МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

ПЛИТКИ И ЧИСЛА ХЕЕША

Хайдар Нурлигареев

Художник Алексей Вайнер

Перед вами несколько замощений плоскости одинаковыми плитками (рис. 1). В каждом из них все плитки – копии одного и того же многоугольника. Выложить замощение можно, например, так: начать с одной плитки и постепенно обкладывать её со всех сторон другими, слой за слоем, без зазоров и наложений. Так мы доберёмся до каждого участка плоскости.

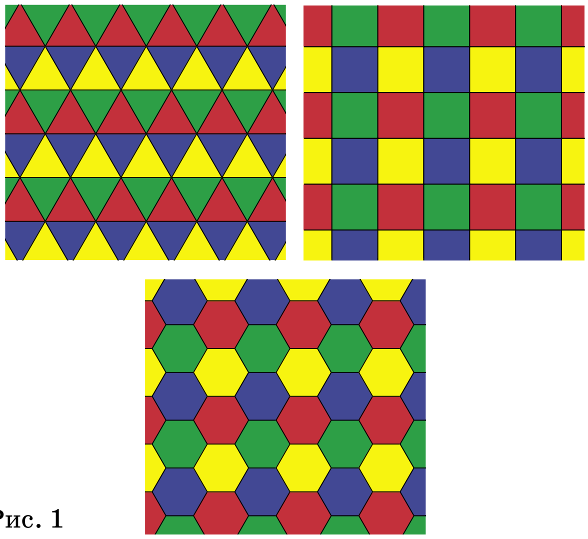

Рис. 1

Конечно, тут не любая плитка годится – например, копиями правильного пятиугольника не выложить даже первый слой (рис. 2).

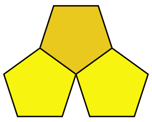

Рис. 2

А бывает ли, что несколько слоёв выкладываются, а дальше не получается? Даже если перекладывать уже выложенные слои всеми возможными способами, перебирая все варианты?

Так мы приходим к замечательному определению: *числом Хееша* плитки называется максимальное число слоёв, которое возможно выложить вокруг неё копиями этой плитки (при этом копии разрешается переворачивать).

У правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника число Хееша равно бесконечности. А у всех остальных правильных многоугольников число Хееша равно нулю – даже первый слой выложить нельзя. Оказывается, у наугад выбранной плитки число Хееша тоже обычно либо 0, либо бесконечность.

Но существуют ли многоугольники с числом Хееша 1, 2, 3, ...? До того как Генрих Хееш сформулировал эту задачу в 1968 году, была известна лишь одна плитка с числом Хееша, отличным от 0 и бесконечности (рис. 3). Плитка эта даже не многоугольник и впервые появилась в книге Вальтера Литцмана «Забавные и странные числа и формы» в 1922 году.

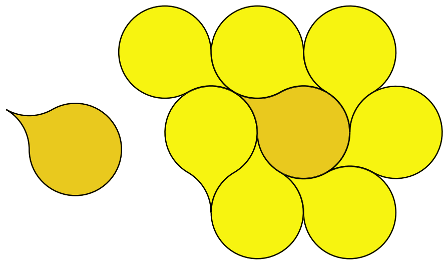

Рис. 3

Сам Хееш нашёл другую плитку с числом Хееша, равным 1: это 5-угольник, составленный из квадрата, правильного треугольника и половинки такого же треугольника (рис. 4).

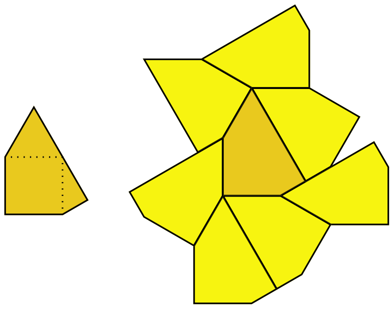

Рис. 4

Первый пример плитки с числом Хееша, равным 2, привела в 1991 году Энн Фонтен и даже построила бесконечно много таких плиток. Все они составлены из одинаковых квадратиков, то есть это фигурки полимино (рис. 5).

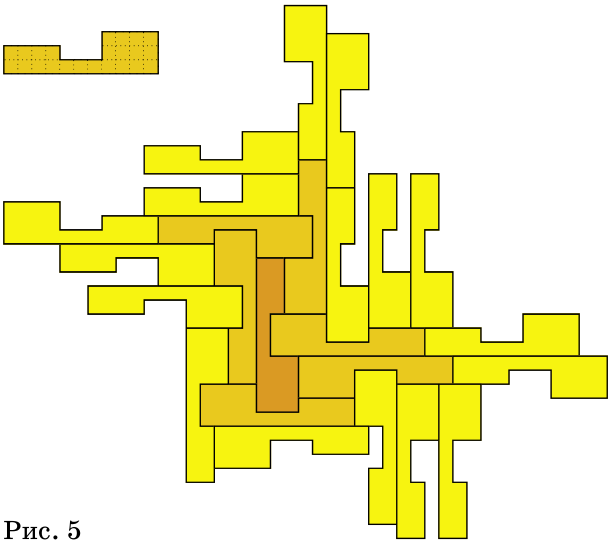

Рис. 5

В том же году Роберт Амманн добавил к правильному шестиугольнику два выступа, вырезал три таких же паза и получил фигуру с числом Хееша, равным 3 (рис. 6). Идея Амманна простая и изящная – надо искать плитку, у которой есть выступы и такие же пазы, но их разное количество.

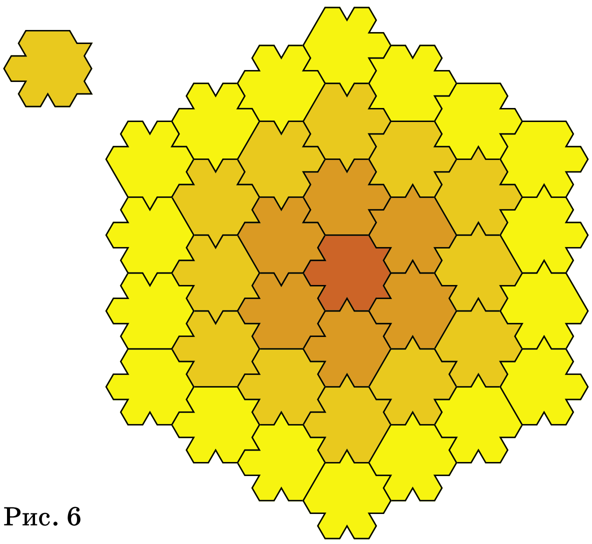

Рис. 6

Покажем, как работает эта идея, на примере плитки, найденной Кейси Манном в 2001 году. Она имеет вид четырёхклеточного прямоугольника с четырьмя выступами и пятью пазами (рис. 7).

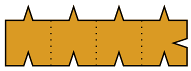

Рис. 7

Объясним, почему число Хееша такой плитки не может быть слишком большим. Рассмотрим квадрат S, целиком покрытый копиями нашей плитки. Так как каждый паз может быть закрыт только таким же выступом, число пазов и выступов, попавших внутрь квадрата S, одно и то же. С другой стороны, число выступов внутри квадрата примерно равно его площади (в клетках) – так как у каждой клетки в плитке ровно один выступ, а число пазов примерно равно 5/4 его площади – так как в плитке на каждые 4 выступа приходится 5 пазов. Но при большом размере квадрата эти числа не могут быть равны.

Вот строгое рассуждение (его можно пропустить, если «и так всё понятно»). Пусть квадрат S размера $2n \times 2n$ полностью покрыт плитками. Для этого потребуется по крайней мере $\frac{2n \cdot 2n}{4} = n^2$ плиток. Всего у них $5n^2$ пазов, они все должны быть заполнены.

С другой стороны, эти пазы находятся внутри квадрата S' размера $2(n+4) \times 2(n+4)$ (рис. 8). Поэтому их заполняют выступы от не более чем $2(n+5) \cdot 2(n+5)$ клеток (мы учли, что тут могут потребоваться выступы и от клеток, примыкающих к квадрату S'). Тем самым, выступов максимум $2(n+5) \cdot 2(n+5) = 4n^2 + 40n + 100$. А при $n > 100$ заведомо выполнено неравенство $n^2 > 40n + 100$, откуда $5n^2 > 4n^2 + 40n + 100$, то есть пазов больше, чем выступов. Противоречие – все пазы не могут быть заполнены.

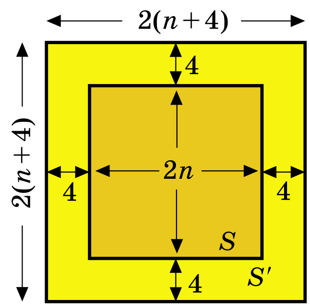

Рис. 8

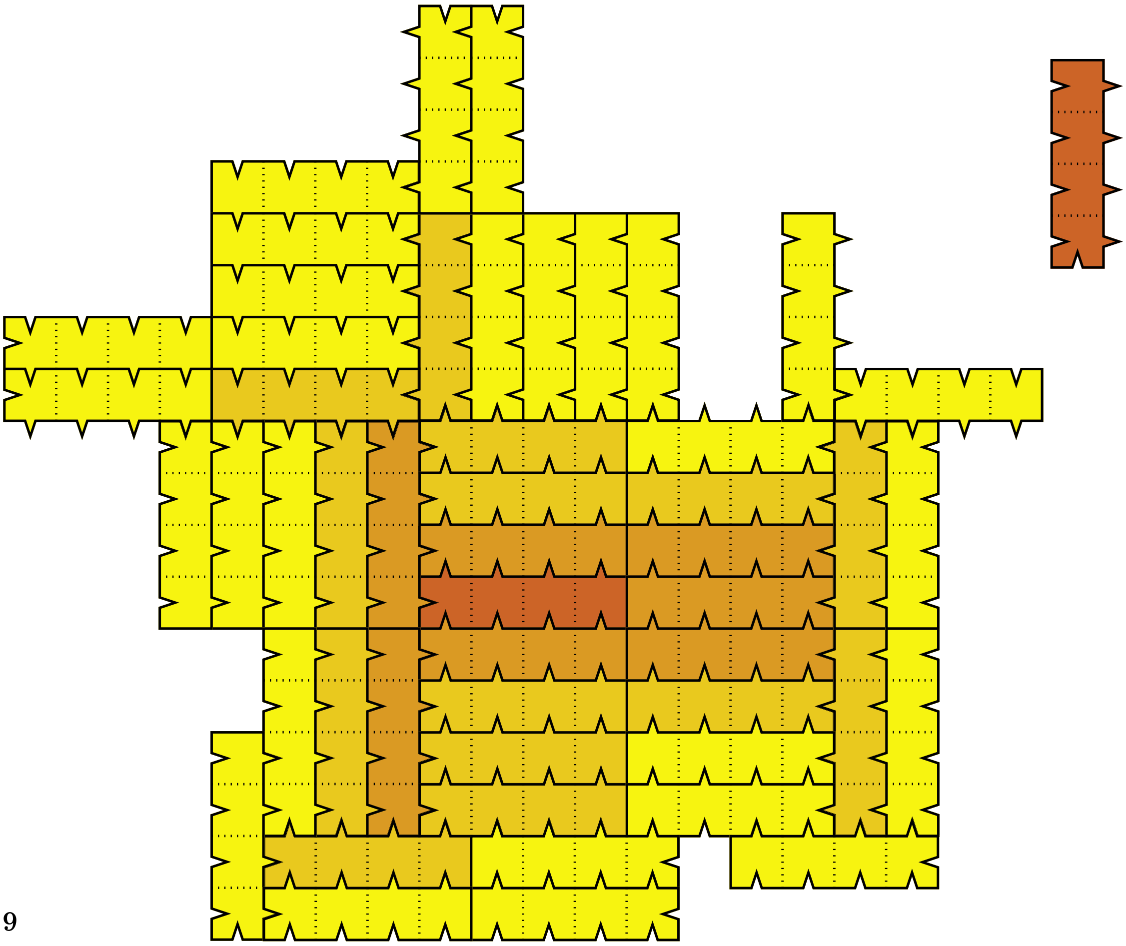

Рис. 9

Значит, число Хееша этой плитки конечно. На самом деле, оно равно 3 (рис. 9), но доказать это получается пока только компьютерным перебором.

Наиболее просты для исследования фигурки полимино, а также *полиамонды* и *полигексы*. Они тоже составлены из одинаковых «клеточек», примыкающих друг к другу сторонами, только в полиамондах клетка – это правильный треугольник, а в полигексах – правильный шестиугольник. Строя замощения из полимино, полиамондов или полигексов, мы как бы выкладываем их на свою «клетчатую» бумагу (рис. 1). На такой бумаге легко организовать компьютерный перебор. Так Кейси Манн нашёл полиамонд с числом Хееша, равным 3 (рис. 10).

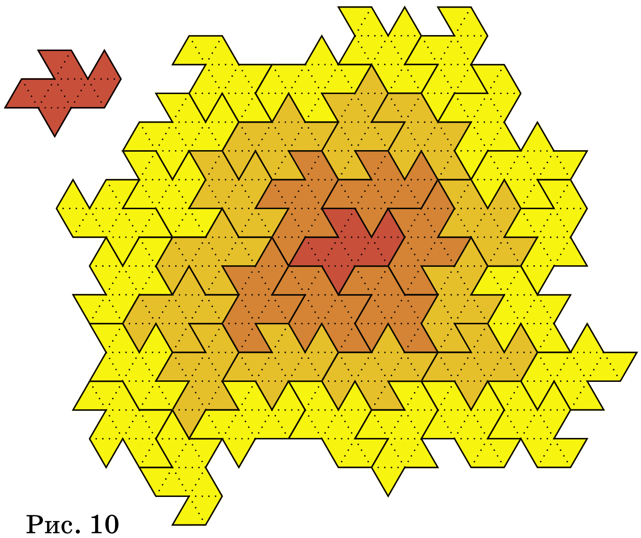

Рис. 10

Также Кейси Манну удалось получить несколько новых серий полимино и полигексов с выступами и пазами, у которых число Хееша конечно, но не равно нулю. А рекордсменом является полигекс Кейси Манна, составленный из пяти шестиугольников (с выступами и пазами) – его число Хееша равно пяти (рис. 11). На сегодняшний день это плитка с самым большим известным человечеству конечным числом Хееша.

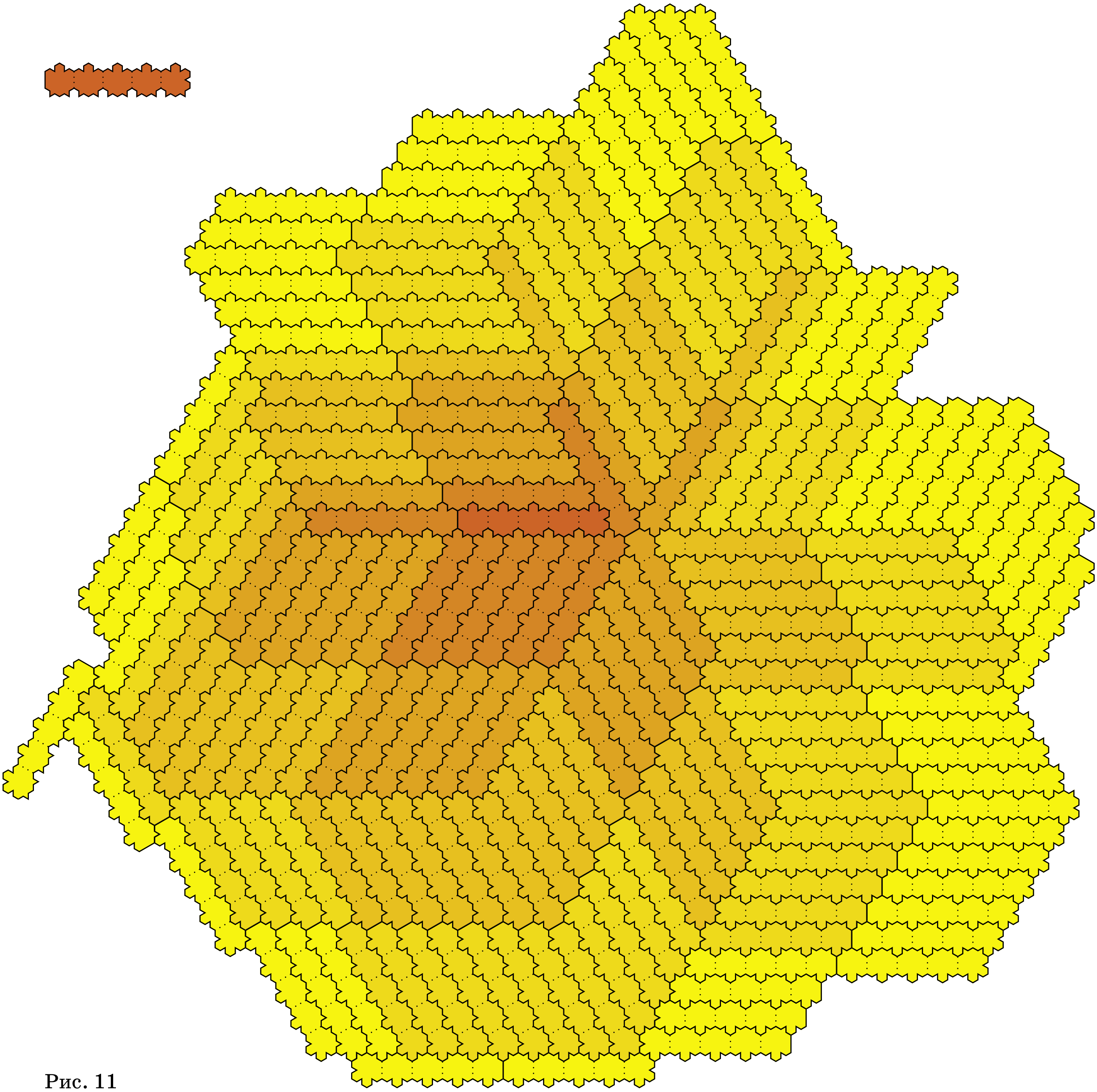

Рис. 11