Séance 1 : **Transformée multiéchelle 1d**

L'objectif de ce TD/TP est la mise en oeuvre numérique et l'étude numérique de la transformée de Haar (la transformée démi-somme/ démi-différences).

Le code demandé doit être réalisé en *python* et accompagné d'un *notebook*.

Les signaux considérés ici sont du type : $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n représente la dimension du signal (on le suppose toujours une puissance de 2) et l'échantillon d'indice i est noté par x_i, pour éviter les problèmes de traitement aux bords du signal, nous considéreront que le signal est périodique (c'est à dire : $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ etc., ainsi que $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$ etc.)

On considère les exemples suivants :
-ex1 : $x_i = i, 1 \leq i \leq n$.
-ex2 : une ligne d'une image de votre choix.
-ex3 : $x_i = \sin(2\pi i), 1 \leq i \leq n/2$ et $x_i = 1/2 + \sin(2\pi i), n/2 < i \leq n$.

Exercice 1. *Ecrire la fonction directe qui implémente la transformation directe de Haar multiéchelles.*

Exercice 2. *Ecrire la fonction inverse qui implémente la transformée inverse de Haar multiéchelles.*

Exercice 3. *Pour ces exemples vérifier que* $x = inverse(directe(x))$ *pour les signaux ex1 - ex3.*

Exercice 4. *Récrire les fonctions directe et inverse 1d en utilisant l'instruction "for".*

Exercice 5. *Ecrire une fonction seuillage qui en entrée a un vecteur* x *de taille* n *et une valeur de seuil* T*. La sortie* y *est définie de la manière suivante si* $|y_i| \leq T$ *alors* $y_i = 0$ *autrement le* $y_i = x_i$*.*

Exercice 6. *Pour ces exemples visualiser les valeurs* $y = directe(x)$ *supérieures à* T*, pour* $T = 128$ *et* $T = 12$*.*

Exercice 7. *Pour ces exemples calculer* $e_{2,T} = \|x - inverse(seuillage(directe(x), T))\|_2$*, pour* $T = 128$ *et* $T = 12$*.*

L'érreur entre deux vecteurs x *et* y *se calcule par :*

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

Exercice 8. *Etudier numériquement la qualité de la reconstruction par rapport aux seuils utilisées. Faire le graphe de l'érreur en fonction du seuil.*