

Séance 5 : Transformée multiéchelles 2D

La transformation Haar multi-échelle.

On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \quad k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine:

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1}.$$

Et donc le détail est $d_k^{j-1} = v_{2k-1}^j - \hat{v}_{2k-1}^j = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j - v_{2k}^j)$.

La transformation quadratique multi-échelle.

On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \quad k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine:

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}).$$

Et donc le détail est $d_k^{j-1} = v_{2k-1}^j - \hat{v}_{2k-1}^j$.

Pour le traitement des images on utilise le produit tensoriel. Cela implique le fait que les lignes et les colonnes de l'image seront traitées comme des signaux/vecteurs $1d$. Plus précisément une étape du produit tensoriel consiste dans l'application des algorithmes $1d$ sur toutes les lignes de l'image et ensuite l'application des algorithmes $1d$ sur toutes les colonnes sur l'image précédemment obtenue. Ensuite on passe l'itération suivante.

On suppose la taille de l'image $n \times n$. Le nombre d'itérations L . En gnral $L \leq \log_2 n$ Schématiquement cette technique a les tapes suivantes:

- for $l = L$ to 3 do
 - “transform on the rows ”
 - for $i = 1$ to n apply $1D$ procedure on the row i
 - copy the result in an intermediary matrix.
 - “transform on the columns ” of the intermediary matrix.
 - for $j = 1$ to n apply $1D$ procedure on the column j

- copy the result.
- copy the result.
- divide l by 2
- go to the first step

Exercice 1. *Pour une image X de taille $n \times n$ implémenter l'algorithme direct pour les 2 transformées multi-échelles en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 2. *Pour une image X de taille $n \times n$ implémenter l'algorithme invers pour les 2 transformées multi-échelles en utilisant le produit tensoriel.*

Exercice 3. *Sur une image de votre choix, vérifier que l'on a bien l'identité avec l'image de départ.*

Exercice 4. *Pour une image X de taille $n \times n$ ajouter du bruit gaussien et puis appliquer le seuillage pour le débruitage. Afficher les coefficients gardés. Où sont localisés ces coefficients ?*

Exercice 5. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'erreur en fonction du seuil.*

Exercice 6. *Pour une image X de taille $n \times n$ appliquer les transformée directes : haar et quadratique. Ensuite ne garder pour la transformée inverse que les coefficients plus grands qu'un certain seuil. Etudier numériquement la qualité de la reconstruction pour ces deux transformées par rapport au nombres de coefficients gardés.*