Optimisation Linéaire - TD 2 (Corrigé)

Exercice 1 : Résolution graphique d'un PLNE

Considérons le problème (P) à deux variables entières suivant.

$$\begin{array}{lrrcr} \max & 2\,x & +\;y & & \\ & 8\,x & +3\,y & \leq & 32 \\ & x & +3\,y & \geq & 5 \\ & -\,x & +4\,y & \leq & 9 \\ & \multicolumn{4}{l}{x, y \text{ entiers}} \end{array}$$

Rappel : La variante du problème P dans laquelle on considère que les variables sont continues (et non plus entières) est appelée *relaxation continue* du problème P et est notée $RC(P)$.

Question 1.1 : Résoudre graphiquement $RC(P)$.

Question 1.2 : Donner l'ensemble des solutions du problème (P).

Correction :

Ensemble des solutions : $(2,1)$, $(3,1)$ et $(j,2)$ pour $j = -1, \ldots, 3$. ◇

Question 1.3 : Donner l'ensemble des solutions optimales du problème (P).

Correction :

Une seule solution optimale : $(3,2)$ de coût 8. ◇

Question 1.4 : La relaxation continue de (P) a-t-elle le même optimum que (P) ? Si non, existe-t-il une fonction objective (autre que 0) pour laquelle P et $RC(P)$ ont le même optimum ?

Correction :

Non, la solution optimale de $RC(P)$ est le point satisfaisant $8x + 3y = 32$ et $-x + 4y = 9$, c'est-à-dire le point $(2 + \frac{31}{35}, 2 + \frac{34}{35})$ de coût $8 + \frac{26}{35}$. ◇

Rappel : L'*enveloppe convexe* des solutions de P est le plus petit domaine réalisable (ensemble convexe) contenant les points de P.

Question 1.5 : Déterminer l'enveloppe convexe de P. Quel est l'intérêt de connaître l'enveloppe convexe d'un PLNE ?

Correction :

L'enveloppe convexe est donnée par :

$$\begin{array}{rrcr} & y & \leq & 2 \\ x & +3\,y & \geq & 5 \\ & y & \geq & 1 \\ & x & \geq & 3 \end{array}$$

Si l'on connaît l'enveloppe convexe d'un PLNE, on peut le résoudre en résolvant le PL donné par les contraintes de l'enveloppe convexe (avec les variables continues). ◇

Résolution d'un problème d'optimisation linéaire à une contrainte

Lorsqu'un PL (sous forme canonique) a une seule contrainte en plus des contraintes de bornes pour les variables, il est possible de résoudre ce problème sans utiliser l'algorithme du simplexe. Il faut classer les variables x_j dans l'ordre décroissant des ratios $\frac{c_j}{a_j}$ où c_j et a_j représentent les coefficients de la variable x_j dans la fonction objective et dans la contrainte. La solution optimale est obtenue de la manière suivante : pour chaque variable (en suivant l'ordre décroissant des ratios), on augmente la variable jusqu'à ce que la contrainte soit saturée ou que la variable atteigne sa borne supérieure. Considérons par exemple le PL suivant.

$$\begin{array}{lllllll} \max & 14\,x_1 & +8\,x_2 & +9\,x_3 & +8x_4 & & \\ & 4\,x_1 & +4\,x_2 & +3\,x_3 & +5x_4 & \leq & 8 \\ & 0 \leq x \leq 1 & & & & & \end{array}$$

Ordre décroissant sur les ratios : x_1, x_3, x_2, x_4.
Valeur des variables :
- x_1 est fixée à 1 (borne supérieure) car $4x_1 \leq 8$ et $x_1 \leq 1$,
- x_3 est fixée à 1 (borne supérieure) car $3x_3 \leq 4$ (4 = 8 - 4 * 1 car x_1 vaut 1) et $x_3 \leq 1$,
- x_2 est fixée à $\frac{1}{4}$ car $4x_2 \leq 1$ (1 = 8 - 4 * 1 - 3 * 1 car x_1 et x_3 valent 1) et $x_2 \leq 1$,
- x_4 est fixée à 0 car $5x_4 \leq 0$ ($0 = 8 - 4*1 - 3*1 - 4*\frac{1}{4}$ car x_1 et x_3 valent 1 et x_2 vaut $\frac{1}{4}$) et $x_4 \leq 1$.

On obtient la solution optimale : $x^* = (1, \frac{1}{4}, 1, 0)$ de coût 25.

Remarque : Lorsque le PL a une seule contrainte (hors contrainte de bornes), la solution optimale a au plus une coordonnée non entière.

Exercice 2 : Résolution d'un PL avec une contrainte

Question 2.1 : Résoudre le PL suivant avec l'algorithme de résolution décrit ci-dessus.

$$\begin{array}{llllllll} \max & 10\,x_1 & +8\,x_2 & +7\,x_3 & +8x_4 & +6x_5 & & \\ & 4\,x_1 & +5\,x_2 & +2\,x_3 & +4x_4 & +2x_5 & \leq & 9 \\ & 0 \leq x \leq 1 & & & & & & \end{array}$$

Correction :
Ordre décroissant des ratios : x_3, x_5, x_1, x_4, x_2. Solution optimale : $x^* = (1, 0, 1, \frac{1}{4}, 1)$ de coût 25. ◇

Question 2.2 : Résoudre le même PL lorsque x n'est plus compris entre 0 et 1 mais uniquement supérieur ou égal à 0.
Correction :
Ordre décroissant des ratios : x_3, x_5, x_1, x_4, x_2. Solution optimale : $x^* = (0, 0, \frac{9}{2}, 0, 0)$ de coût 31.5. ◇

Question 2.3 : Résoudre le PL suivant avec l'algorithme de résolution décrit ci-dessus.

$$\begin{array}{llllllll} \max & 8\,x_1 & +25\,x_2 & +17\,x_3 & +7x_4 & +20x_5 & & \\ & 4\,x_1 & +10\,x_2 & +8\,x_3 & +2x_4 & +6x_5 & \leq & 14 \\ & 0 \leq x \leq 1 & & & & & & \end{array}$$

Correction :
Ordre décroissant des ratios : x_4, x_5, x_2, x_3, x_1. Solution optimale : $x^* = (0, \frac{3}{5}, 0, 1, 1)$ de coût 42. ◇

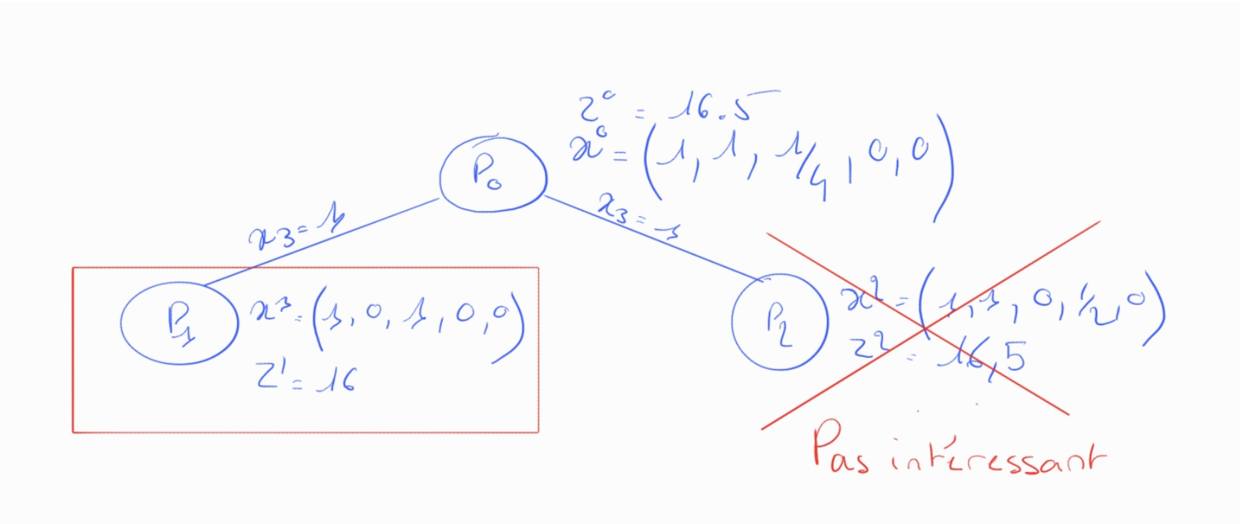
Question 2.4 : Résoudre le même PL lorsque x n'est plus compris entre 0 et 1 mais entre 0 et 2.
Correction :
Ordre décroissant des ratios : x_4, x_5, x_2, x_3, x_1. Solution optimale : $x^* = (0, 0, 0, 2, \frac{5}{3})$ de coût $47 + \frac{1}{3}$. ◇

Exercice 3 : Résolution d'un problème de sac-à-dos binaire

Résoudre à l'aide de l'algorithme de séparation et évaluation le problème d'optimisation linéaire en variables binaires suivant :

$$\begin{array}{llllllll} \max & 10\,x_1 & +5\,x_2 & +6\,x_3 & +3x_4 & +2x_5 & & \\ & 6\,x_1 & +3\,x_2 & +4\,x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq & 10 \\ & x_j \in \{0, 1\} \text{ pour } j = 1, \ldots, 5 & & & & & & \end{array}$$

Correction :
Ordre des variables $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5$



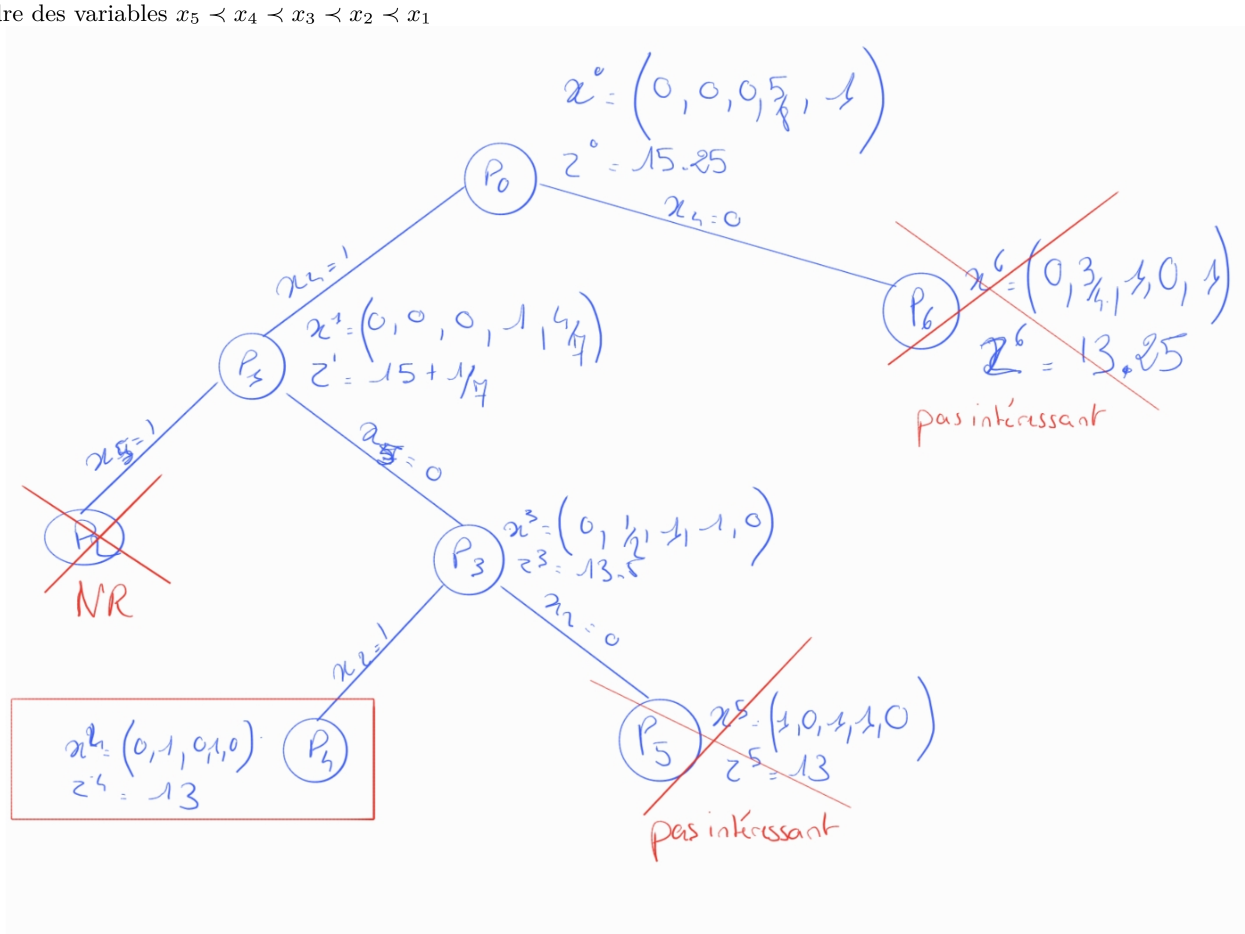
Solution optimale : $x^* = (1, 0, 1, 0, 0)$ de coût 16. ◇

Exercice 4 : Résolution d'un problème de sac-à-dos binaire

Résoudre à l'aide de l'algorithme de séparation et évaluation le problème d'optimisation linéaire en variables binaires suivant :

$$\begin{array}{lllllll} \max & x_1 & +3\,x_2 & +2\,x_3 & +10x_4 & +9x_5 & \\ & 2\,x_1 & +4\,x_2 & +2\,x_3 & +8x_4 & +7x_5 & \leq \quad 12 \\ & \multicolumn{6}{l}{x_j \in \{0, 1\} \text{ pour } j = 1, \dots, 5} \end{array}$$

Correction :
Ordre des variables $x_5 \prec x_4 \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1$



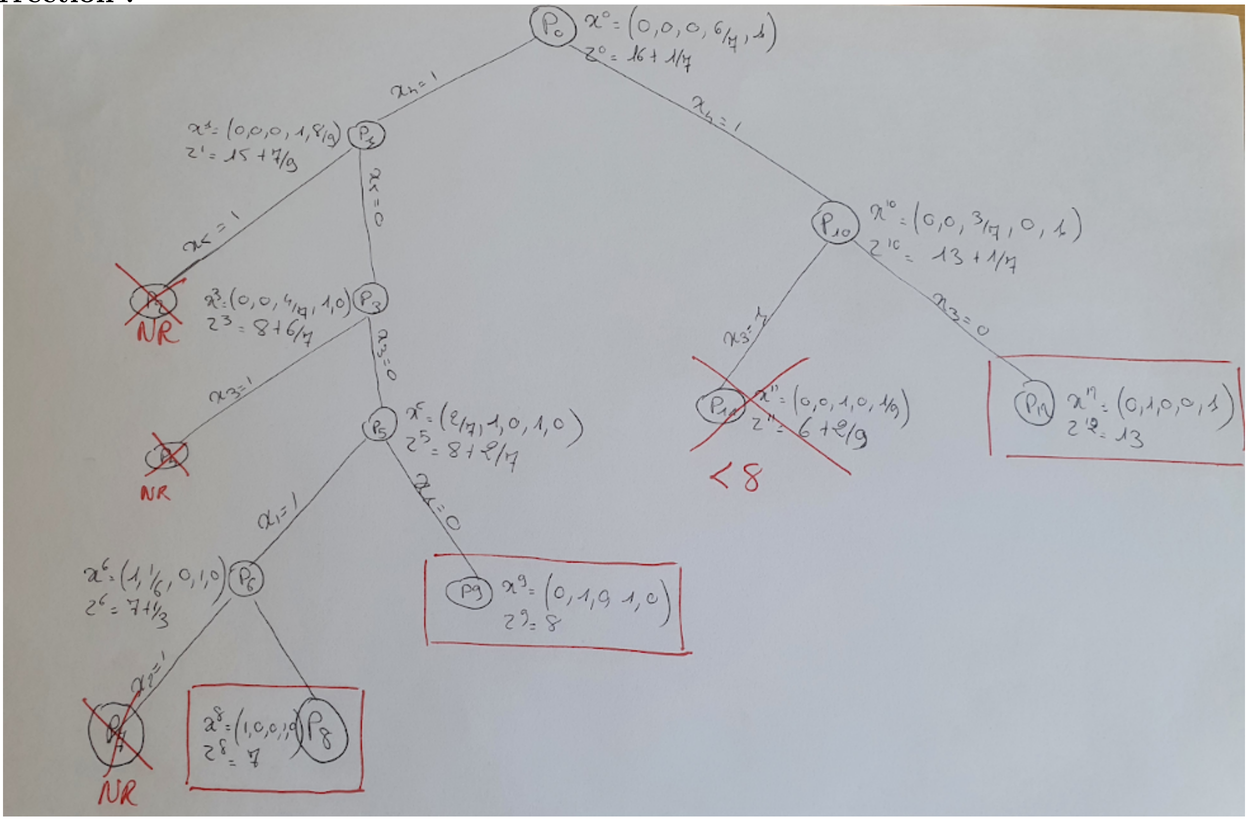
Solution optimale : $x^* = (0, 1, 0, 1, 0)$ de coût 13. ◇

Exercice 5 : Résolution d'un problème de sac-à-dos binaire

Résoudre à l'aide de l'algorithme de séparation et évaluation le problème d'optimisation linéaire en variables binaires suivant :

$$\begin{array}{lrrrrrll}
\max & x_1 & +2\,x_2 & +5\,x_3 & +6x_4 & +11x_5 & & \\
 & 7\,x_1 & +6\,x_2 & +14\,x_3 & +7x_4 & +9x_5 & \leq & 15 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_j \in \{0,1\} \text{ pour } j=1,\dots,5} & &
\end{array}$$

Correction :



Solution optimale : $x^* = (0,1,0,0,1)$ de coût 13. ◇

Exercice 6 : Résolution d'un problème de sac-à-dos binaire

Résoudre à l'aide de l'algorithme de séparation et évaluation le problème d'optimisation linéaire en variables binaires suivant, sachant que l'on sait déjà que $(1,1,0,0,0)$ est une solution du problème de coût 22.

$$\begin{array}{lrrrrrll}
\max & 12\,x_1 & +10\,x_2 & +6\,x_3 & +8x_4 & +6x_5 & & \\
 & 10\,x_1 & +12\,x_2 & +8\,x_3 & +12x_4 & +10x_5 & \leq & 29 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_j \in \{0,1\} \text{ pour } j=1,\dots,5} & &
\end{array}$$

Correction :

Solution optimale : $x^* = (1,0,1,0,1)$ de coût 24. ◇

Exercice 7 : Résolution d'un problème de sac-à-dos entier

Résoudre à l'aide de l'algorithme de séparation et évaluation le problème d'optimisation linéaire en variables entières suivant :

$$\begin{array}{lrrrll}
\max & 15\,x_1 & +22\,x_2 & +16\,x_3 & & \\
 & 3\,x_1 & +5\,x_2 & +4\,x_3 & \leq & 10 \\
 & \multicolumn{3}{l}{x_j \in \mathbb{N} \text{ pour } j=1,\dots,3} & &
\end{array}$$

Correction :

Solution optimale : $x^* = (2,0,1)$ de coût 46. ◇