Séance 5 : **Transformée multiniveaux 2D**

La transformation quadratique multi-échelle non-linéaire séparable.
On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j).$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe : On calcule d'abord les quantités $c_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$, $g_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_{k-2}^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k-1}^{j-1}|$ et $d_k = |v_{k+1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_{k+2}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$.
Alors
si $c_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}).$$

si $d_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1},$$

si $g_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1},$$

Et donc le détail est $d_k^{j-1} = v_{2k-1}^j - \hat{v}_{2k-1}^j$.

Exercice 1. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme direct de la transformée multi-échelle quadratique non-linéaire en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 2. *Pour un signal X de taille $n \times n$ implémente l'algorithme invers de la transformée multi-échelle quadratique non-linéaire en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 3. *Sur une image de votre choix, vérifier que l'on a bien l'identité avec l'image de départ.*

Exercice 4. *Pour une image X de taille $n \times n$ ajouter du bruit gaussien et puis appliquer le seuillage pour le débruitage. Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 5. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées.*

Exercice 6. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer la transformée directe. Ensuite ne garder pour la transformée inverse que les coefficients plus grands qu'un certain seuil. Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport au nombres de coefficients gardés.*

Exercice 7. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer les transformée directes : quadratique linéaire et non-linéaire. Ensuite ne garder pour la transformée inverse que les coefficients plus grands qu'un certain seuil. Etudier numériquement la qualité de la reconstruction pour ces deux transformées par rapport au nombres de coefficients gardés.*