Le monde des images numériques.

Photographie et vidéo numérique, TV, astronomie, médecine, etc.

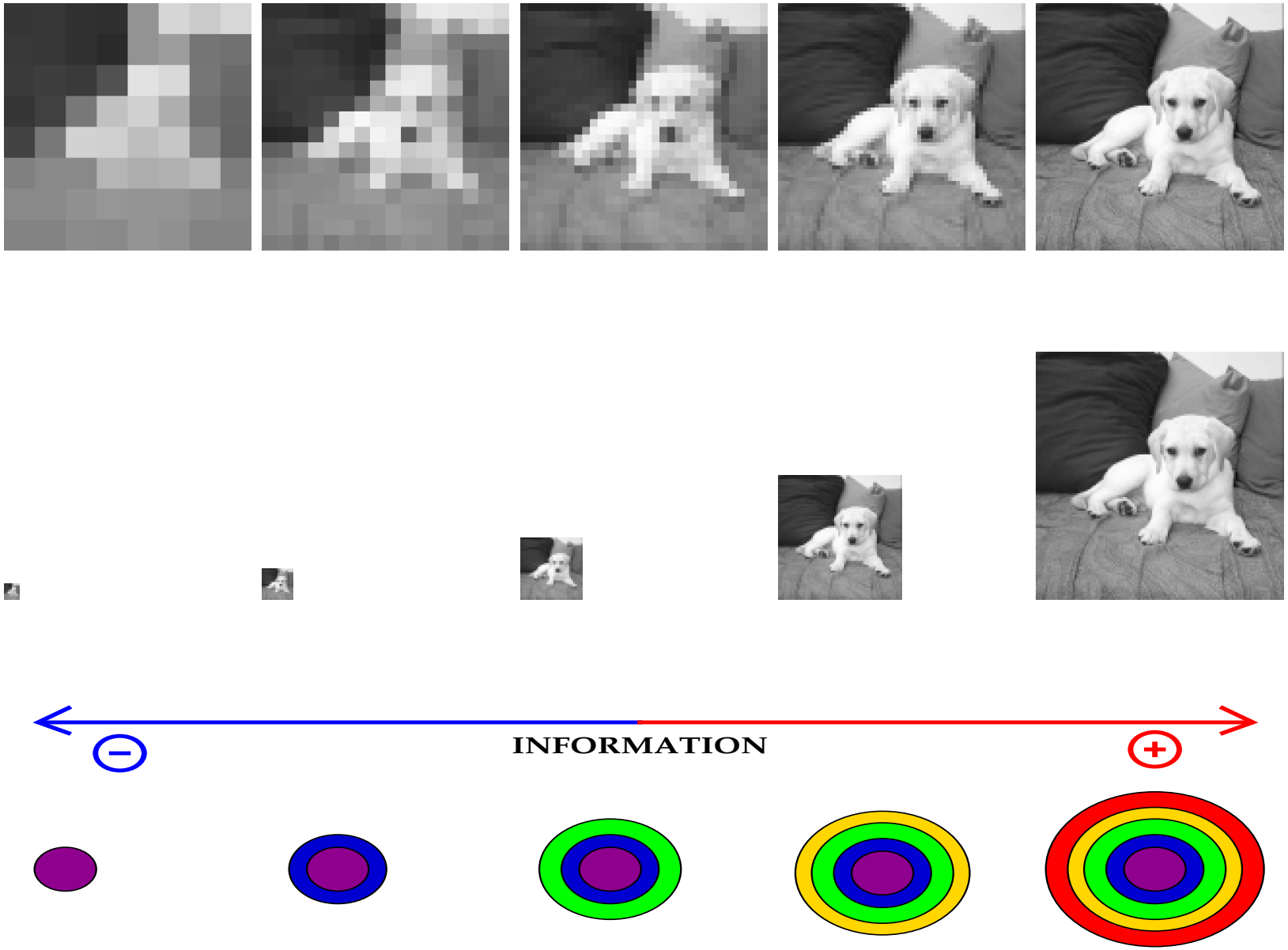
Représentation mathématique d'une image :

$I(x, y) \; = \;$ Intensité lumineuse au point (x, y)

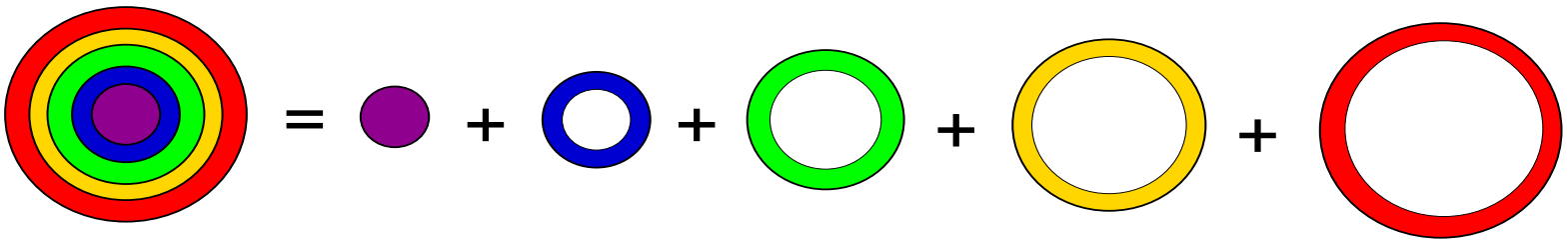
Noir $= 0 \leq I(x, y) \leq 1 \; = \;$ Blanc

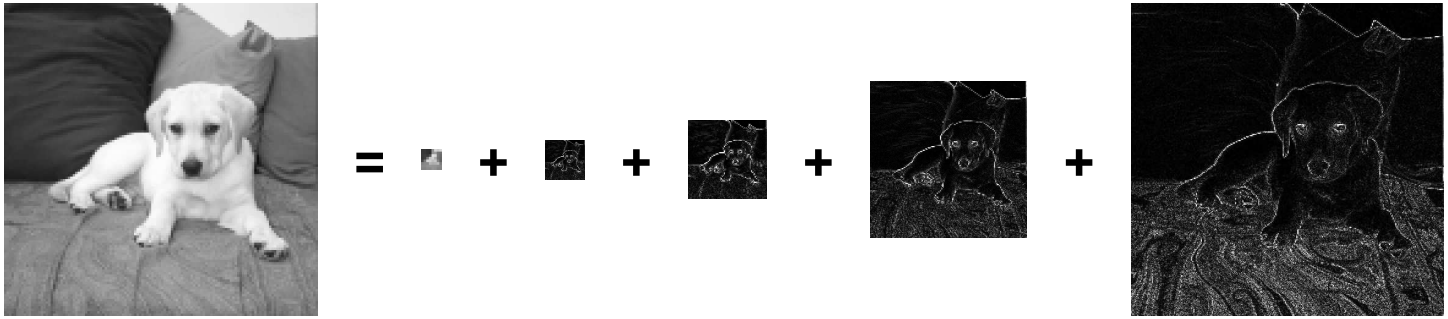
Traitement numérique de l'image : ensemble des opérations mathématiques appliquées à $I(x, y)$ par des algorithmes, visant à résoudre des tâches spécifiques concernant l'image :
- Restauration, débruitage : une version dégradée de l'image que l'on cherche à améliorer,
- Compression, codage : réduire la place mémoire occupée par l'image numérique tout en conservant sa qualité.

Structure hiérarchique de l'information visuelle.



Représentation multiéchelle dans une base d'ondelettes





$$I = I_0 + D_1 + \ldots\ldots + D_{j-1} + D_j$$

où $D_j = I_j - \mathcal{A} I_{j-1}$

- concentration des coefficients numériquement significatifs.
- compression $\sim$ diminuer la taille de D_j.

  $\sim$ améliorer $\mathcal{A} I_{j-1}$ l'approximation de I_j.

Application à la compression des images.

Idée de base : on ne code avec précision que les coefficients numériquement significatifs

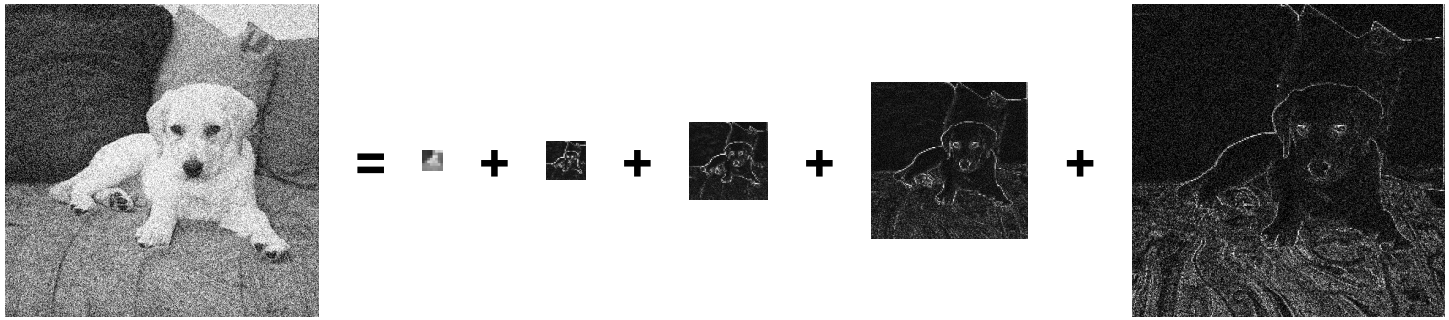
$\Rightarrow$La résolution s'adapte localement

Exemple : codage de 1 % des coefficients

Standard de compression JPEG 2000 :

- Mêmes principes de base
- Utilise des approximations plus “lisses"
- Bonne qualité avec compression de 1/40

Application au débruitage des images



Représentation multiéchelle d'une image bruitée : les coefficients numériquement significatifs “émergent" au dessus du niveau d'intensité du bruit.

Stratégie naturelle : seuillage

des coefficients d'ondelettes inférieurs

au niveau d'intensité du bruit.

INTUITION.

- une fonction régulière par morceaux peut être approchée uniquement à partir des basses échelles.
- la prédiction intègre un modèle afin de rendre les détails plus petits.

Extension recherchée en 2D : précision pour les fonctions régulières par morceaux avec courbes de discontinuités régulières, exactitude pour des fonctions polynômiales par morceaux avec des contours rectilignes.

Extension au cas 2D – méthode séparable .

– héritent de la simplicité des méthodes 1D, mal adaptées aux contours

Basses échelles Linéaire Technique séparable

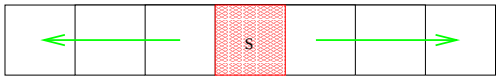
But : Développer et analyser des stratégies non-séparables.

Extension au cas 2D : méthodes non-séparables.

– prédiction adaptée aux contours

Première étape : détection des contours

Basée sur la technique unidimensionnelle de sélection du stencil.



Une cellule S est singulière si les stencils associés aux cellules voisines tendent à l'éviter dans la direction horizontale ou verticale.

Extension au cas 2D : méthodes non-séparables.

Deuxième étape : sélection des contours

FIGURE: **Image** *peppers* **: contours avant et après sélection**

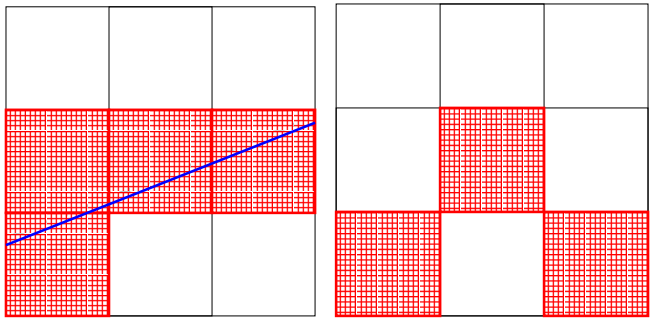


FIGURE: **Configuration admissible et non-admissible**

Extension au cas 2D : méthodes non-séparables.

Troisième étape : Reconstruction

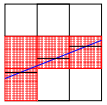
- classique (polynômiale dans les cellules non-singulières).
- généralisation de la technique ENO-SR dans les cellules singulières.
  - identification des paramètres d'un contour rectiligne (p, q)
  - reconstruction par une fonction

$$\tilde{p}_k(x, y) = a(x, y)\chi_{\{px+qy \leq 1\}} + b(x, y)\chi_{\{px+qy \geq 1\}}$$

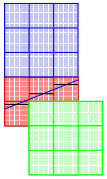
Extension au cas 2D : méthodes non-séparables.

Comment ça marche ?

- en utilisant la technique $1D$ sur chaque rangée horizontale, puis droite des moindres carrés.



- calcul des polynômes a et b par des stencils situés de part et d'autre de la singularité.



- Théorème (BM) : cette procédure est exacte pour les fonctions constantes par morceaux séparées par une droite, elle est aussi exacte pour les fonctions polynômiales biquadratiques.

Résultats numériques

Reconstruction sans ajouter les détails exemple 1

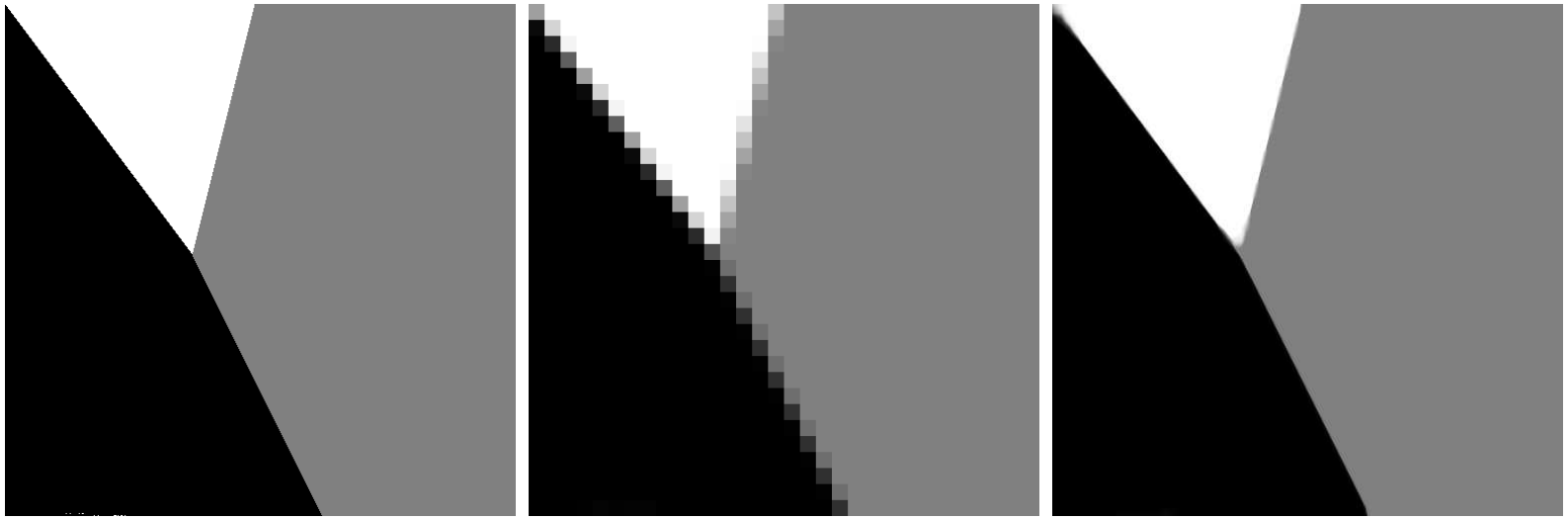
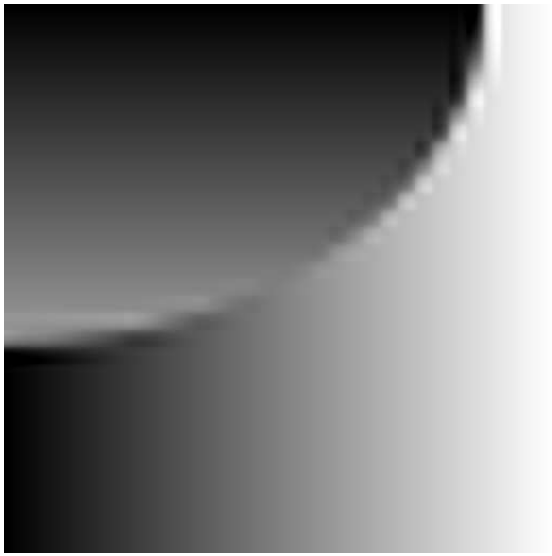


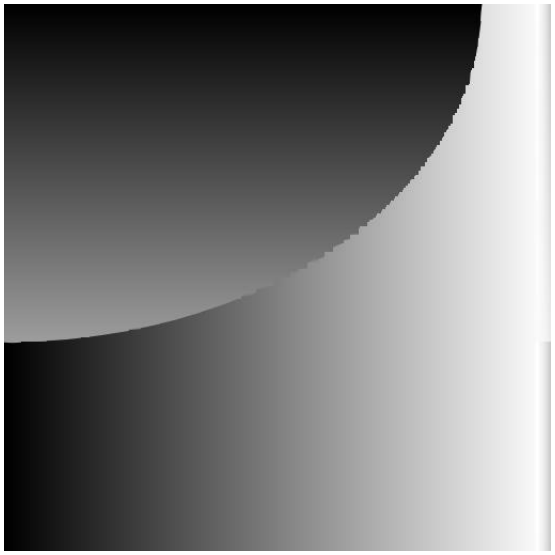
FIGURE: **Image originale, données basse résolution et reconstruction**

Résultats numériques

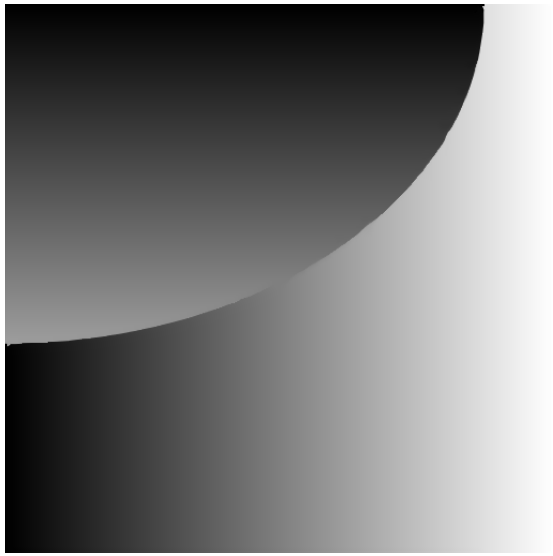
Reconstruction sans ajouter les détails exemple 2



Linéaire



SR séparable



EA

Résultats numériques

Reconstruction sans ajouter les détails exemple 3

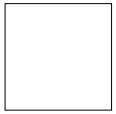
Basses échelles | Linéaire | EA

Questions.

- *amélioration de la concentration des coefficients*, pour des fonctions régulières par morceaux avec des courbes de discontinuité régulières.
- conservation des mêmes propriétés de concentration pour les espaces fonctionnels classiques que les bases d'ondelettes, en particulier les espaces de Besov et BV ?
- contrôle de l'erreur due au seuillage $\sim$ *stabilité* de la transformée.

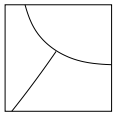
Amélioration de la concentration des coefficients.

Si I est C^2 par morceaux, (sauf une union finie de courbes régulières C^2 fermées de longueur finie) alors à l'échelle 2^{-j} :



$\mathcal{O}(2^{2j})$ coefficients estimés par $\mathcal{O}(2^{-3j})$ (régions régulières)

$\mathcal{O}(2^{j})$ coefficients estimés par $\mathcal{O}(2^{-\frac{3}{2}j})$ (contours)



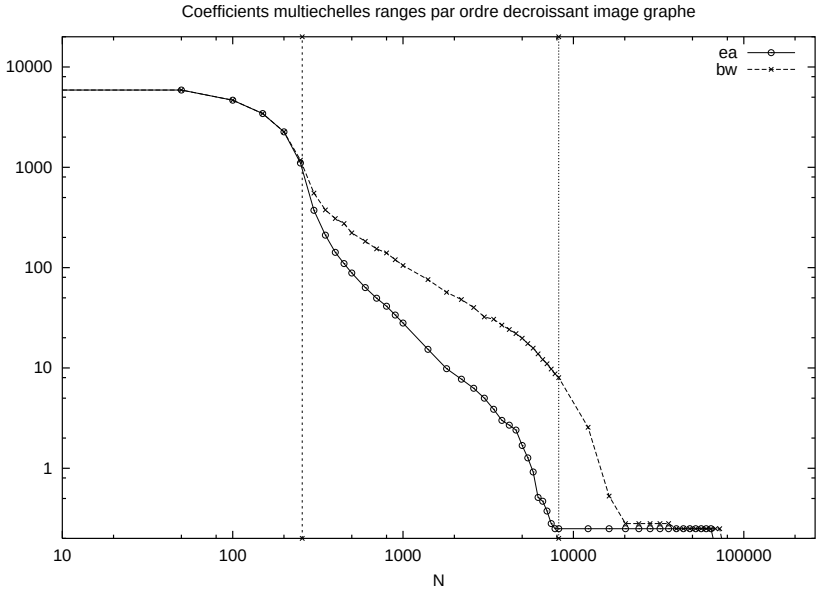
$\mathcal{O}(1)$ coefficients estimés par $\mathcal{O}(2^{-j})$ (jonctions en T)

$\Rightarrow$ Théorème (A. Cohen, B.M.) : l'approximation à N termes vérifie

$$\|I - I_N\|_{L^2} \leq CN^{-1}.$$

Amélioration de la concentration des coefficients.

Résultat numérique



Méthodes linéaire et EA - décroissance des détails

Caractérisation de la régularité .

Théorème (B.M.) : équivalences du type

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j}\|d^j\|_{\ell^p})_{j\geq 0}\|_{\ell^q} \sim \|v\|_{B^s_{p,q}}$$

$$\#\{\lambda\ ;\ |d_\lambda| > \eta\} \leq C|v|_{BV}\eta^{-1}.$$

Cas linéaire : les ingrédients

1. Théorème direct basé sur une inégalité de Jackson

$$\inf_{g\in V_j} \|v-g\|_{L^p} \lesssim 2^{-mj}\|v\|_{W^{m,p}}$$

pour un entier $m > s$.

2. Théorème inverse fait appel à une inégalité de Bernstein

$$\|v\|_{W^{r,p}} \lesssim 2^{rj}\|v\|_{L^p} \quad \text{si} \quad v \in V_j,$$

pour un $r > s$.

la définition des espaces V_j n'a plus de sens dans le cadre non-linéaire

Caractérisation de la régularité – cas non-linéaire.

Absence de fonctions de base clairement définies.
$\Rightarrow$ analyse directe du processus de prédiction.

Revient à étudier directement l'itération non-linéaire

$$v^j = Sv^{j-1} + e^{j-1}$$

où l'opérateur de prédiction $S := S(v^{j-1}) = P_j^{j-1}$ dépend des données.

Pour un tel schéma non-linéaire, a-t-on
(i) Convergence, bornitude et régularité ?
(ii) Stabilité ?

L'analyse se fait à l'aide des propriétés de contractivité de S.

Caractérisation de la régularité – cas non-linéaire.

- S exact pour les polynômes $\Rightarrow$ existence des schémas associés aux différences finies $w_k^j = v_{k+1}^j - v_k^j = S_1 w_k^{j-1}$.

Convergence, bornitude et régularité sont analysées à l'aide de la contractivité des schémas pour les différences.

On doit considérer les produits des différents opérateurs $S_1(v^j)$. Soit le rayon spectral joint de S_1 défini comme la meilleure constante ρ telle que

$$\sup_{X_1,\cdots,X_j \in \ell^p} \|S_1(X_j)\cdots S_1(X_1)\|_{\ell^p} \lesssim \rho^j$$

Question : estimer ρ ?

Caractérisation de la régularité – cas non-linéaire.

Théorème direct

Théorème

(BM) Si l'opérateur de prédiction reproduit les polynômes jusqu'à l'ordre $m-1$, on a alors

$$\|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j}\|d^j\|_{\ell^p})_{j\geq 0}\|_{\ell^q} \lesssim \|v\|_{B^s_{p,q}},$$

pour un entier $m > s$.

Théorème inverse

Théorème

(BM) Soit S exact pour les constantes. Soit une suite multi-échelles $(v^0, d^0, d^1, \cdots)$. Si $\rho_p(S_1) < 2^{1/p}$ alors $v \in B^s_{p,q}$ et

$$\|v\|_{B^s_{p,q}} \lesssim \|v^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-d/p)j}\|d^j\|_{\ell^p})_{j\geq 0}\|_{\ell^q},$$

pour un $s > 0$ tel que $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$.

Stabilité – décompositions multiéchelles non-linéaires.

Théorème

(BM) Soit S exact pour les constantes, dépendant continûment des données. Soient deux suites multi-échelles $(v^0, d^0, d^1, \cdots)$ et $(\tilde{v}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \cdots)$. Si $\rho_p(S_1) < 1$ alors

$$v - \tilde{v} \in B^s_{p,q}$$

et

$$\|v - \tilde{v}\|_{B^s_{p,q}} \lesssim \|v^0 - \tilde{v}^0\|_{\ell^p} + \|(2^{(s-1/p)j}\|d^j - \tilde{d}^j\|_{\ell^p})_{j\geq 0}\|_{\ell^q}.$$

pour un $s > 0$ tel que $s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log 2} + \frac{1}{p}$ et $s > \frac{1}{p}$.

Sous ces hypothèses dans le cas $p = \infty$, ceci signifie que la fonction $v \in L^\infty$ est aussi dans C^ε, où $\varepsilon > 0$ peut être arbitrairement petit.

Stabilité – quelques exemples.

- ENO, ENO-SR a priori instables à cause de la sélection des stencils. Rendus stables par une sélection plus lisse du stencil.
- WENO (weighted ENO) est stable. On définit

$$\tilde{p}_k := \alpha_{k-1} p_{k-1} + \alpha_k p_k + \alpha_{k+1} p_{k+1}$$

  où les poids $\alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ dépendent continûment des données. On donne le poids le plus important au stencil le plus régulier.
- Application au schéma d'interpolation ENO et ENO-SR à 3 moyennes.

Stabilité – cas de la représentation EA.

Soit $f_N := \mathcal{M}^{-1} R_{E_N} \mathcal{M} f$ approximation de f, où R_{E_N} est la restriction à E_N : l'ensemble des indices correspondants au N plus grands coefficients.

- Cas linéaire $\|f - f_N\|_{L^2}^2 \sim \sum_{\lambda \notin E_N} |d_\lambda|^2$ (base de Riesz sous-jacente).
- Cas non-linéaire : le rapport $\frac{\|f - f_N\|_{L^2}^2}{\sum_{\lambda \notin E_N} |d_\lambda|^2}$ observé reste borné.

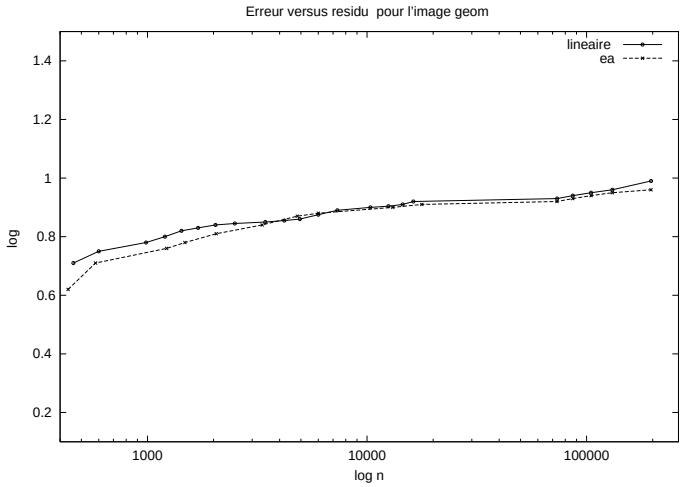
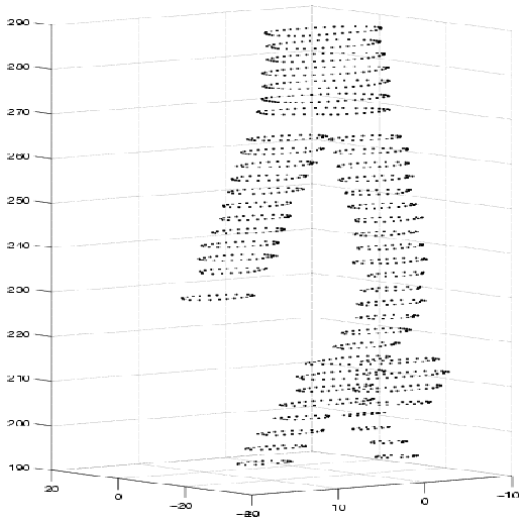


Image géométrique : erreur / résidu (a) linéaire (b) EA

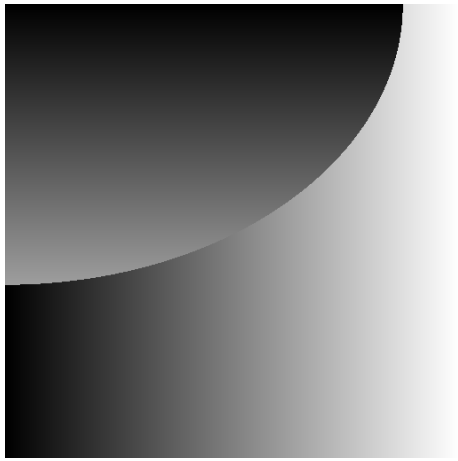
Application à l'imagérie biomédicale : objectifs.

- développement d'un outil fiable pour la détection précoce des anévrismes.
- simulation numérique de l'écoulement du sang dans les vaisseaux.
- reconstruction de la géométrie de la paroi du vaisseau.



Sections et détection des contours

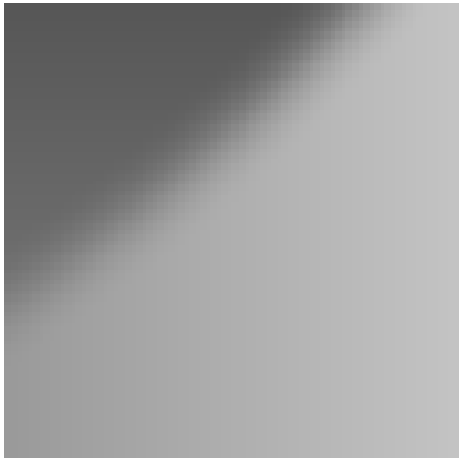
Résultats numériques : effet déconvoluant .



Original

Contour flou

Reconstruction

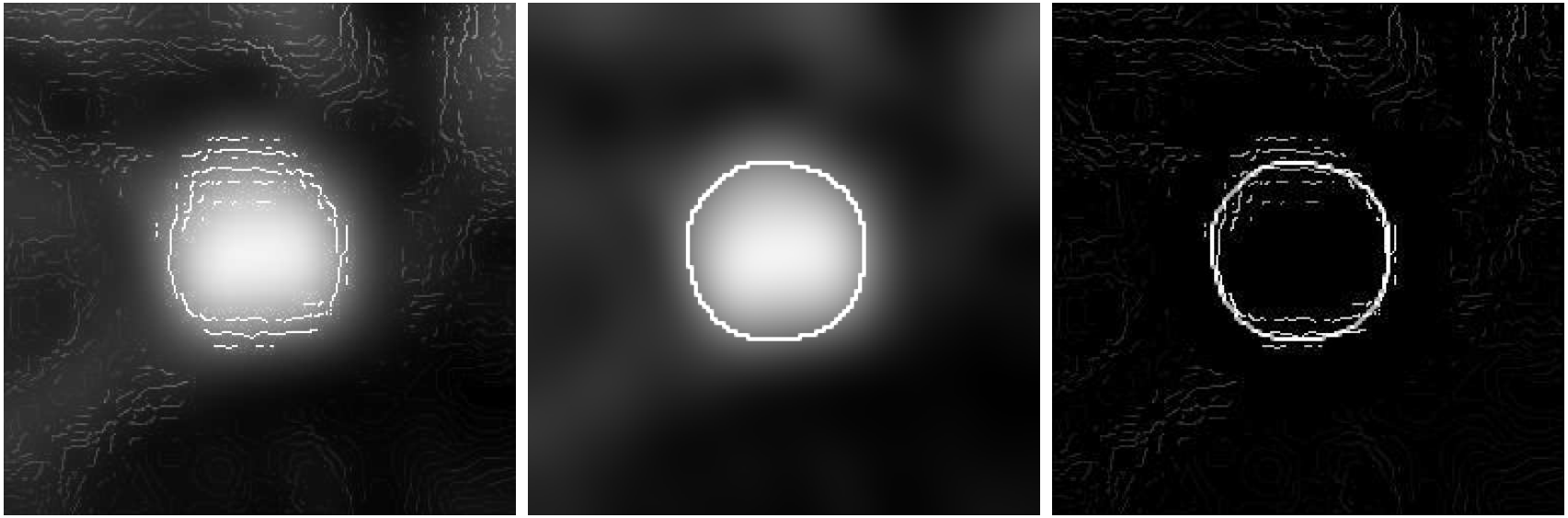


Contour flou

Reconstruction

Images réelles

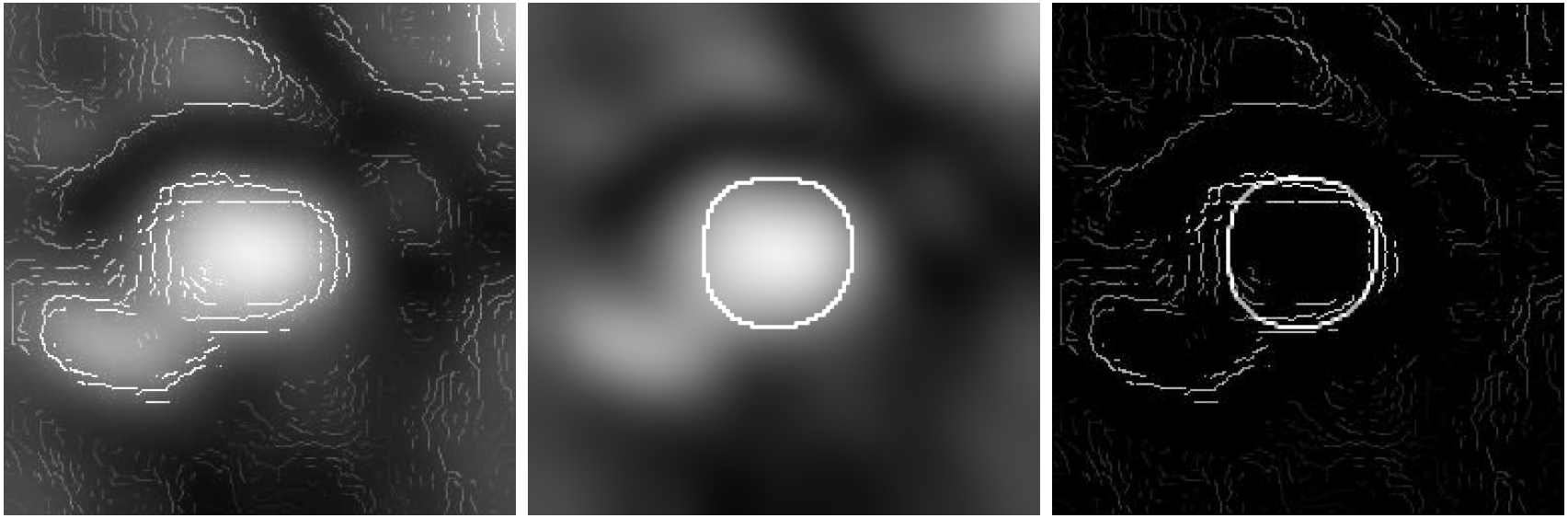
Reconstruction des contours :



(a) diffusion anisotrope (b) multi-échelles (c) superposition

Images réelles

Reconstruction des contours :



(a) diffusion anisotrope (b) multi-échelles (c) superposition

Amélioration des propriétés de compression.

Reconstruction en utilisant 1% des coefficients :

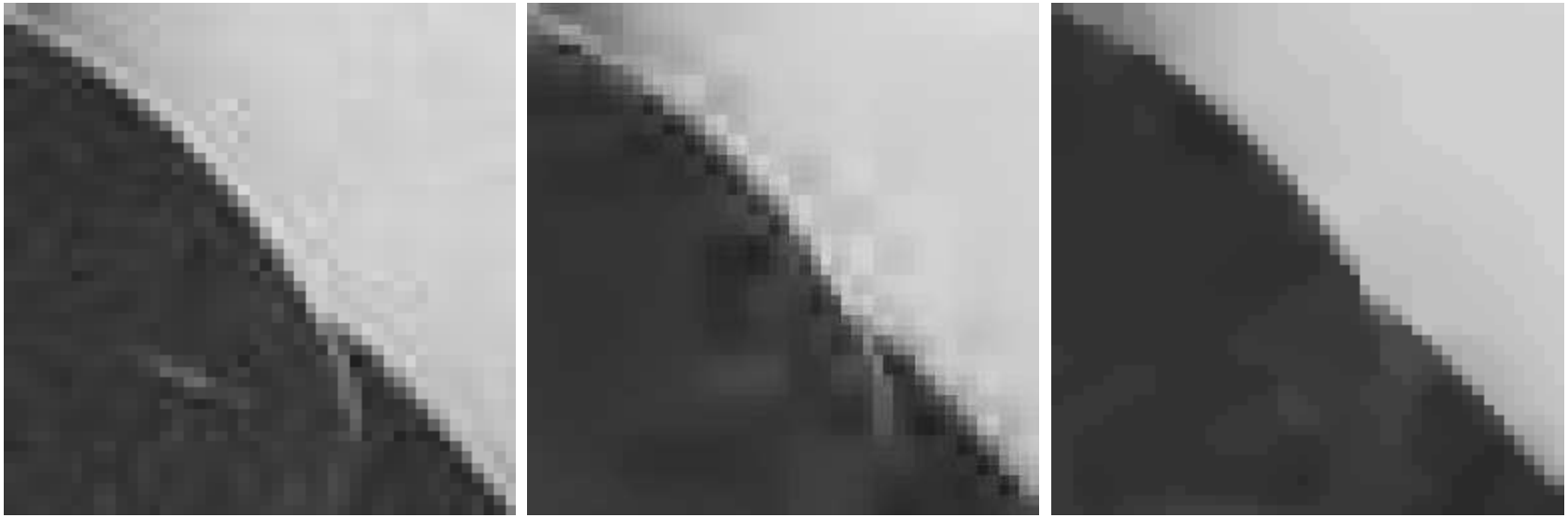
Original | Représentation Linéaire | Représentation EA

Propriétés de compression - images réelles.

Reconstruction en utilisant 3% des coefficients :

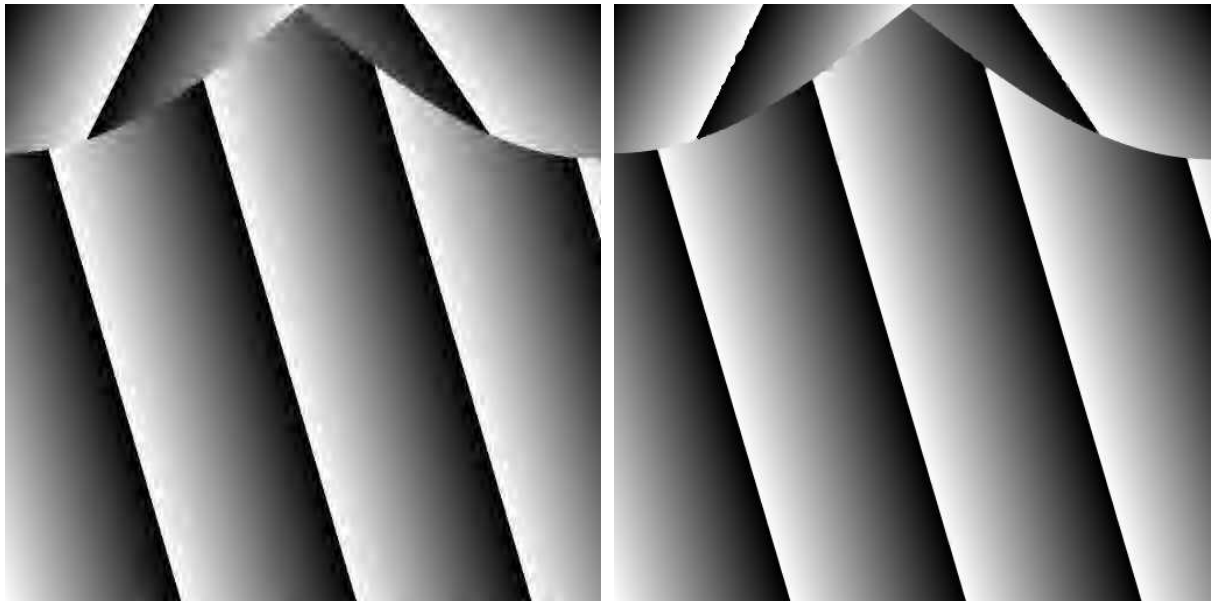
Original | Représentation Linéaire | Représentation EA

Images réelles - précision des contours . :



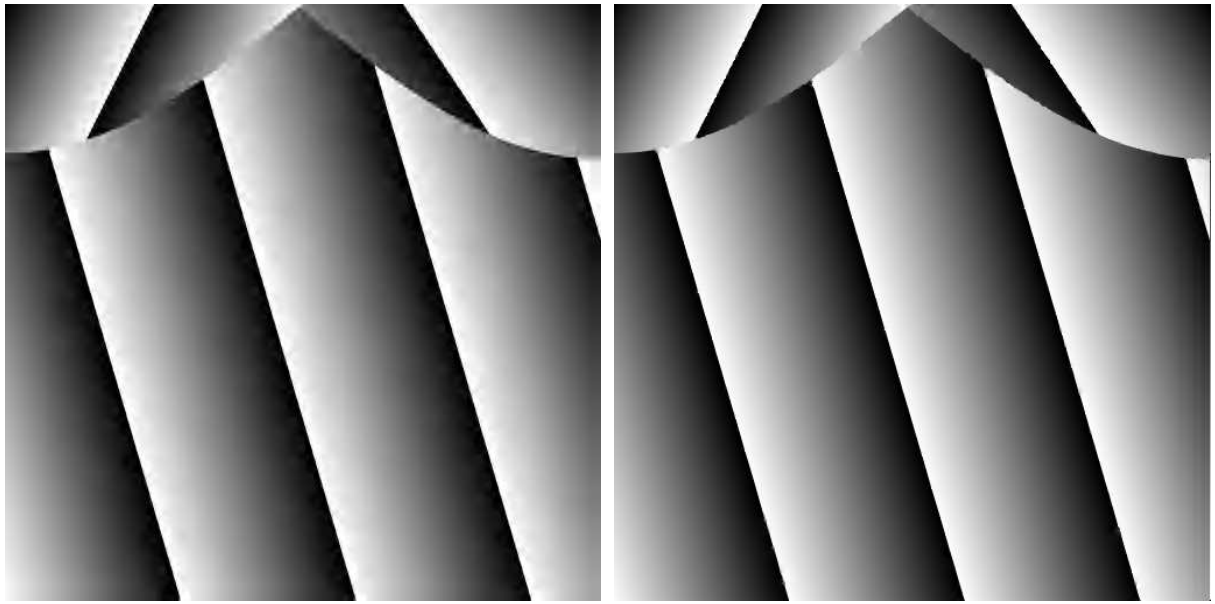
Original Linéaire EA

Compression EZW et différentes représentations :



(a) linéaire PSNR 32.55 (b) EA PSNR 35.24
Taux de compresssion 0.08 (bpp)

Compression EBCOT et différentes représentations :



(a) linéaire PSNR 34.93 (b) EA PSNR 39.51
Taux de compresssion 0.08 (bpp)

Images réelles

Compression EZW et différentes représentations :

(a) linéaire PSNR 24.17 (b) EA PSNR 23.97
Taux de compresssion 0.25 (bpp)

Compression EBCOT et différentes représentations :

(a) linéaire PSNR 27.19 (b) EA PSNR 26.21
Taux de compresssion 0.25 (bpp)

Remarques sur la compression .

- cas des images géométriques : améliorations visuelles et de l'erreur L^2.
- cas des images peu texturées : améliorations visuelles, mais pas de l'erreur L^2.
- cas des images très texturées : pas d'amélioration.

Applications des représentations non-linéaires.

- stratégie de compression :
  séparation de la géométrie et de la texture (J.-F. Aujol et B.M.).

Image=géométrie+texture

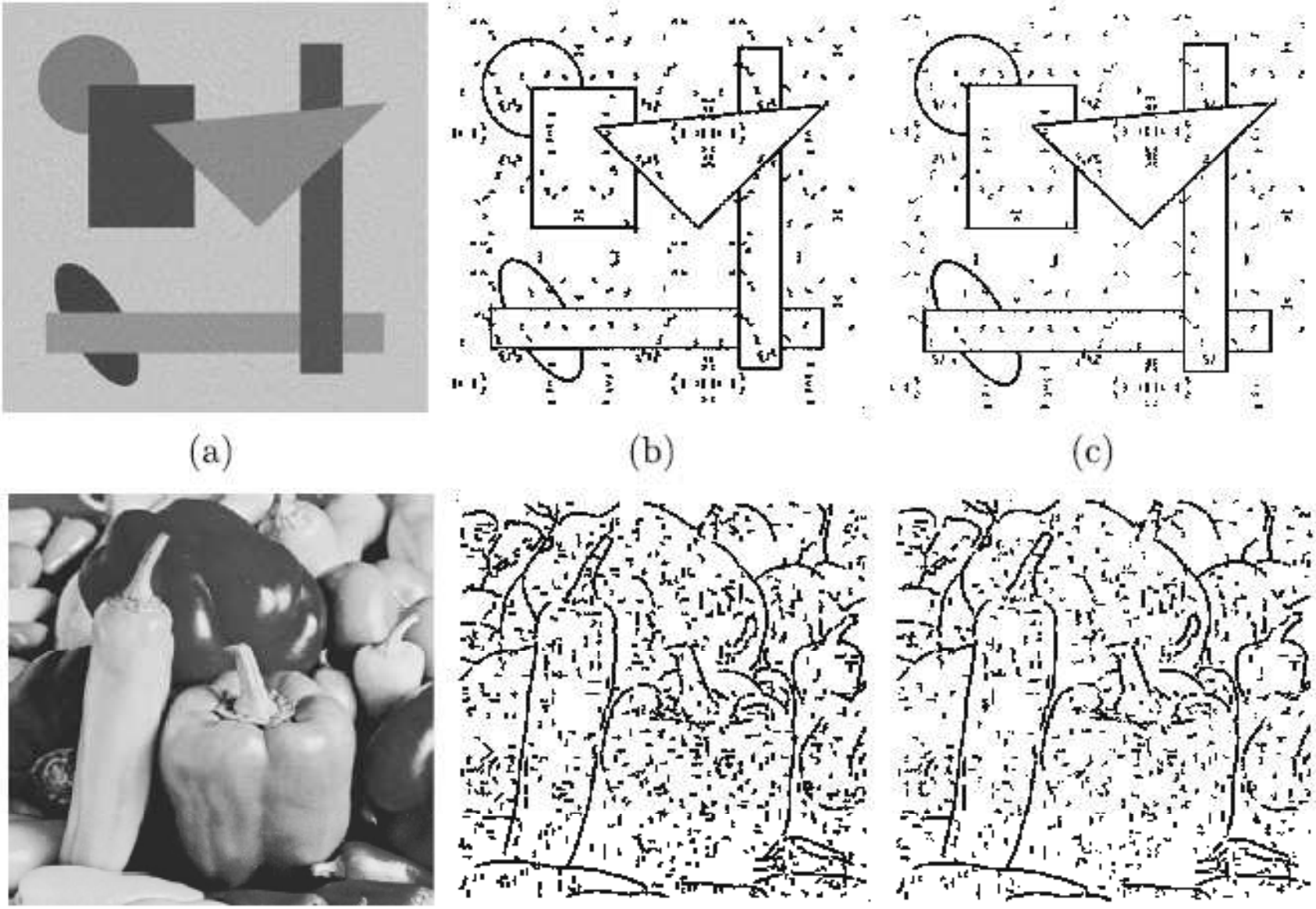
Applications des représentations non-linéaires.

Résultat de compression (J.-F. Aujol et B.M.).

Compression linéaire (PSNR=24.23) et hybride (PSNR=24.79)

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours. Images géométriques.

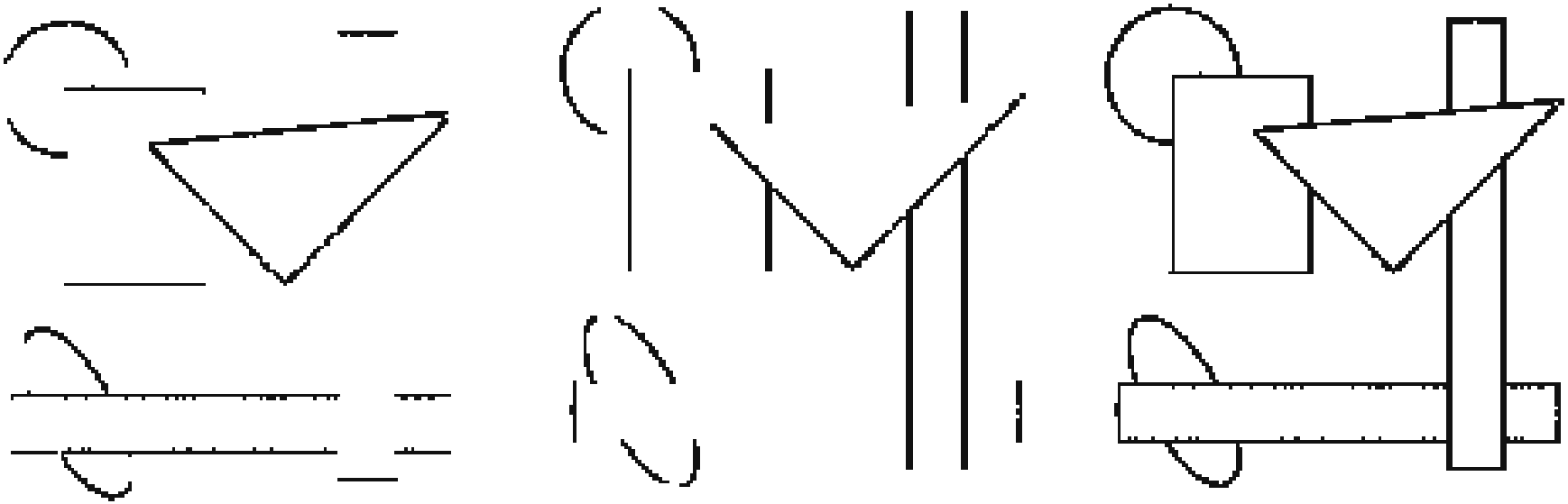


FIGURE: **Image tests géométrique et résultats des détections**

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours. Images réelles.

FIGURE: **Image peppers et résultats des détections**

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours. Robustesse.

FIGURE: **Images tests**

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours. Seuillage

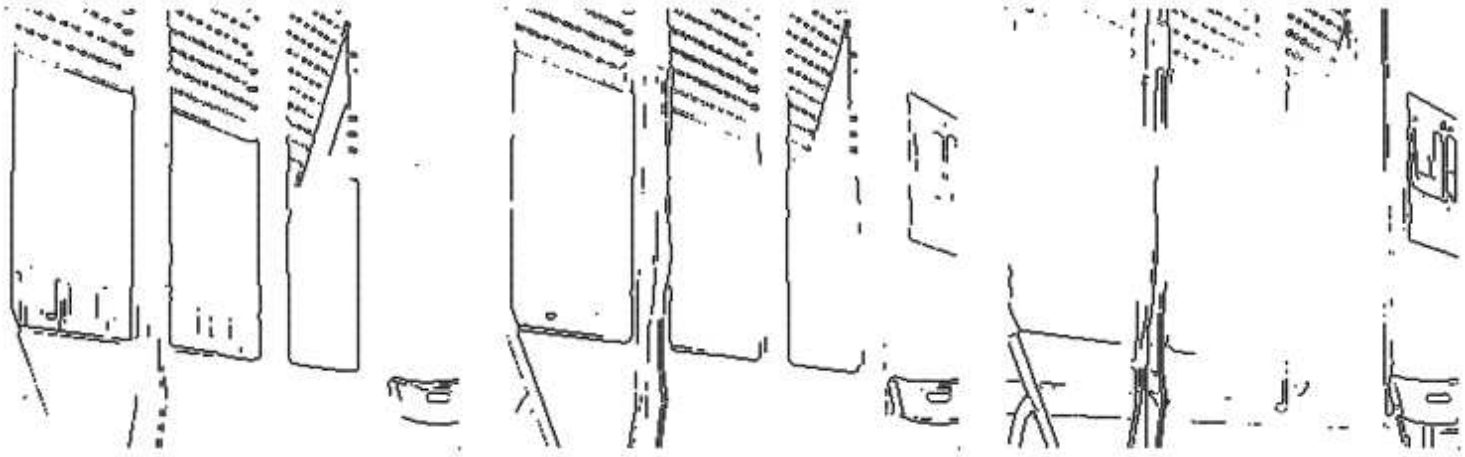


FIGURE: **Résultats des détections**

Applications des représentations non-linéaires.

Détection des contours. ENO

FIGURE: **Résultats des détections**

Conclusion et Perspectives.

Supériorité des représentations ENO - EA sur les méthodes classiques pour la reconstruction des contours nets et bien localisés.

La modélisation mathématique, en interaction avec les ingénieurs, a permis le développement et l'optimisation d'algorithmes de traitement numérique de l'image, ainsi que la compréhension de leurs performances pratiques. Le développement et l'analyse de méthodes plus performantes sera lié à une modélisation plus fine.
Vers une meilleure modélisation : Image $=$ géométrie $+$ texture.
Géométrie (objets) : prise en compte de la régularité des contours, ignorée dans le modèle des fonctions à variation bornée.
Texture (ou bruit) : modélisation statistique, et prise en compte d'une perception visuelle différente de celle de la géométrie.
Développement et l'optimisation d'algorithmes pour la classification, indexation et le tatouage numérique.