

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СЮРПРИЗЫ

Хайдар Нурлигареев

АПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПЛИТКА



Художник Алексей Вайнер

Предположим, что в нашем распоряжении имеется некоторый многоугольник, а также копировальная машина, при помощи которой мы можем изготовить неограниченное количество его копий – такие копии мы будем называть *плитками*. Зададимся вопросом: можно ли этими плитками замостить плоскость без пробелов и наложений? И как по внешнему виду плиток понять, каким будет ответ на этот вопрос?

В простейших случаях ответ можно получить непосредственно, прикладывая плитки друг к другу. Например, треугольными плитками замостить плоскость можно, какой бы треугольник нам ни выдали. В самом деле, два треугольника можно приложить друг к другу так, чтобы они образовали параллелограмм. Из параллелограммов легко сконструировать полосу, а из полосок – искомое замощение (рис. 1).

Точно так же обстоит дело с четырёхугольниками. Действительно, два четырёхугольника складываются в шестиугольник (или четырёхугольник) с попарно параллельными равными сторонами. Из таких шестиугольников, опять же, мы сначала образуем полосу, а потом и замощение целиком (рис. 2).

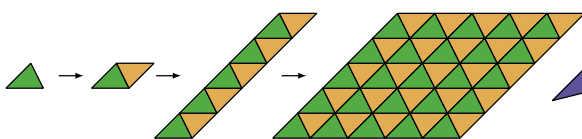


Рис. 1

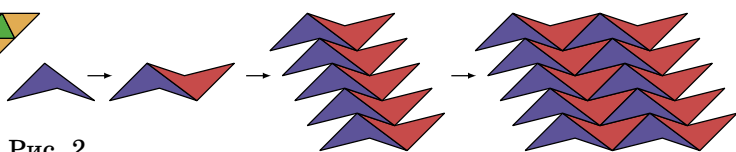


Рис. 2

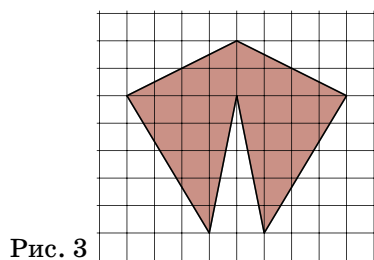


Рис. 3

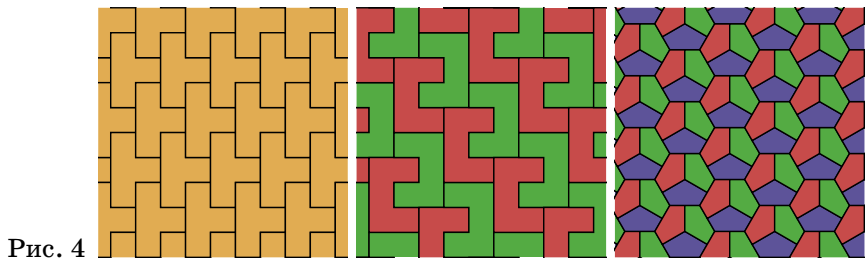


Рис. 4

А вот только шестиугольными плитками, изображёнными на рисунке 3, обойтись не получится: по клеточкам видно, что в «вырезанный» угол просто не влезет полностью никакая часть такого шестиугольника.

А как быть, если наш многоугольник более сложной формы? Хочется применить тот же метод, что сработал для треугольников и четырёхугольников: сложить из нескольких плиток некоторый кластер сродни параллелограмму, из которого сначала собрать полосу, а затем – распространить эту полосу на всю плоскость. Например, для тетрамино в форме буквы Т такой кластер состоит всего из одной плитки (рис. 4, слева), для пентамино в форме буквы П – из двух плиток (рис. 4, по центру), а для пятиугольника, который можно получить, разрезав правильный шестиугольник на три равные части, – из трёх (рис. 4, справа).

Так получаются периодические замощения. Более точно, замощение называют *периодическим*, если найдутся хотя бы два таких направления, что замощение можно совместить с самим собой, сдвинув в этом направлении. В примерах выше мы образуем полосу из кластера, сдвигая его в од-

ном из таких направлений. А сдвигая полосу уже в другом направлении, получаем всё замощение целиком.

Как искать кластер, который бы периодическим образом продолжился до замощения всей плоскости? Можно действовать следующим образом. Поместим первую плитку в центр. Затем попробуем обложить её другими плитками со всех сторон всеми возможными способами, на каждом шагу проверяя, не получился ли уже у нас искомый кластер. Если сформировать первый слой удалось, но кластер ещё не найден – окружим начальную плитку вторым слоем, и так далее. Скорее всего, этот процесс вскоре закончится: либо мы найдём периодическое замощение, либо на каком-то числе слоёв всё застопорится. На сегодняшний день не придумано плиток, для которых второй случай реализуется с числом слоёв, большим шести.¹

А может ли случиться так, что мы можем обложить плитку сколь угодно

но большим числом слоёв, но не существует кластера, который бы продолжался до периодического замощения? Это бы означало, хотя мы и не будем обосновывать этот факт строго, что данными плитками замостить плоскость можно, но ни одно из замощений не является периодическим. Плитки, обладающие таким свойством, как и любое замощение ими, называют *апериодическими*.

До недавнего времени существование апериодических плиток было под вопросом. При этом апериодические наборы плиток, то есть когда в копировальную машину можно положить не один многоугольник, а несколько, известны уже довольно давно. Так, ещё в 1971 году Рафаэль Робинсон обнаружил апериодический набор из 6 многоугольников, копиями которых можно замостить плоскость, но только непериодическим образом (этот набор изображён на рисунке 5, а одно из возможных замощений – на рисунке 6).²

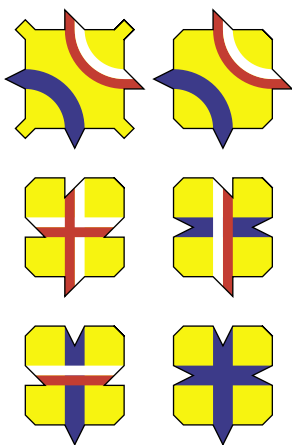


Рис. 5.
Плитки Робинсона

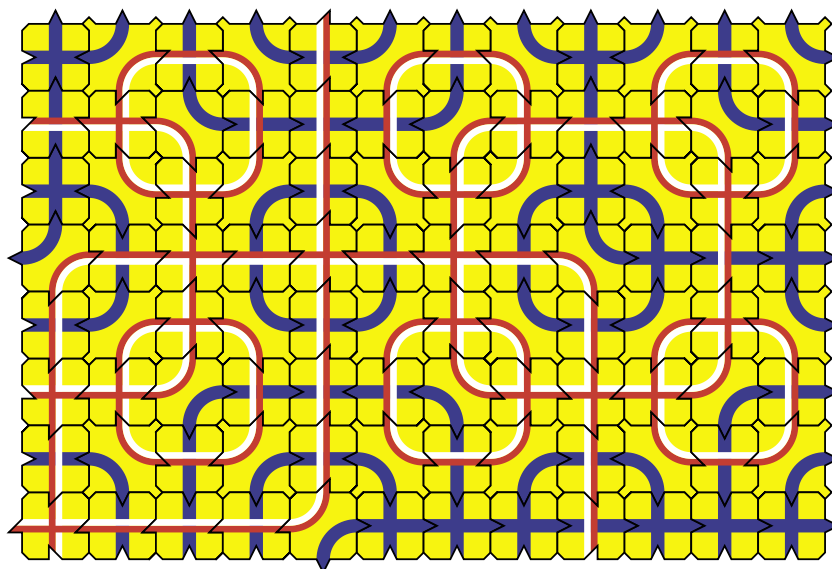


Рис. 6

¹ См. статью Х. Нурлигареева «Плитки и числа Хееша» в «Квантике» № 10, 2019.

² См. статью Х. Нурлигареева «Мозаика Робинсона» в «Квантике» № 10, 2020.

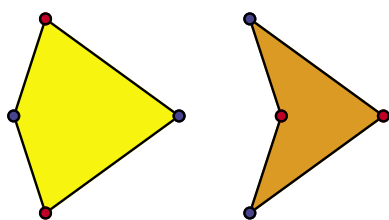


Рис. 7. Плитки Пенроуза прикладываются друг к другу таким образом, чтобы синие вершины совпадали с синими, а красные с красными

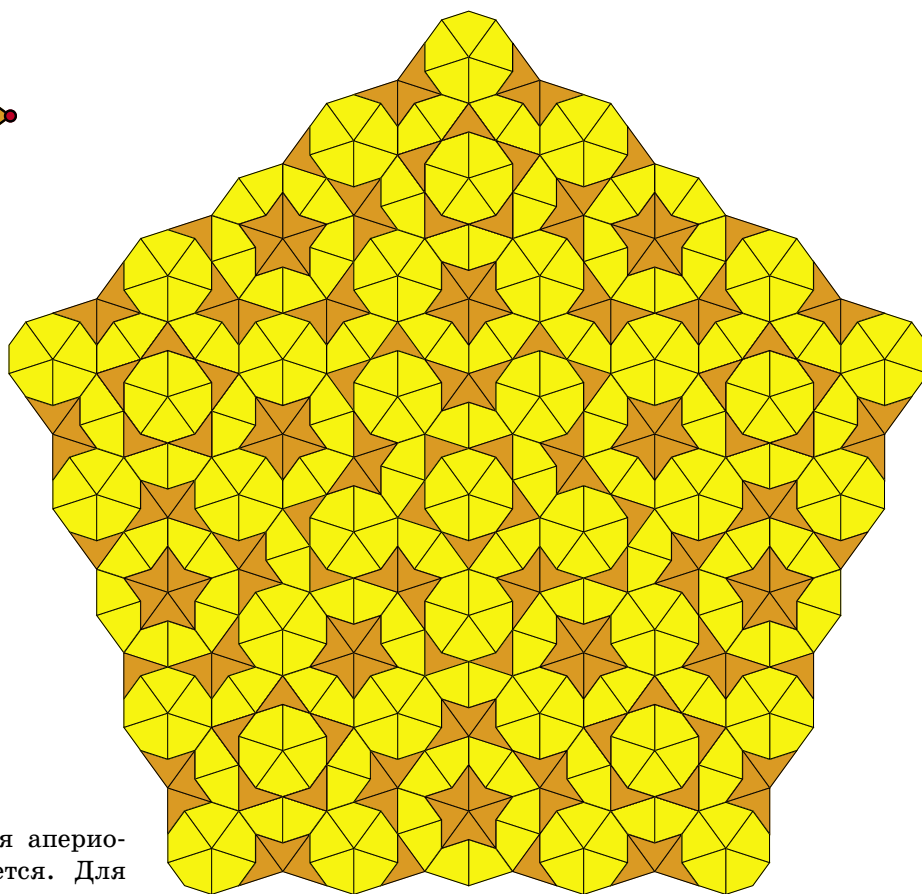


Рис. 8. Вот такая красивая аperiодическая мозаика получается. Для упрощения восприятия красные и синие вершины тут не обозначены

А в 1974 году Роджер Пенроуз предложил аperiодический набор из 2 плиток (рис. 7 и 8).

В течение последующих четырёх десятилетий учёные безуспешно пытались найти аperiодическую плитку, пока, наконец, в марте 2023 года Дэвид Смит, Джозеф Майерс, Крейг Каплан и Хаим Гудман-Штраус не представили на суд математической общественности пример многоугольника, который допускает исключительно аperiодические замощения. Это 13-угольник, составленный из восьми одинаковых четырёхугольников, каждый из которых получается разрезанием равностороннего тре-

угольника на три одинаковые части (рис. 9), – за характерную форму его сразу же окрестили «шляпой».

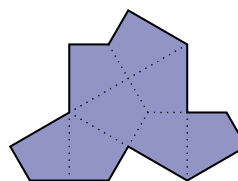


Рис. 9

Фрагмент замощения «шляпами» представлен на рисунке 10.

Если присмотреться к рисунку, станет ясно, что плитки в этом замощении ориентированы по-разному: серые, белые и голубые плитки можно совместить друг с другом не переворачивая, а вот синие необходимо пере-

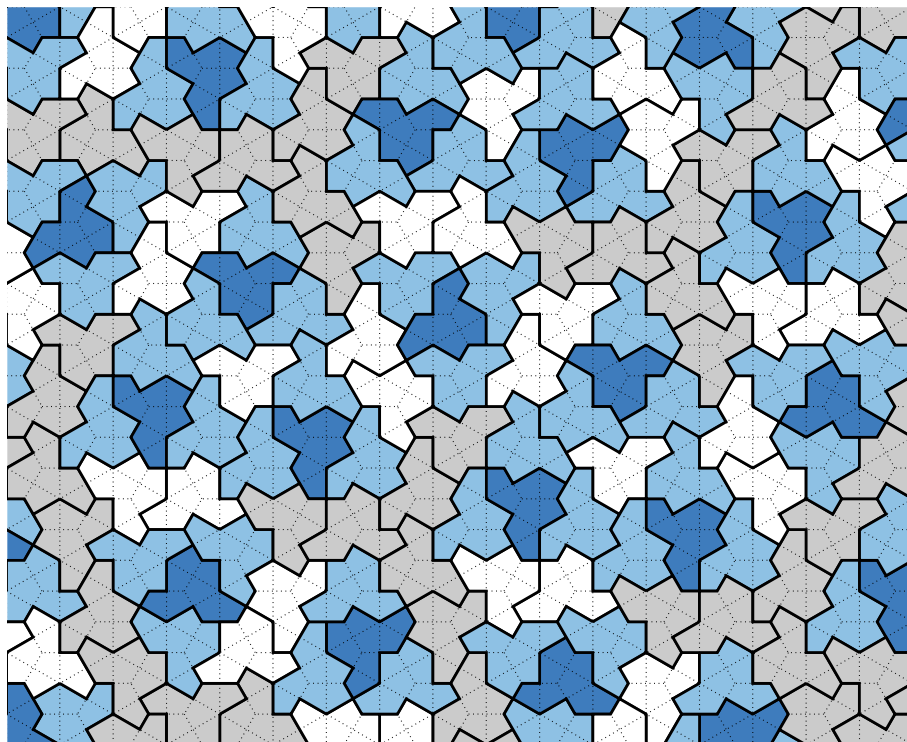


Рис. 10

вернуть, чтобы они в точности накладывались на остальные плитки. Как выясняется, из «шляп» невозможно составить замощение, не переворачивая часть плиток, как ни пытайся. Фигуру, которая лишена этого недостатка, придумать можно: всё тот же коллектив авторов привёл пример такой фигуры, названной «привидением», в конце мая 2023 года (рис. 11).

Своими очертаниями «привидение» смутно напоминает «шляпу», и это не случайно. Оно было получено из «шляпы» некоторой деформацией, которая позволила Смиту, Майерсу, Каплану и Гудману-Штраусу создать бесконечное семейство фигур, копиями каждой из которых можно замостить плоскость только неперiodически.

Границы «привидения» представляют собой дуги окружностей, но при желании их можно было бы заменить

ломаными линиями, чтобы «привидение» было «честным» многоугольником. Выбор дуг в качестве границ продиктован, прежде всего, эстетическими соображениями.

В заключение этой статьи хотелось бы показать, как аперiodические замощения нашли себя в искусстве. Так, Роберт Фэтхауэр, продолжатель традиций Маурица Корнелиса Эшера, замостил плоскость рубашками (рис. 12). А Йошиаки Араки даже сделал сайт www.t3puzzle.com/a/, где любой желающий может создать свой собственный рисунок на плитке типа «шляпы» или её деформированных версий, которые также являются аперiodическими плитками. В качестве примеров, которые получаются из деформаций «шляпы», Йошиаки приводит изображения птицы, черепахи и пингвина.

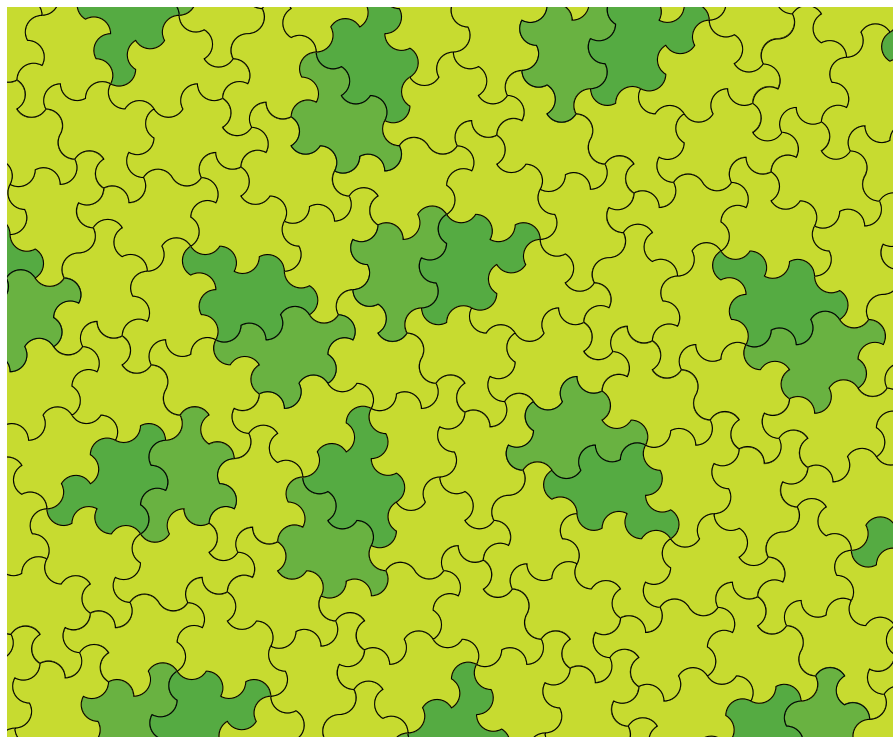


Рис. 11

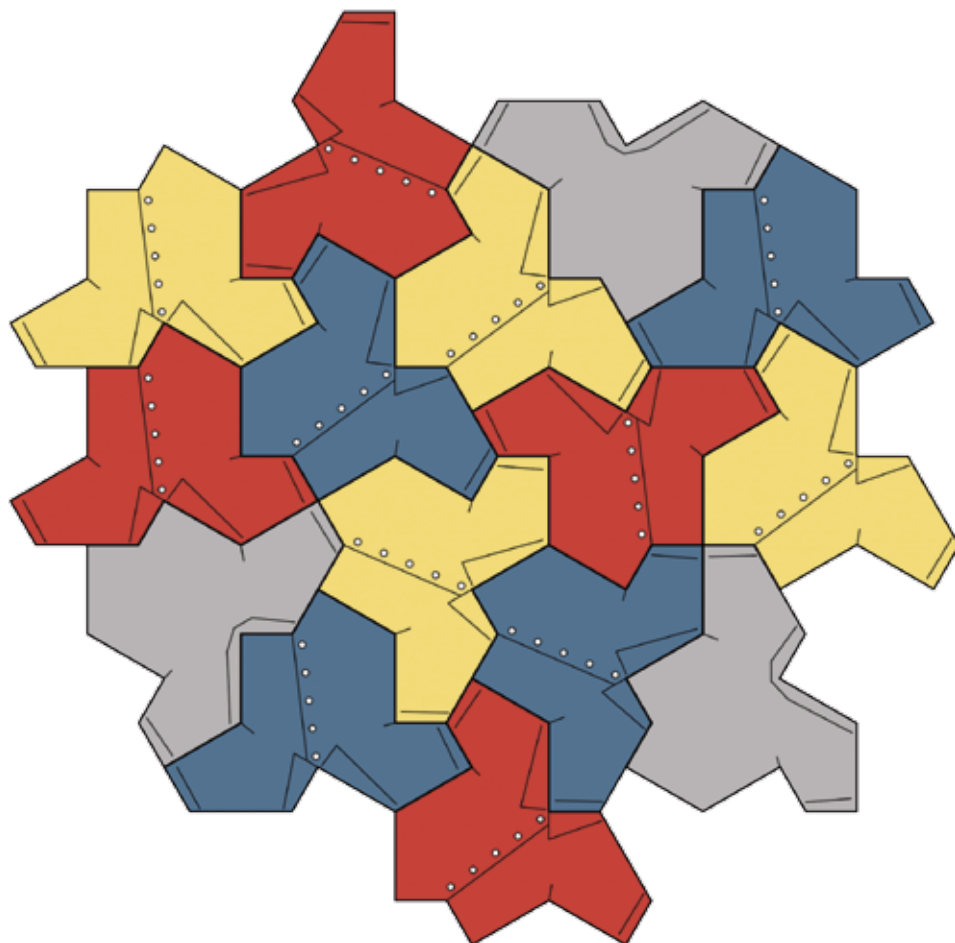


Рис. 12