Ликбез – 1. Комбинаторика.

Задача 1. (I) Верно ли следующее рассуждение?

«Для любого натурального n произвольные n точек плоскости лежат на одной прямой. При $n = 1$ утверждение, очевидно, верно. Предположив, что утверждение верно для $n = k$, докажем его для $n = k + 1$. Возьмём произвольные $k + 1$ точек. Точки $1, \ldots, k$ лежат на одной прямой, точки $2, \ldots, k+1$ лежат на одной прямой (по предположению индукции), следовательно, все они лежат на единственной прямой, проходящей через точки $2, \ldots, k$.»

Задача 2. (I) Докажите, что при любом натуральном n выполняется неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Задача 3. (I) Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при всех $k > 1$. Докажите, что $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ для любых натуральных $m, n \geqslant 2$.

Задача 4. (II) (*Неравенство Бернулли*) Докажите, что если $a > -1$, то $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Задача 5. (II) На окружности расставлены 2^n чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Каждую секунду все числа одновременно умножаются на своего правого соседа. Докажите, что настанет момент, когда все числа будут равны 1.

Задача 6. (II) В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх вне зависимости от того, как Петя выбирает пачки. (Примечание: если "пачка" состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз.)

Задача 7. (III) Девять воров хотят поделить добычу. Любой из них убеждён, что он поделил бы добычу на равные части, однако остальные ему не верят. Каким образом надо действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что ему досталось не менее 1/9 части добычи?

Задача 8. (III) На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается хорошим, если в нём правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и нехорошим в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется нехорошим.

Задача 9. (III) Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 2012 есть отмеченное число. Докажите, что найдётся пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

Задача 10. (I) Имеется $2m$ одинаковых белых шаров и $3n$ одинаковых чёрных шаров. Сколькими способами из всего этого набора можно взять $(m + n)$ шаров?

Задача 11. (I) В каком количестве шестизначных чисел хотя бы 2 цифры совпадают?

Задача 12. (I) Подряд выписаны все числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречается цифра 1?

Задача 13. (I) Сколько среди чисел от 10 до 1000 таких, у которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

Задача 14. (I) Сколько различных браслетов можно сделать из 5 изумрудов, 6 рубинов и 7 алмазов, если в браслет должны войти все 18 камней?

Задача 15. (I) Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

Задача 16. **(I)** Сколькими способами можно разложить m белых и n чёрных шаров так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

Задача 17. **(I)** Пусть множество C содержит n элементов. Сколькими способами можно выбрать такие два его подмножества A и B, что а) $A \cap B = \emptyset$; б) $A \subset B$?

Задача 18. **(I)** Сколько слагаемых получится, если в выражении $(1+x+y)^{20}$ раскрыть скобки, но не привести подобные члены?

Задача 19. **(I)** В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, и наконец — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 20. **(II)** Каждая грань кубика раскрашивается либо в чёрный, либо в белый цвет. Сколько существует различных способов окраски? Два кубика считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они не поворачивались.

Задача 21. **(II)** а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
б) А если рассаживать их не за стол, а на карусель?

Задача 22. **(II)** На вечеринке присутствует 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

Задача 23. **(II)** Фабрика игрушек выпускает разноцветные кубики. У всякого кубика каждая грань целиком окрашена одной из шести красок, имеющихся на фабрике, причём различные грани одного кубика окрашены разными красками. Сколько видов кубиков выпускает фабрика?

Задача 24. **(III)** Фабрика из задачи 23 начала выпуск параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$, склеивая выпускаемые ею кубики по два. Сколько получится различных видов новой игрушки?

Задача 25. **(II)** Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд).
а) Сколько дней ему удастся это делать? б) Сколько блюд он съест за это время?

Задача 26. **(III)** Вася решил последовать примеру Пети из задачи 25, но съедать каждый день нечётное число блюд.
а) Сколько дней ему удастся это делать? б) Сколько блюд Вася съест за это время?

Задача 27. **(III)** Сколько существует десятизначных чисел, все цифры которых различны, и которые делятся на 11111?

Задача 28. **(III)** Сколько телефонных номеров содержат комбинацию 12? Телефонные номера состоят из семи цифр и не могут начинаться с нуля.

Задача 29. а) **(I)** Какое наибольшее количество неразличимых слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

б) **(III)** Найдите число способов такой расстановки.

Задача 30. **(II)** (*Бином Ньютона*) Докажите, что $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$.

Задача 31. **(II)** Сколькими нулями оканчивается число а) $11^{100} - 1$; б) $9^{11} + 1$?

Задача 32. **(III)** Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$.

Задача 33. **(III)** Пусть $p \geqslant m$ и $q \geqslant m$. Найдите сумму $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \cdots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0$.

Задача 34. Комбинаторными методами (не используя явные формулы) докажите, что
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$; в) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$; г) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
д) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$; е) $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m-2}^n + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}$;
ж) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$; з) $n^m - C_n^1 \cdot (n-1)^m + C_n^2 \cdot (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot (n-(n-1))^m = 0$.

Задача 35. **(III)** Для каждого натурального n определите, сколько существует троек натуральных чисел, сумма которых равна $6n$.

Ликбез – 1. Комбинаторика (ответы)

Задача 1. (I) Ошибка в переходе. При $k = 2$ точки $2, \ldots, k$ — это всего одна точка, и через неё проходит бесконечно много прямых.

Задача 2. (I) Тривиальная индукция.

Задача 3. (I) Тривиальная индукция.

Задача 4. (II) Тривиальная индукция.

Задача 5. (II) Если разбить числа в кругу на две группы чисел, стоящих через один друг от друга (чётные и нечётные), то можно заметить, что проведение двух итераций в кругу эквивалентно проведению одной итерации в каждой из групп. Далее тривиальная индукция.

Задача 6. (II) База очевидна. Шаг: рассмотрим колоду из $(k+1)$ карты. Если самая нижняя карта лежит рубашкой вверх, то мы её вообще не можем затронуть. Значит, по предположению индукции, всё сойдётся. Если она лежит рубашкой вниз, то как только мы её затронем, она ляжет рубашкой вверх, и всё сведётся к предыдущему случаю. Если же мы не будем её трогать до последнего, то мы будем работать только с остальной колодой, и перевернём её рубашкой вверх по предположению. Придётся и самую нижную перевернуть в конце, потому что ничего больше не останется. Итого в любом случае всё сойдётся.

Задача 7. (III) Первый вор отделит 1/9 по своему разумению и начнёт по очереди спрашивать остальных, не против ли они, чтобы он забрал её себе. Если кто против, то это означает, что по мнению несогласного там больше 1/9. Тогда несогласный должен лишнее отложить, а оставшееся (1/9 по своему мнению) забрать себе и продолжить обход вместо первого вора. Ясно, что те, кого до этого обошли, против не будут, значит, не позже, чем через 8 вопросов, процесс закончится, и один из воров выйдет из круга с добычей так, что все будут довольны. А остальные продолжат аналогичный процесс по индукции.

Задача 8. (III) Можно считать, что все жители города являются кандидатами, потому что общий случай сводится к этому неявкой на выборы всех некандидатов. Будем вести индукцию по числу жителей города. Если он один, то всё очевидно. Допустим, мы умеем решать задачу для k жителей. Решим задачу для $(k+1)$. Рассмотрим прогноз мэрии. Если хотя бы за одного кандидата она предсказывает 0 голосов, то ему следует прийти на выборы. Теперь прогноз на него точно будет неверным, а остальные смогут сделать его нехорошим по предположению индукции. Если же за всех кандидатов предсказывается не 0, то на выборы просто никто не приходит.

Задача 9. (III) См. решение в задачах всероса. На самом деле не очень сложно.

Задача 10. (I) Если $2n < m$, то $(3n+1)$; если $m \leqslant 2n \leqslant 2m$, то $(m+n+1)$; если $m < n$, то $(2m+1)$.

Задача 11. (I) $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 839\,520$.

Задача 12. (I) 21.

Задача 13. (I) $C_{10}^3 = 120$.

Задача 14. (I) Ответ из книжки имел следующий вид: $\dfrac{18!}{7! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 18 \cdot 2}$. Однако правильным его назвать нельзя, потому что при таком подсчёте различные варианты учитываются разное число раз (а вовсе не одинаковое). Это всё равно что в следующей задаче заявить, что ответ будет $4^8/4!$.

Задача 15. (I) $C_{11}^3 = 165$.

Задача 16. (I) C_{m+1}^n.

Задача 17. (I) а) 3^n; б) 3^n.

Задача 18. (I) 3^{20}. А если привести, то $C_{22}^2 = 231$.

Задача 19. (I) 15.

Задача 20. (II) 10.

Задача 21. (II) а) $2 \cdot (5!)^2 = 28\,800$; б) $2 \cdot (5!)^2/10 = 2\,880$.

Задача 22. (II) $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16\,216\,200$.

Задача 23. (II) $5!/4 = 30$.

Задача 24. (III) $C_{30}^2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 + C_{30}^1 \cdot (C_6^1 \cdot 4 + C_6^2 \cdot 4) = 65\,160$.

Задача 25. (II) а) 2^n; б) $n \cdot 2^{n-1}$.

Задача 26. (III) а) 2^{n-1}; б) $n \cdot 2^{n-2}$.

Задача 27. (III) Сумма цифр данного числа есть 45, поэтому оно делится на 9, а значит, и на 99 999. Отсюда несложно получить, что первые пять цифр числа однозначно определяются последними пятью (сумма цифр, стоящих на позициях k и $5+k$, равна 9). Поэтому количество таких чисел есть $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3\,456$.

Задача 28. (III) Либо нудный перебор, либо принцип включения-исключения. Ещё вариант (предложил Рузаль) — рекуррентно. Последовательно получаем однозначных чисел такого вида 0, двузначных — 1, трёхзначных — 19, четырёхзначных — 279, пятизначных — 3 671, шестизначных — 45 431 и, наконец, семизначных — 540 639. Ответ: 540 639.

Задача 29. а) **(I)** 14; б) **(III)** $2^8 = 256$.

Задача 30. (II) Очевидно либо комбинаторно, либо индукцией.

Задача 31. (II) Применить бином Ньютона. а) 3; б) 2.

Задача 32. (III) $n \cdot 2^{n-1}$.

Задача 33. (III) C_{p+q}^m.

Задача 34. з) **(III)** Рассмотрим размещения с повторениями: из n сортов выбираем m элементов. Заметим, что среди них ровно $(n-k)^m$ таких, которые не содержат элементы первых k сортов. Осталось применить принцип включения-исключения.

Важно отметить, что это рассуждение работает только при $n > m$. Если $m = n$, то в ответе получится $n!$, а в общем случае формулы получить нельзя (разве что рекуррентную).

Задача 35. (III) $3n^2$.

Комментарий. Зачёт за этот листок ставился за 5 верно решённых задач уровня (II), одна задача уровня (III) шла за две уровня (II). Однако во всех спорных случаях (когда у меня возникали какие-либо сомнения в том, что человек всё понимает) я оставлял за собой право поспрашивать сходу задачи уровня (I). Практика показала, что подобный подход в целом оказался вполне удачным (в плане сбалансированности — найти интересные именно тебе 5 задач было нетрудно).

Наибольшей популярностью пользовались неравенство Бернулли и бином Ньютона. И это очень хорошо, потому что было бы правильным, чтобы их знал каждый. Возможно, в следующий раз стоит их сделать обязательными. Хотя если их и так все делают, то зачем? Скорее, надо было в обязательном порядке разобрать первую половину задачи 34 — увы, до этого руки так и не дошли. Как и не дошли они до принципа включения-исключения, а вещь весьма полезная (тем более, что без неё непросто решить задачи 19, 28 и 34з).

Также популярностью пользовались задачи 22 (про танцы), 25а (про Васю в столовой) и 21а (про мужчин и женщин за круглым столом). А вот задачи 5 и 31 не сдавал вообще никто (что наводит на размышления). Из дополнительных пользовались спросом задачи 7 (про воров), 28 (про телефонные номера) и 32 (там формула, но на самом деле это всё про того же Васю в столовой).

Стоит отметить неудачу с задачей 3 — там я написал сначала неправильное условие, и школьники жаловались, что она не решается, потому что неверна. Это было печально, так как таким образом произошёл облом с одной из немногих простых задач на индукцию. Также фиаско произошло с задачей 14 — в книжке, откуда я её взял, был написан заведомо неверный ответ. Сама задача, видимо, простого решения не имеет. Кроме того, в задаче 34з необходимо добавить условие $n > m$.

В целом, листочек получился довольно удачным. Разве что, можно добавить несколько не слишком сложных задач на индукцию, а также убрать задачу 14 и, может быть, задачу 5. И поправить условие в задаче 34з.