Апериодические плитки

Х.НУРЛИГАРЕЕВ

Периодические замощения

Предположим, что у нас есть некоторый многоугольник и копировальная машина, с помощью которой можно изготовить неограниченное количество его копий. Эти копии мы будем называть *плитками*.

Зададимся следующим вопросом: существует ли замощение плоскости этими плитками без пробелов и наложений?

В простейших случаях ответ можно получить, непосредственно прикладывая плитки друг к другу. Например, нетрудно заметить, что треугольными плитками плоскость замостить возможно, независимо от формы треугольника. Действительно, два одинаковых треугольника всегда можно совместить так, чтобы они образовали параллелограмм (рис. 1). Из таких параллелограммов легко составить полоску и этими полосками замостить плоскость.

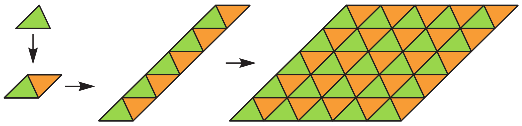

Рис. 1

То же самое справедливо и для четырехугольников. Два одинаковых четырехугольника можно сложить так, чтобы они образовали шестиугольник с попарно параллельными равными сторонами (рис. 2). Из таких шестиугольников мы снова сначала составляем полоску, и затем полосками замощаем плоскость.

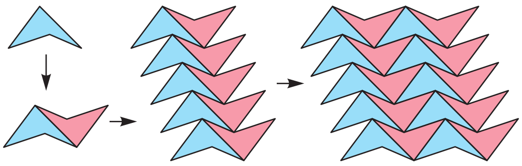

Рис. 2

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20250401

А вот только шестиугольными плитками, изображенными на рисунке 3, обойтись не получится: видно, что в вырезанный угол просто не влезет полностью никакая часть такого шестиугольника.

Как быть, если наш многоугольник имеет более сложную форму? Было бы естественно применить тот же метод, что сработал для треугольников и четырехугольников. А именно, сложить из нескольких плиток *кластер*, похожий на параллелограмм, из которого можно сначала собрать полоску, а затем распространить эту полоску на всю плоскость. Например, для тетрамино в форме буквы Т такой кластер состоит всего из одной плитки (рис. 4), для пентамино в форме буквы П – из двух плиток (рис. 5), а для пятиугольника, который можно получить, разрезав правильный шестиугольник на три равные части, – из трех (рис. 6).

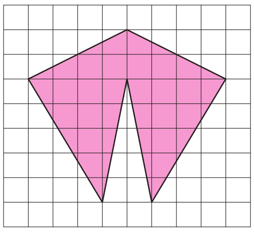

Рис. 3

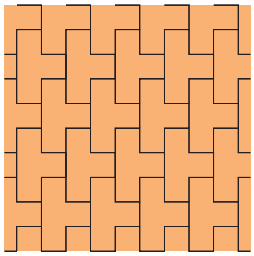

Рис. 4

Полученные замощения являются периодическими. Более точно, замощение называется *периодическим*, если найдутся хотя

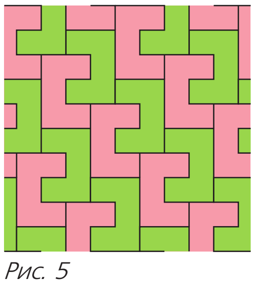

Рис. 5

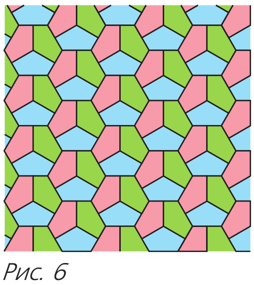

Рис. 6

бы два таких направления, что замощение можно совместить с самим собой, сдвинув в этом направлении.

В рассмотренных примерах мы образовывали полоску из кластера, сдвигая его в одном из таких направлений. А сдвигая полоску уже в другом направлении, получали все замощение целиком.

Как искать кластер, который можно периодически продолжить до замощения всей плоскости? Можно действовать следующим образом. Поместим первую плитку в центр, а затем попробуем обложить ее другими плитками со всех сторон всеми возможными способами. На каждом шаге будем проверять, не получился ли у нас уже искомый кластер. Если первый слой удалось сформировать, но кластер еще не найден, добавим второй слой вокруг начальной плитки и так далее. Скорее всего, этот процесс завершится достаточно быстро: либо мы найдем периодическое замощение, либо на каком-то этапе процесс застопорится. На сегодняшний день не известны примеры плиток, для которых такой процесс требует более шести слоев (см. [1]).

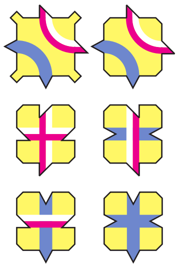

Рис. 7

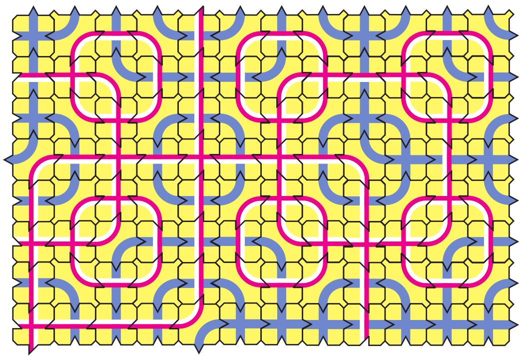

Рис. 8

Апериодические замощения

Может ли случиться так, что мы сумеем обложить плитку сколь угодно большим числом слоев, но не существует кластера, который бы продолжался до периодического замощения? Это означало бы (хотя мы и не будем обосновывать этот факт строго), что плоскость можно замостить данными плитками, но ни одно из возможных замощений не будет периодическим. Плитки, обладающие таким свойством, а также любые замощения ими называют *апериодическими*.

До недавнего времени существование апериодических плиток было под вопросом. При этом апериодические наборы плиток, т.е. когда в копировальную машину можно положить не один многоугольник, а несколько разных, были известны уже довольно давно. Так, еще в 1971 году Рафаэль Робинсон обнаружил апериодический набор из 6 многоугольников, копиями которых можно замостить плоскость, но только непериодическим образом. Этот набор изображен на рисунке 7, а одно из возможных замощений – на рисунке 8 (см. [2]). Раскраска плиток нужна для доказательства непериодичности замощения.

В 1974 году Роджер Пенроуз предложил апериодический набор из двух плиток (рис. 9 и 10). Плитки прикладываются так, чтобы синие вершины совмещались с синими, а красные с красными.

В течение последующих четырех десятилетий ученые безуспешно пытались найти апериодическую плитку. Наконец, в марте 2023 года Дэвид Смит, Джозеф Майерс, Крейг Каплан и Хаим Гудман-Штраус представили пример многоугольника, который

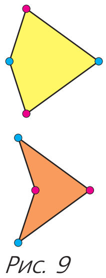

Рис. 9

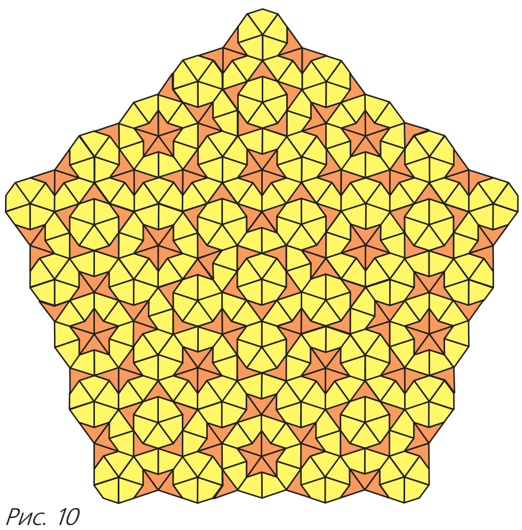

Рис. 10

допускает исключительно апериодические замощения (см. [3]). Это 13-угольник, составленный из восьми одинаковых четырехугольников, каждый из которых получается разрезанием равностороннего треугольника на три равные части (рис. 11). Благодаря своей характерной форме 13-угольник получил название «шляпа». Фрагмент замощения «шляпами» представлен на рисунке 12.

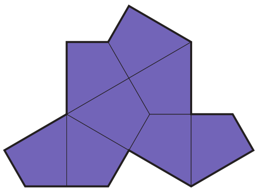

Рис. 11

Если присмотреться к замощению «шляпами», то станет ясно, что плитки в этом замощении ориентированы по-разному. Серые, белые и голубые плитки можно совместить друг с другом не переворачивая, тогда как синие необходимо перевернуть, чтобы они в точности накладывались на остальные плитки.

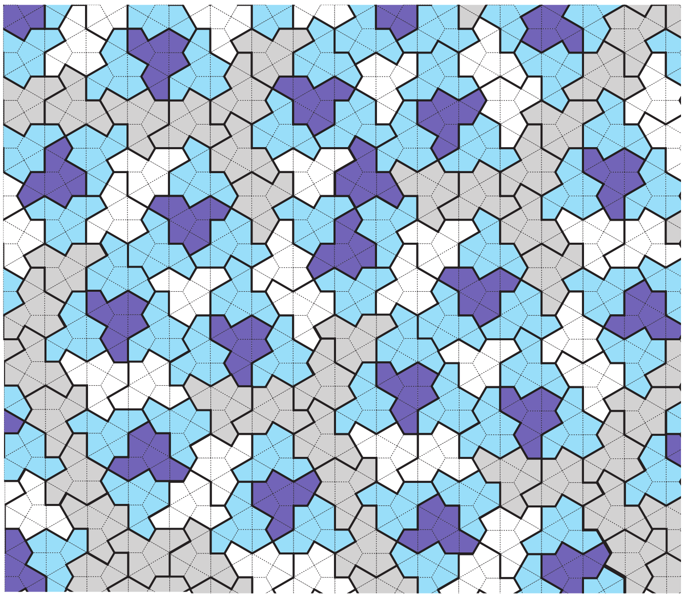

Рис. 12

Можно показать, что из «шляп» невозможно составить замощение, не переворачивая часть плиток. Фигура, которая лишена этого недостатка, была придумана теми же авторами и была названа «привидением» (рис. 13).

Своими очертаниями «привидение» смутно напоминает «шляпу», и это не случайно. Оно было получено из «шляпы» некоторой деформацией, которая позволила создать бесконечное семейство фигур, копиями каждой из которых можно замостить плоскость только непериодически. Границы «привидения» представляют собой дуги окружностей, но при желании их можно заменить ломаными линиями, чтобы фигура стала многоугольником. Выбор дуг в качестве границ обусловлен, прежде всего, эстетическими соображениями.

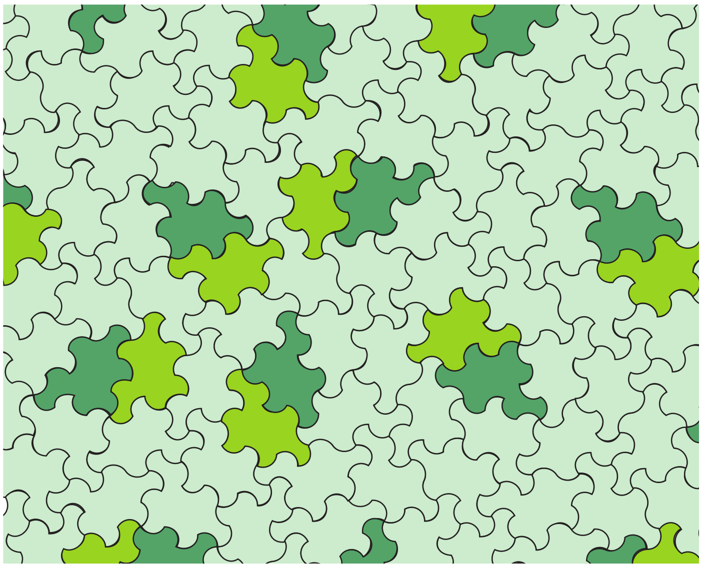

Рис. 13

Самоподобные замощения

Вернемся к замощению «шляпами» и наметим основные идеи, которые привели Д.Смита, Д.Майерса, К.Каплана и Х.Гудман-Штрауса к их открытию.

Для того чтобы понять структуру изображенного на рисунке 12 замощения, нам будет полезно познакомиться с так называемыми *самоподобными замощениями*

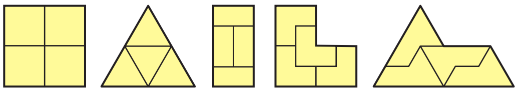

Рис. 14

(см. [4]), хотя как раз замощения «шляпами» таковыми не являются.

Будем говорить, что фигура является самоподобной, если ее можно разбить на несколько равных частей, каждая из которых подобна исходной фигуре. Например, самоподобными являются такие фигуры, как квадрат, равносторонний треугольник, прямоугольник «домино», уголок из трех клеток и составленный из шести равносторонних треугольников «сфинкс» (рис. 14).

Определим следующий процесс *инфляции-дефляции*. Один шаг этого процесса заключается в том, что мы сначала разбиваем данную фигуру на подобные части согласно приведенной схеме, а затем «раздуваем» их таким образом, чтобы в итоге каждая из частей сравнялась по размеру с исходной фигурой (рис. 15).

Можно не ограничивать себя одним шагом, а продолжить разбивать получающиеся на предыдущих шагах фигуры на меньшие части, «раздувая» их до изначального размера, а затем повторяя все вновь и вновь. Оказывается, если делать это определенным образом, в пределе мы получим замощение всей плоскости копиями исходной фигуры.

Не вдаваясь в детали и не приводя строгих определений и доказательств, отметим однако, что процесс перехода к пределу гораздо тоньше, чем может показаться на первый взгляд. Так, очень многое зависит от того, как именно располагать на плоскости «раздутые» фигуры относительно кластера, полученного на предыдущем шаге

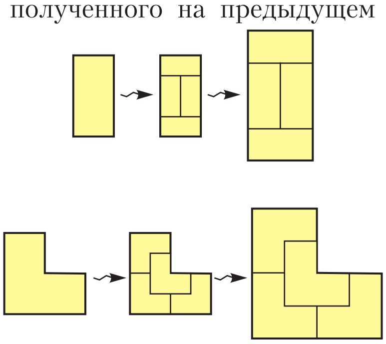

Рис. 15

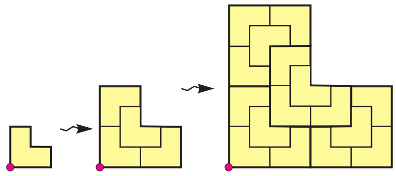

Рис. 16

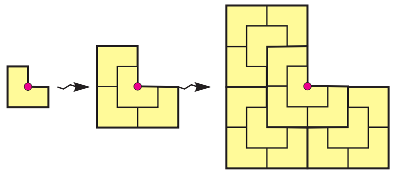

Рис. 17

процесса инфляции-дефляции. Например, если на осях координат всегда располагать внешние стороны уголка, то получится замощение лишь четверти плоскости (рис. 16), а если внутренние – то трех четвертей плоскости (рис. 17).

Кроме того, было бы неверно думать, что после применения конечного числа шагов процесса инфляции-дефляции обязательно возникает какой-то фрагмент этого замощения. Например, если мы рассмотрим разбиение домино на четыре параллельные доминошки меньшего размера, то после нечетного числа шагов у нас будут возникать фрагменты горизонтального замощения, а после четного – фрагменты вертикального замощения (рис. 18).

Замощение, полученное предельным переходом, является самоподобным. Это означает, что составляющие его плитки (плитки первого уровня) могут быть объединены в макроплитки (плитки второго уровня), подобные исходным. Замощение, образованное этими макроплитками, обладает тем свойством, что любой конечный фрагмент, который в нем встречается, подобен некоторому кластеру, имеющемуся

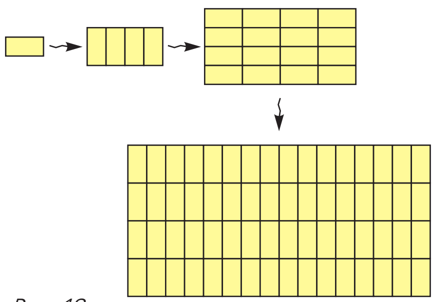

Рис. 18

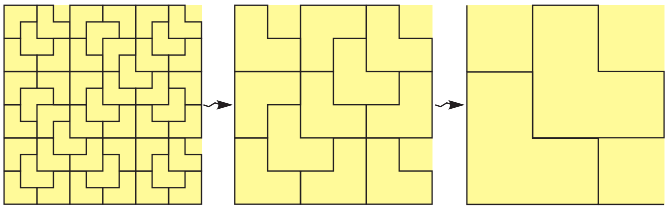

Рис. 19

в исходном замощении. Однако сами замощения плитками первого и второго уровня, вообще говоря, различны. Это означает, что они не могут быть совмещены ни одним преобразованием подобия.

Полученные макроплитки также могут быть объединены в еще большие плитки и так далее. Тем самым, укрупнение возможно на любом шаге, и плитки k-го уровня, будучи сгруппированными определенным образом, образуют плитки $(k+1)$-го уровня. Таким образом, возникает бесконечная иерархия замощений, соответствующих плиткам разных уровней. Например, на рисунке 19 изображены первые три ступени такой иерархии для самоподобного замощения уголками.

Иерархии самоподобных замощений различаются в зависимости от того, сколькими способами на каждом уровне может быть проведено укрупнение. Если таких возможностей несколько, то иерархия называется *слабой*. Таковыми являются, например, замощение плоскости квадратами или равносторонними треугольниками. Например, на рисунке 20 показано четыре возможных способа сгруппировать квадратные плитки по четыре так, чтобы получились макроплитки.

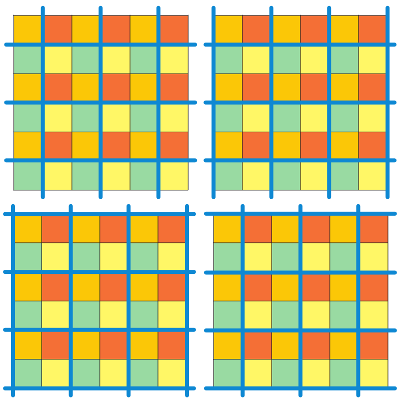

Рис. 20

Если же каждый раз укрупнение можно провести единственным образом, то иерархия замощений называется *строгой* – таковы самоподобные замощения фигурами «домино», уголками и «сфинксами» (см. рис. 14).

Оказывается, самоподобные замощения со строгой иерархией в большинстве своем обладают рядом типичных свойств. Так, они непериодические, но любой конечный фрагмент встречается в каждом таком замощении бесконечно много раз. Рассмотрим, почему так получается, на примере замощения уголками.

Предположим, что какое-то из самоподобных замощений уголками является периодическим, т.е. остается неизменным при некотором сдвиге. Тогда плитки k-го уровня должны переходить в плитки k-го уровня для каждого k. Однако если k достаточно большое, то плитка k-го уровня столь велика, что при рассматриваемом сдвиге накладывается сама на себя. Для самоподобных замощений со слабой иерархией это не составляет проблемы, что можно видеть на примере замощения квадратами. Но для строгих иерархий мы сразу приходим к противоречию, поскольку укрупнение плиток на каждом уровне возможно единственным способом, а значит, любые две плитки k-го уровня не пересекаются. Таким образом, самоподобное замощение уголками, да и вообще любое самоподобное замощение со строгой иерархией непериодично.

Теперь рассмотрим какой-нибудь конечный фрагмент самоподобного замощения уголками. Заметим, что при последовательном укрупнении все плитки из этого фрагмента на каком-то шаге окажутся внутри одной большой-большой плитки (рис. 21),

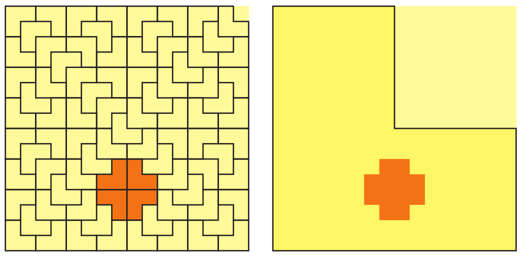

Рис. 21

для определенности k-го уровня. Это означает, что любая такая плитка k-го уровня также содержит искомый фрагмент. Ясно, что плиток k-го уровня бесконечно много, ведь они тоже составляют замощение плоскости. Следовательно, любой конечный фрагмент встречается в самоподобном замощении бесконечно много раз.

Важно отметить, что хотя любое самоподобное замощение уголками является непериодическим, в то же время нетрудно привести пример и периодического замощения этими плитками (рис. 22).

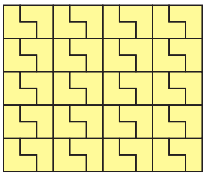

Рис. 22

То же самое справедливо и для всех остальных самоподобных фигур, упомянутых выше. Вопрос, существует ли самоподобная апериодическая плитка, т.е. такая плитка, замостить плоскость которой можно только самоподобными замощениями со строгой иерархией, на сегодняшний день остается открытым. Однако есть ощущение, что ответ на него положительный.

Имеется как минимум две причины так думать. Во-первых, известно немало самоподобных апериодических наборов, состоящих из двух плиток. Например, ту же строгую иерархию, что мы видели у уголков, дает набор из двух плиток, изображенных на рисунке 23 (здесь, прикладывая плитки друг к другу, нужно соблюдать согласованность цветов: розовые области должны касаться розовых, желтые – желтых, а зеленые – зеленых). При этом периодических замощений этот набор не допускает.

А во-вторых, открытые недавно апериодические плитки хотя и не самоподобны сами по себе, но идеям строгих иерархий близки.

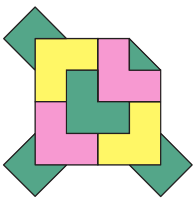

Рис. 23

Апериодичность замощения «шляпами»

На примере замощения «шляпами» мы вкратце обсудим, как идеи строгих иерархий реализуются в этом конкретном случае.

Выделим четыре базовых кластера, в которые можно объединить вместе несколько «шляп» (рис. 24). Первый из них, H-кластер, включает в себя четыре плитки, одна из которых перевернута. Еще два – P-кластер и F-кластер – складываются из двух плиток, составленных вместе. Наконец, последний кластер – T-кластер – представляет собой не что иное, как одну «шляпу».

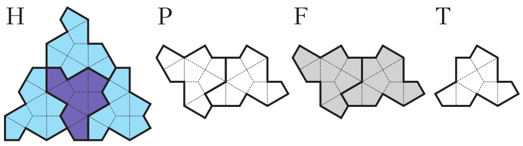

Рис. 24

На первый взгляд может показаться, что P-кластер и F-кластер не отличаются между собой. Однако присмотревшись к типичному замощению «шляпами» (см. рис. 12), становится понятно, что F-кластеры всегда группируются по три, образуя фигуру, похожую на пропеллер. Поэтому если мы символически заменим кластеры на метаплитки упрощенной формы, то соответствующие P-кластеру и F-кластеру метаплитки будут различаться: первая из них – параллелограмм, а вторая – параллелограмм с отрезанной вершиной (рис. 25).

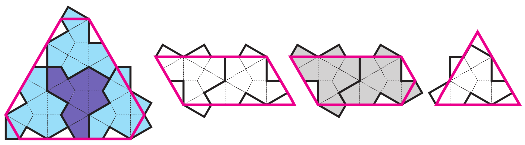

Рис. 25

Описанные выше четыре кластера собираются в еще большие кластеры, соединяющиеся между собой по тем же правилам, что и исходные, но большего размера. Такое укрупнение возможно единственным образом и продолжается до любого уровня. Первые три уровня для H-кластера продемонстрированы на рисунке 26.

Таким образом, кластеры образуют строгую иерархию, что в пределе дает нам

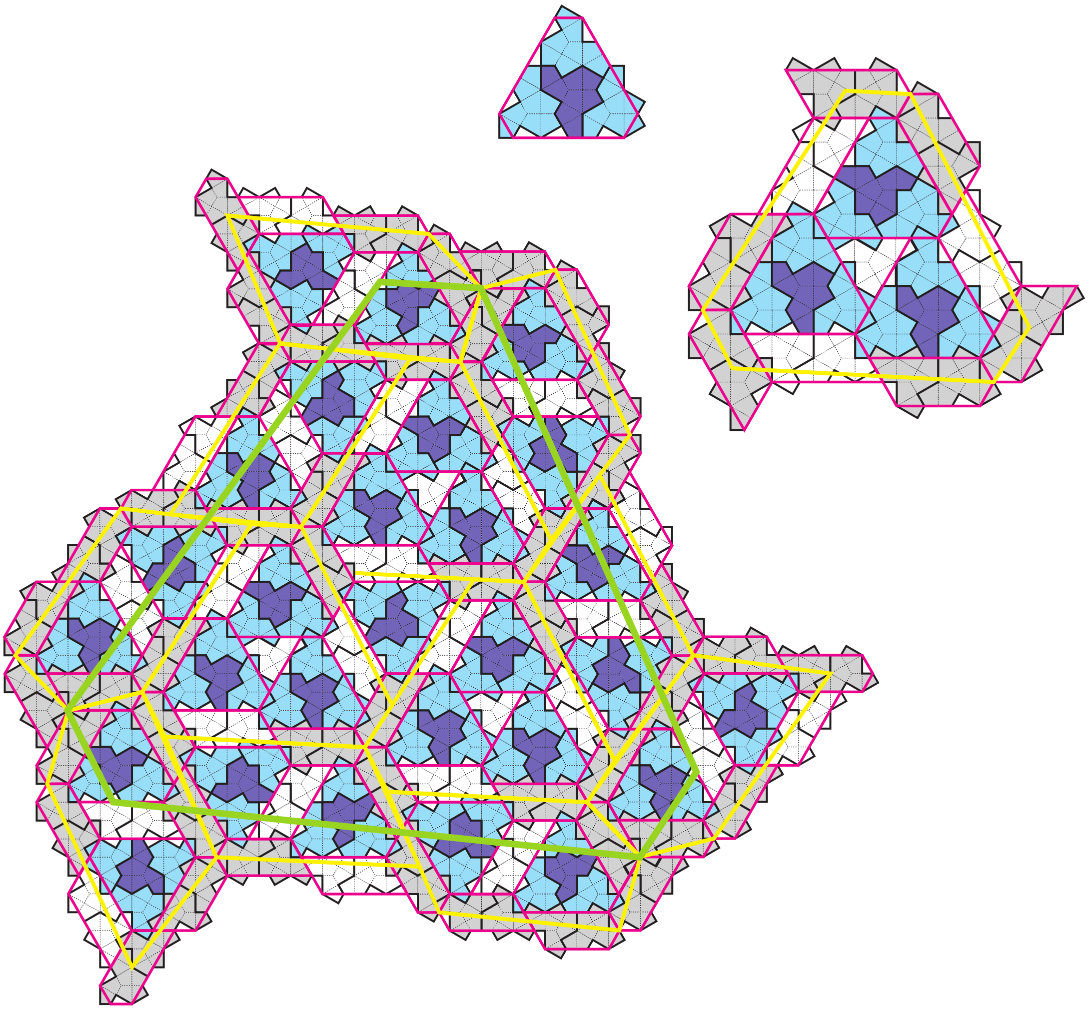

Рис. 26

непериодическое замощение плоскости. Кроме того, можно доказать, что никакими другими способами приложить плитки друг к другу невозможно. Поэтому любое замощение «шляпами» будет подчиняться описанной строгой иерархии и окажется непериодическим.

Отметим, что полученное предельным переходом замощение «шляпами», в отличие от описанных выше самоподобных замощений уголками, самоподобным не является. Иными словами, ни кластеры первого уровня не подобны кластерам второго уровня (ни вообще какого-либо еще уровня), ни метаплитки упрощенной формы разных уровней (как, например, метаплитки, изображенные на рисунке 26 красным, желтым и зеленым) не подобны друг другу. И, тем не менее, «шляпа» является примером апериодической плитки – первой в своем роде, но далеко не единственной.

Литература

1. *Х.Нурлигареев.* Плитки и числа Хееша. – «Квантик», 2019, №10.

2. *Х.Нурлигареев.* Мозаика Робинсона. – «Квантик», 2020, №10.

3. *D.Smith, J.Myers, C.Kaplan, C.Goodman-Strauss.* Anaperiodic monotile. – Combinatorical Theory, 2024, vol.4, is.1.

4. *Н.Долбилин.* Самоподобные мозаики. – «Квант», 1988, №2.