Séance 2 : **Transformée multiéchelles 1d**

L'objectif de ce TD/TP est la mise en oeuvre numérique et l'étude numérique de la transformée quadratique et la comparer avec la transformée de Haar. On rappelle la transformée de Haar. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \;\; k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j \text{ où } \hat{v}_{2k-1}^j = \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} \; k \geq 1.$$

On rappelle la transformée quadratique. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière ne change pas. Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j$$

où

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \;\; \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \;\; k \geq 1.$$

Les signaux considérés ici sont du type : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n représente la dimension du signal (on le suppose toujours une puissance de 2) et l'échantillon d'indice i est noté par x_i, pour éviter les problèmes de traitement aux bords du signal, nous considéreront que le signal est périodique (c'est à dire : $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ etc., ainsi que $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$ etc.)

On considère les exemples suivants :
-ex1 : $x_i = i, 1 \leq i \leq n$.
-ex2 : une ligne d'une image de votre choix.
-ex3 : $x_i = \sin(2\pi i), 1 \leq i \leq n/2$ et $x_i = 1/2 + \sin(2\pi i), n/2 < i \leq n$.

Exercice 1. *Ecrire les fonctions directe et inverse qui implémente la transformée quadratique.*

Exercice 2. *Pour ces exemples vérifier que $x = inverse(directe(x))$ pour les signaux ex1 - ex3.*

Exercice 3. *Pour ces exemples compter les valeurs $y = directe(x)$ supérieures à T, pour $T = 128$ et $T = 12$. Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*

Exercice 4. *Pour ces exemples calculer $e_{2,T} = \|x - inverse(seuillage(directe(x), T))\|_2$, pour $T = 128$ et $T = 12$. Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*

L'érreur entre deux vecteurs x et y se calcule par :

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

Exercice 5. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'érreur en fonction du seuil. Comparer avec les résultats de la transformée de Haar.*