], [13, 15]], [[2,
5], [11, 16]], [[14, 16], [12, 15]], [[3, 5], [12, 16]], [[11, 16], [11, 15]],
[[3, 5], [13, 16]], [[11, 16], [10, 15]], [[3, 5], [14, 16]], [[11, 16], [9,
15]]]

```

```

sage: F = omega.list_2x2_factors() 313
sage: all(seed in F for seed in seeds_as_table) 314
False 315
sage: #omega.has_unique_self_similar_subshift() # slabbe development version 316

```

Remarque : d'après ces derniers calculs, on n'a pas unicité. Nous allons donc continuer à expérimenter et observer !

Index

- (graphe) chenille, 40
- 3-interne-régulier, 41

- action de décalage, 82
- alphabet, 15, 82
- arbre, 40
 - de Penrose, 41
- arête, 15
- As, 23
- atlas, 21
- autorisé pour \mathcal{P}_1, R_1 , 85

- bonne projection, 66
- bords, 88
 - horizontaux, 88
 - verticaux, 88

- chemin, 40
- chenille
 - de Penrose, 41
- classe d'isomorphisme local, 24
- coins, 88
- composition, 24
- condition bord à bord, 15
- configuration, 81
 - périodique, 83
- configurations de sommets, 23
- conjugaison topologique, 81
- coordonnées de Grassmann, 114
- coupe, 18
- cylindre, 83

- Dame, 23
- décalage
 - complet, 82
 - de Wang, 83
- décomposition, 24
- degré, 40
- Deux, 23

- empilement, 14
- empire, 23
- ensemble de tuiles, 14
 - apériodique, 16
- épaisseur
 - d'un pavage (tube), 18
 - des règles locales, 21
- épimorphisme, 81
- espace de pavage complet, 81
- espace interne, 78
- espace réel, 78
- Étoile, 23
- extension, 81

- facette k -dimensionnelle de \mathbb{Z}^n , 17
- facteur, 81
- fenêtre, 18, 78
- fermeture par décalage, 82
- feuilles, 40
- fleur, 51
- fonction feuille, 41

- grand soleil, 51
- graphe

- d'adjacence, 41
- de Penrose, 41
- homomorphisme, 80
- inflation, 25
- k -internes-réguliers, 41
- invariant par T , 80
- invariant par décalage, 82
- isomorphisme, 81
- isomorphisme local, 24
- jeu de tuiles, 14
 - apériodique, 16
- libre, 80
- localement dérivable, 24
- localement isomorphes, 24
- monomorphisme, 81
- mot
 - biinfini, 15
 - binaire, 15
 - n -aire, 15
- motif, 21, 83
- motifs
 - interdits, 83
- multigrille, 112
- mutuellement localement dérivables, 24
- nœuds papillons, 52
- ombre i_1, \dots, i_{n-3} , 61
- P2-graphe, 41
- partition de Markov, 86
- pavage, 14
 - non périodique, 16
 - par coupe et projection, 18
 - planaire, 18
 - périodique, 16
 - substitutif, 25
- pavages
 - canoniques, 18
 - cyrénaïques, 69
 - d'Ammann-Beenker, 20
 - de Penrose, 20
 - généralisés, 20
 - par losanges (P3), 20
 - de Rauzy, 20
 - golden octagonal*, 20
 - $n \rightarrow d$, 18
 - octogonaux, 78
- paver le plan, 15
- penne, 18
- planarité
 - faible, 18
 - forte, 18
- pleinement feuillu, 41
- projection
 - valide, 18
- prototuiles, 14
- r -atlas, 21
- r -motif, 21
- rayon, 21
- recodage local, 24
- recouvrement, 14
- règles locales, 21
 - d'Ammann, 21
 - fortes, 21
- relevé, 18
- représentation symbolique, 86
- Roi, 23
- royaume, 23
- région, 116

segments d'Ammann, 21
Soleil, 23
sommet, 15
sous-arbre induit, 40
sous-décalage, 82
 apériodique, 83
 de type fini, 83
sous-graphe induit, 40
sous-période i_1, \dots, i_{n-3} , 62
surface en escalier, 18
symbole, 81
symétrie, 16
 pentagonale, 16
 rotationnelle, 16
système dynamique, 80
 minimal, 80
 symbolique, 86

topologiquement conjugués, 81
transducteur, 84
triangles de Robinson, 23
tube, 18
tuile, 14
 de Wang, 76
 voisine, 41
tuiles
 équivalentes, 81

Valet, 23
vecteur de décalage, 112
ver de Conway, 52
voisinage, 40
voisins, 40