Séance 3 : **Transformée multiéchelles 1d non-linéaire**

L'objectif de ce TD/TP est la mise en oeuvre numérique et l'étude numérique de la transformée quadratique non-linéaire et la comparer avec la transformée de Haar. On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \;\; k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe : On calcule d'abord les quantités $c_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$, $g_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_{k-2}^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k-1}^{j-1}|$ et $d_k = |v_{k+1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_{k+2}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$.
Alors
si $c_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}).$$

si $d_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1} \;\text{ et }\; \hat{v}_{2k}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1},$$

si $g_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1} \;\text{ et }\; \hat{v}_{2k}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1},$$

Les signaux considérés ici sont du type : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n représente la dimension du signal (on le suppose toujours une puissance de 2) et l'échantillon d'indice i est noté par x_i, pour éviter les problèmes de traitement aux bords du signal, nous considéreront que le signal est périodique (c'est à dire : $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ etc., ainsi que $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$ etc.)

On considère les exemples suivants :
-ex1 : $x_i = i, 1 \leq i \leq n$.
-ex2 : une ligne d'une image de votre choix.
-ex3 : $x_i = \sin(2\pi i/n), 1 \leq i \leq n/3$ et $x_i = 1/2 + \sin(2\pi i/n), n/3 < i \leq n$.

Exercice 1. *Remplacer dans les codes de la transformé de Haar, les opérations de "downsampling" et "upsampling" par deux fonctions python.*

Exercice 2. *Ecrire les fonctions directe et inverse qui implémente la transformée quadratique.*

Exercice 3. *Pour ces exemples vérifier que $x = inverse(directe(x))$ pour les signaux ex1 - ex3.*

Exercice 4. *Pour ces exemples compter les valeurs $y = directe(x)$ supérieures à T, pour $T = 128$ et $T = 12$. Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*

Exercice 5. *Pour ces exemples calculer* $e_{2,T} = \|x - inverse(seuillage(directe(x), T))\|_2$, *pour* $T = 128$ *et* $T = 12$. *Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*

Exercice 6. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'érreur en fonction du seuil. Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*