Fondements de la programmation : TD 4
Fonctions primitives récursives et fonctions récursives

Paulin de Naurois et Virgile Mogbil et Lê Thành Dũng Nguyễn
Institut Galilée – Master 1 Informatique 10/10/2018

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

(a) id : $x \in \mathbb{N} \mapsto x \in \mathbb{N}$ *(identité)*

(b) $\underline{3}$: $x \in \mathbb{N} \mapsto 3 \in \mathbb{N}$ *(exemple de fonction constante)*

(c) $\underline{3}_k$: $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mapsto 3 \in \mathbb{N}$ *(fonction constante à plusieurs arguments)*

(d) add : $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x + y \in \mathbb{N}$ *(addition)*

(e) mul : $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x \cdot y \in \mathbb{N}$ *(multiplication)*

(f) exp : $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto y^x \in \mathbb{N}$ *(exponentielle)*

(g) pred : $x \in \mathbb{N} \mapsto x \dot{-} 1 \in \mathbb{N}$ *(prédécesseur)*

(h) sous : $(x, y) \in \mathbb{N} \mapsto y \dot{-} x \in \mathbb{N}$ *(soustraction tronquée)*

(i) fact : $x \in \mathbb{N} \mapsto !\,x \in \mathbb{N}$ *(factorielle)*

(j) mod_2 : $x \in \mathbb{N} \mapsto [x]_2 \in \mathbb{N}$ *(modulo 2, i.e. reste de la division par 2)*

Exercice 2. Prouver que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

(a) eg : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ qui teste l'égalité de deux naturels, i.e. la fonction définie comme $\mathsf{eg}(x, y) = 1$ si $x = y$ et $\mathsf{eg}(x, y) = 0$ sinon. [*Aide : réutiliser une fonction de l'exercice 1.*]

(b) ppe : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ qui teste si un entier est plus petit ou égal à un autre, i.e. la fonction définie comme $\mathsf{ppe}(x, y) = 1$ si $x \leq y$ et $\mathsf{ppe}(x, y) = 0$ sinon. [*Aide : exploiter le point (a).*]

Exercice 3. Prouver que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont primitives récursives alors la fonction $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, est primitive récursive.

Exercice 4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, la *suite de Collatz* démarrant en N est définie par récurrence :

$$u_0 = N \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } n \text{ pair} \qquad u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ si } n \text{ impair}$$

Notons $f(N)$ le premier indice où la suite atteint 1 : $u_{f(N)} = 1$ et pour $i < f(N)$, $u_i \neq 1$; si elle n'atteint jamais 1, $f(N) = \perp$.
Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ définie ainsi est récursive.
Remarque : la conjecture de Collatz énoncé que les suites de Collatz arrivent toujours à 1, autrement dit f ne vaut jamais $\perp$.

Exercice 5. Montrer que la fonction « arrondi inférieur de la racine carrée » est récursive. Est-elle primitive récursive ?

Exercice 6. Refaire les fonctions de l'exercice 1 comme primitives récursives sur la notation binaire.