# Séance 1 : **Transformée multiéchelle 1d**

L'objectif de ce TD/TP est la mise en oeuvre numérique et l'étude numérique des transformées 1d.

Le code demandé doit être réalisé en *python* ou *octave* et accompagné d'un *notebook*.

Les signaux considérés ici sont du type : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n$ représente la dimension du signal (on le suppose toujours une puissance de 2) et l'échantillon d'indice $i$ est noté par $x_i$, pour éviter les problèmes de traitement aux bords du signal, nous considéreront que le signal est périodique (c'est à dire : $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ etc., ainsi que $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$ etc.)

On considère les exemples suivants :
-ex1 : $x_i = i, 1 \leq i \leq n$.
-ex2 : une ligne d'une image de votre choix.
-ex3 : $x_i = \sin(2\pi i), 1 \leq i \leq n/2$ et $x_i = 1/2 + \sin(2\pi i), n/2 < i \leq n$.

## 1 Transformée de Haar

On rappelle la transformée de Haar. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \ \ k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j \text{ où } \hat{v}_{2k-1}^j = \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} \ k \geq 1.$$

## 2 Transformée quadratique

On rappelle la transformée quadratique. Le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière ne change pas. Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine nécéssite le calcul du détail:

$$d_k^{j-1} = \hat{v}_{2k-1}^j - v_{2k-1}^j$$

où

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \ \ \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}), \ \ k \geq 1.$$

## 3 Transformée quadratique ENO

On rappelle la transformée quadratique ENO. On rappelle le passage de l'échelle fine vers l'échelle grossière:

$$v_k^{j-1} = \frac{1}{2}(v_{2k-1}^j + v_{2k}^j), \ \ k \geq 1.$$

Le passage de l'échelle grossière vers l'échelle fine est plus complexe : On calcule d'abord les quantités $c_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$, $g_k = |v_{k-1}^{j-1} - v_{k-2}^{j-1}| + |v_k^{j-1} - v_{k-1}^{j-1}|$ et $d_k = |v_{k+1}^{j-1} - v_k^{j-1}| + |v_{k+2}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}|$. Alors
si $c_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = v_k^{j-1} - \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}) \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = v_k^{j-1} + \frac{1}{8}(v_{k-1}^{j-1} - v_{k+1}^{j-1}).$$

si $d_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k+1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k+2}^{j-1},$$

si $g_k = \min\{c_k, g_k, d_k\}$

$$\hat{v}_{2k-1}^j = \frac{5}{8}v_k^{j-1} + \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} - \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1} \text{ et } \hat{v}_{2k}^j = \frac{11}{8}v_k^{j-1} - \frac{1}{2}v_{k-1}^{j-1} + \frac{1}{8}v_{k-2}^{j-1},$$

**Exercice 1.** *Ecrire la fonction directe qui implémente chaque transformation directe multiéchelles.*

**Exercice 2.** *Ecrire la fonction inverse qui implémente chaque transformée inverse multiéchelles.*

**Exercice 3.** *Pour ces exemples et les trois tarnsformées vérifier que $x = inverse(directe(x))$ pour les signaux ex1 - ex3.*

**Exercice 4.** *Ecrire une fonction seuillage qui en entrée a un vecteur $x$ de taille $n$ et une valeur de seuil $T$. La sortie $y$ est définie de la manière suivante si $|y_i| \leq T$ alors $y_i = 0$ autrement le $y_i = x_i$.*

**Exercice 5.** *Pour ces exemples calculer $e_{2,T} = \|x - inverse(seuillage(directe(x), T))\|_2$, pour $T = 128$ et $T = 12$.*

*L'érreur entre deux vecteurs $x$ et $y$ se calcule par :*

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

**Exercice 6.** *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'érreur en fonction du seuil. Comparer les trois transformées.*