Optimisation Linéaire - TD 1 (Corrigé)

Exercice 1 : Explosion de couleurs

Un peintre possède 80 litres de peinture rouge, 120 litres de peinture bleu et 100 litres de peinture jaune qu'il souhaite vendre. Il peut cependant mélanger ces trois couleurs pour en obtenir d'autres. Ainsi,

— en mélangeant du jaune et du bleu (en même quantité), il obtient du vert,
— en mélangeant du jaune et du rouge (en même quantité), il obtient de l'orange,
— en mélangeant du rouge et du bleu (en même quantité), il obtient du violet.

Le prix de vente de chaque litre de peinture est résumé dans le tableau suivant :

Rouge	Jaune	Bleu	Vert	Orange	Violet
10	20	8	35	40	50

Question 1.1 : Formuler le problème sous forme de problème linéaire.
Correction :
On note x_c la quantité de peinture de couleur c. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\max 10x_R + 20x_J + 8x_B + 35x_{Vert} + 40x_O + 50x_{Violet}\\
&x_R + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{2}x_{Violet} = 80 \qquad \text{(couleur rouge)}\\
&x_B + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_{Violet} = 120 \qquad \text{(couleur bleu)}\\
&x_J + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_O = 100 \qquad \text{(couleur jaune)}\\
&x_O, x_R, x_J, x_B, x_{Vert}, x_{Violet} \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Question 1.2 : Le peintre peut aussi acheter de la couleur bleu à un collègue (au plus 30 litres) pour un prix de 10 euros par litre. Modifier le problème en conséquence.
Correction :
On note x_{BA} la quantité en litres de peinture bleu achétée au collègue. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\max 10x_R + 20x_J + 8x_B + 35x_{Vert} + 40x_O + 50x_{Violet} - 10x_{BA}\\
&x_R + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{2}x_{Violet} = 80 \qquad \text{(couleur rouge)}\\
&x_B + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_{Violet} = 120 + x_{BA} \qquad \text{(couleur bleu)}\\
&x_J + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_O = 100 \qquad \text{(couleur jaune)}\\
&x_{BA} \leq 30\\
&x_O, x_R, x_J, x_B, x_{Vert}, x_{Violet}, x_{BA} \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Question 1.3 : Le peintre peut également créer du noir en mélangeant à part égales le rouge, le bleu et le jaune. De plus, comme cette couleur est très demandée, il souhaite que la moitié au minimum de sa "production" de couleurs soit du noir. Cette couleur se vend 25 euros par litre. Modifier le PL en conséquence.

Correction :

$$\begin{aligned}
&\max 10x_R + 20x_J + 8x_B + 35x_{Vert} + 40x_O + 50x_{Violet} - 10x_{BA} + 25x_N\\
&x_R + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N = 80 \qquad \text{(couleur rouge)}\\
&x_B + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N = 120 + x_{BA} \qquad \text{(couleur bleu)}\\
&x_J + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{3}x_N = 100 \qquad \text{(couleur jaune)}\\
&x_N \geq x_R + x_J + x_B + x_{Vert} + x_{Violet}\\
&x_O, x_R, x_J, x_B, x_{Vert}, x_{Violet}, x_{BA}, x_N \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Question 1.4 : Les couleurs rouge, bleu et jaune ne sont pas à la mode. Le peintre peut vendre au plus 20 litres de chacune de ces trois couleurs. Modifier le PL en conséquence.

Correction :
Attention, les variables correspondent aux quantités vendues. Il est donc possible qu'après la vente, il reste de la peinture rouge, bleu ou jaune qui ne puisse être vendue. Les égalités deviennent des inégalités.

$$\begin{aligned}
&\max 10x_R + 20x_J + 8x_B + 35x_{Vert} + 40x_O + 50x_{Violet} + 25x_N - 10x_{BA}\\
&x_R + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N \leq 80 \qquad \text{(couleur rouge)}\\
&x_B + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N \leq 120 + x_{BA} \qquad \text{(couleur bleu)}\\
&x_J + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{3}x_N \leq 100 \qquad \text{(couleur jaune)}\\
&x_N \geq x_R + x_J + x_B + x_{Vert} + x_{Violet}\\
&x_{BA} \leq 30\\
&x_R, x_B, x_J \leq 20\\
&x_O, x_R, x_J, x_B, x_{Vert}, x_{Violet}, x_N, x_{BA} \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Question 1.5 : Le peintre se rend compte qu'il a déjà une commande de 40 litres de vert. Comme il s'est déjà engagé, il devra payer 5 euros par litre non livré. Modifier le PL en conséquence.

Correction :
Il faut déterminer la quantité de peinture verte qui n'est pas livrée. On note y_V cette quantité. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\max 10x_R + 20x_J + 8x_B + 35x_{Vert} + 40x_O + 50x_{Violet} + 25x_N - 10x_{BA} - 5y_V\\
&x_R + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N \leq 80 \qquad \text{(couleur rouge)}\\
&x_B + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_{Violet} + \frac{1}{3}x_N \leq 120 + x_{BA} \qquad \text{(couleur bleu)}\\
&x_J + \frac{1}{2}x_{Vert} + \frac{1}{2}x_O + \frac{1}{3}x_N \leq 100 \qquad \text{(couleur jaune)}\\
&x_N \geq x_R + x_J + x_B + x_{Vert} + x_{Violet}\\
&x_{BA} \leq 30\\
&x_R, x_B, x_J \leq 20\\
&x_{Vert} + y_V \geq 40\\
&x_O, x_R, x_J, x_B, x_{Vert}, x_{Violet}, x_N, x_{BA}, y_V \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Exercice 2 : Résolution graphique

Question 2.1 : Résoudre graphiquement le problème linéaire. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned}
&\max 2x + 3y \\
&x + 3y \leq 6 \\
&x \geq y \\
&x \geq 0 \\
&y \geq -2
\end{aligned}$$

Correction :
Dessiner les contraintes dans le plan. On obtient comme solution optimale $(12, -2)$. Le coût est 18. ◇

Question 2.2 : Quels sont les sommets du domaine réalisable ? Quelles inégalités vérifient-ils à l'égalité ?
Correction :
Sommets du domaine réalisable :
— $(1.5, 1.5)$ vérifiant $x + 3y \leq 6$ et $x \geq y$ à l'égalité,
— $(0, 0)$ vérifiant $x \geq y$ et $x \geq 0$ à l'égalité,
— $(0, -2)$ vérifiant $x \geq 0$ et $y \geq -2$ à l'égalité,
— $(12, -2)$ vérifiant $y \geq -2$ et $x + 3y \leq 6$ à l'égalité. ◇

Question 2.3 : Quelle est la solution optimale si, dans le problème précédent, l'objectif est maintenant $\min 2x + 3y$?
Correction :
Le domaine de réalisabilité est le même. La solution optimale est $(0, -2)$, de coût -6. ◇

Exercice 3 : Inégalités d'un domaine réalisable

Supposons que l'on a un problème linéaire contenant deux variables (x et y) et dont le domaine réalisable est donné par la figure 1. Donner les contraintes du problème linéaire associé.

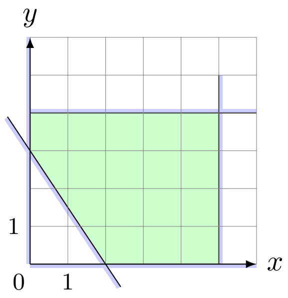

Figure 1 – Domaine réalisable

Correction :
Les inégalités sont :

$$\begin{aligned}
&3x + 2y \geq 6 \\
&x \leq 5 \\
&y \leq 4 \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0
\end{aligned}$$

Pour la contrainte $3x + 2y \geq 6$, expliquer que l'on cherche la droite d'équation $y = ax + b$, avec a et b tels que les points $(0, 3)$ et $(2, 0)$ satisfont cette équation. ◇

Exercice 4 : Exemples de problèmes linéaires

Donner un exemple de problème linéaire (au plus deux variables) pour chacun des cas suivants :

1. problème linéaire avec une solution,
2. problème linéaire sans solution,
3. problème linéaire avec une infinité de solutions,
4. problème linéaire avec une solution optimale,
5. problème linéaire avec une infinité de solutions optimales,
6. problème linéaire avec au moins une solution mais pas de solution optimale,
7. problème linéaire avec exactement deux solutions.

Correction :

1. Problème linéaire avec une solution : $\max\{x : x = 1\}$
2. problème linéaire sans solution : $\max\{x : x \leq 2, x \geq 3\}$
3. problème linéaire avec une infinité de solutions : $\max\{x : 0 \leq x \leq 1\}$
4. problème linéaire avec une solution optimale : $\max\{x : 0 \leq x \leq 1\}$
5. problème linéaire avec une infinité de solutions optimales : $\max\{x + y : x + y = 1, x, y \geq 0\}$ et $\max\{0x : 0 \leq x \leq 1\}$
6. problème linéaire avec au moins une solution mais pas de solution optimale : problème non borné $\max\{x : x \geq 0\}$
7. problème linéaire avec exactement deux solutions : impossible. Si l'on a deux solutions (distinctes) alors tous les points du segments reliant ces deux points est une solution. Un problème linéaire a donc 0, 1 ou une infinité de solutions.

◇

Exercice 5 : Détermination des surfaces de cultures

Un fermier souhaite optimiser le revenu de ses terres agricoles, d'une surface totale de 100 acres. Pour cela, il dispose de 1100 € d'investissement et l'équivalent de 160 jours de main d'œuvre. Vous disposez de l'ensemble des informations suivantes :

— Coût de travail et d'ensemencement $\begin{cases} 20 \text{ €} & \text{par acre de blé,} \\ 10 \text{ €} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

— Revenus $\begin{cases} 120 \text{ €} & \text{par acre de blé,} \\ 40 \text{ €} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

— Temps de main d'oeuvre $\begin{cases} 4 \text{ jours} & \text{par acre de blé,} \\ 1 \text{ jour} & \text{par acre de pommes de terre.} \end{cases}$

Question 5.1 : Modéliser le problème sous forme de problème linéaire.

Correction :

Notons x_B et x_P les surfaces de blé et de pommes de terres cultivées. On obtient alors le problème linéaire suivant.

$$\begin{aligned} &\max 120x_B + 40x_P \\ &20x_B + 10x_P \leq 1100 \\ &4x_B + x_P \leq 160 \\ &x_B + x_P \leq 100 \\ &x_B \geq 0 \\ &x_P \geq 0 \end{aligned}$$

◇

Question 5.2 : Quelles surfaces de blé et de pommes de terre faut-il cultiver pour obtenir un revenu maximum ? Quel est le profit généré ?

Correction :
Dessiner les contraintes et résoudre graphiquement. On obtient que la solution optimale est celle vérifiant le système

$$20x_B + 10x_P = 1100$$
$$4x_B + x_P = 160$$

On obtient comme solution optimale $(25, 60)$, donc il faut cultiver 25 acres de blé et 60 acres de pommes de terre (15 acres en friche). Le coût est donc de 5400 €, donc un profit de 5400 - 1100 = 4300 euros. $\diamond$

Exercice 6 : Résolution graphique

Question 6.1 : Résoudre graphiquement le problème linéaire. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned}
&\min x \\
&-x + y \leq -1 \\
&x + y \geq 3 \\
&y \leq 2 \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0
\end{aligned}$$

Correction :
Le domaine n'est pas borné. Cependant, on a une solution optimale $(2, 1)$ de coût 2. $\diamond$

Question 6.2 : Que se passe-t-il si l'objectif du PL précédent est maintenant $\max 2x + y$?
Correction :
Pour maximiser cette fonction objective, on part dans la direction non bornée. La valeur de la fonction objective tend vers l'infini. $\diamond$

Exercice 7 : Résolution graphique

Résoudre graphiquement le problème linéaire suivant. Quelle est la solution optimale ? Le coût de cette solution ?

$$\begin{aligned}
&\max 2x + 2y + z \\
&x + 2z \leq 2 \\
&4x + y \geq 4 \\
&y - z = 2 \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0 \\
&z \geq 0
\end{aligned}$$

Correction :
Bien que l'on ait 3 variables, on peut se ramener au cas de deux variables grâce à l'égalité. En posant $z = y - 2$, le problème devient :

$$\begin{aligned}
&\max 2x + 3y - 2 \\
&x + 2y \leq 6 \\
&4x + y \geq 4 \\
&y \geq 2 \qquad \text{(inégalité associée à } z \geq 0\text{)} \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0
\end{aligned}$$

Le problème peut être résolu graphiquement. On obtient comme solution optimale la solution vérifiant :

$$x + 2y = 6$$
$$4x + y = 4$$

C'est la solution $(2/7, 20/7)$, ce qui donne (en prenant en compte z), $(2/7, 20/7, 6/7)$. ◇

Exercice 8 : Régime alimentaire bovin

Un éleveur possède deux vaches de race charolaise et 5 vaches de race aveyronnaise. Pour nourrir son cheptel, il doit acheter un mélange de différentes céréales. Son objectif est d'acheter ces différentes céréales au coût minimum tout en s'assurant que chaque vache soit nourrie correctement. En effet, une vache charolaise a besoin de 40 mg de vitamine A, 50 mg de vitamine B et 100 mg de vitamine C par jour, alors qu'une vache aveyronnaise nécessite 70 mg de vitamine A, 60 mg de vitamine B et 30 mg de vitamine C. Il peut nourrir chaque vache avec différentes céréales : blé (5€ le kilogramme), maïs (4€ le kilogramme) et orge (7€ le kilogramme). Les teneurs en vitamines de ces différentes céréales sont données dans le tableau suivant :

	Vitamine A	Vitamine B	Vitamine C
Blé	30 mg/kg	25 mg/kg	40 mg/kg
Maïs	10 mg/kg	15 mg/kg	20 mg/kg
Orge	50 mg/kg	45 mg/kg	35 mg/kg

Question 8.1 : L'éleveur souhaite connaître les quantités des différentes céréales à acheter pour nourrir son troupeau au mois de mai. Modéliser son problème sous forme de PL.

Correction :

Choix des variables : x_C^V représente la quantité (en kilogrammes) de céréales C (B pour blé, M pour maïs, O pour orge) achetée pour nourrir les vaches de race V (C pour charolaise, A pour aveyronnaise) pour 31 jours.

$$\begin{array}{ll}
\min & 5x_B^C + 5x_B^A + 4x_M^C + 4x_M^A + 7x_O^C + 7x_O^A \\
& 30x_B^C + 10x_M^C + 50x_O^C \geq 40 * 2 * 31 \\
& 30x_B^A + 10x_M^A + 50x_O^A \geq 70 * 5 * 31 \\
& 25x_B^C + 15x_M^C + 45x_O^C \geq 50 * 2 * 31 \\
& 25x_B^A + 15x_M^A + 45x_O^A \geq 60 * 5 * 31 \\
& 40x_B^C + 20x_M^C + 35x_O^C \geq 100 * 2 * 31 \\
& 40x_B^A + 20x_M^A + 35x_O^A \geq 30 * 5 * 31 \\
& x \geq 0
\end{array}$$

◇

Question 8.2 : Suite à un problème d'approvisionnement, l'éleveur ne peut pas acheter plus de 10 kilogrammes de blé. Par ailleurs, pour des questions de santé, le maïs ne peut représenter plus du quart de la consommation de céréales d'une vache charolaise. Modifier le PL en conséquence.

Correction :

On rajoute les contraintes suivantes :

$$x_B^C + x_B^A \leq 10$$
$$3x_M^C \leq x_B^C + x_O^C$$

◇

Exercice 9 : Production d'électricité

Une entreprise d'électricité doit fournir de l'électricité pour les villes de Villetaneuse, Épinay et Saint-Denis. La puissance nécessaire d'électricité pour chaque ville est respectivement de 3000, 6000 et 5000 GW. Pour produire cette électricité, l'entreprise dispose de trois centrales électriques C1, C2 et C3. Le coût de production et d'acheminement de l'électricité en fonction des villes et des centrales (en € par GW) est récapitulée dans le tableau suivant.

	Villetaneuse	Épinay	Saint-Denis
C1	80	100	120
C2	20	30	40
C3	40	60	80

De plus, chaque centrale possède une puissance limitée. Cette limite est respectivement de 9000, 6000 et 7000 GW. L'entreprise souhaite déterminer la production d'électricité par centrale ainsi que la répartition de la production en fonction des trois villes de telle manière que le coût soit minimal. Formuler ce problème comme un problème linéaire.

Correction :
On pose x_{ij} la puissance acheminée de la centrale C_i à la ville j. On a alors le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\min 80x_{11} + 100x_{12} + 120x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 40x_{23} + 40x_{31} + 60x_{32} + 80x_{33} \\
&x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 9000 \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 6000 \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 7000 \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 3000 \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6000 \\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 5000 \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Présenter la formulation plus générale. On note c_{ij} le coût de C_i à V_j, d_j la demande de chaque ville, et p_i la puissance maximum de chaque centrale. On obtient le problème linéaire :

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq p_i \quad \forall\ i = 1,2,3 \\
&\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq d_j \quad \forall\ j = 1,2,3 \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Exercice 10 : Mise sous forme canonique

Question 10.1 : Mettre les problèmes linéaires suivants sous forme canonique.

Problème 1 :

$$\begin{aligned}
&\max 3\,x_1 - \ x_2 + 2\,x_3 \\
&5\,x_1 + \ x_2 + \ x_3 \geq 5 \\
&3\,x_1 - 4\,x_2 = 4 \\
&2\,x_1 - \ x_3 \leq 10 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Correction :
On obtient :

$$\begin{aligned}
&\max 3\,x_1 - \ x_2^+ + \ x_2^- - 2\,x_3' \\
&-5\,x_1 - \ x_2^+ + \ x_2^- + \ x_3' \leq -5 \\
&3\,x_1 - 4\,x_2^+ + 4\,x_2^- \leq 4 \\
&-3\,x_1 + 4\,x_2^+ - 4\,x_2^- \leq -4 \\
&2\,x_1 + \ x_3' \leq 10 \\
&x_1,\, x_2^+,\, x_2^-,\, x_3' \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Problème 2 :

$$\begin{aligned}
&\min\ x_1 - x_2\\
&x_1 + 2\,x_2 \le 5\\
&x_1 + 5\,x_2 = 10\\
&x_2 \ge -3\\
&x_1 \ge 0
\end{aligned}$$

Correction :

$$\begin{aligned}
&\max -x_1 + x_2^+ - x_2^-\\
&x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \le 5\\
&x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \le 10\\
&-x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- \le -10\\
&-x_2^+ + x_2^- \le 3\\
&x_1, x_2^+, x_2^- \ge 0
\end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi poser $x_2' = x_2 + 3$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\max -3 - x_1 + x_2'\\
&x_1 + 2x_2' \le 11\\
&x_1 + 5x_2' \le 25\\
&-x_1 - 5x_2' \le -25\\
&x_1, x_2' \ge 0
\end{aligned}$$

◇

Question 10.2 : Un problème linéaire sous forme canonique peut être écrit sous forme matricielle, c'est-à-dire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\max c^T x\\
&Ax \le b\\
&x \ge 0
\end{aligned}$$

où :
- c et x sont des vecteurs de $\mathbb{Q}^n$,
- b est un vecteur de $\mathbb{Q}^m$,
- $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ est une matrice de m lignes et n colonnes de nombres rationnels.

Écrire les formes canoniques des deux problèmes sous forme matricielle.

Correction :

Problème 1 :

$$\max \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3' \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3' \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problème 2 :

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

◇

Question 10.3 : Écrire sous forme matricielle les problèmes linéaires sous forme standard.

Correction :

Les deux problèmes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Problème 1 :

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Problème 2 :

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

◇

Exercice 11 : Dictionnaire optimal, variable entrante et variable sortante

Pour chacun des dictionnaires suivants, donner la solution associée. Indiquer s'il est réalisable. Si c'est le cas, indiquer s'il est optimal. Dans le cas contraire, déterminer la variable entrante. Indiquer si le problème est non borné ou donner la variable sortante associée. On utilisera la règle de choix donnée en cours dans le cas de plusieurs variables entrantes ou sortantes possibles.

Remarque : Un dictionnaire est dit *réalisable* si la solution associée vérifie les contraintes.

Problème 1 :

$$\begin{array}{rrrr} \max & 263 & -78\,x_3 & -\,x_5 \\ x_1 = & 500 & +20\,x_3 & -10\,x_5 \\ x_2 = & -30 & +4\,x_3 & +10\,x_5 \\ x_4 = & 1200 & -2\,x_3 & +\,x_5 \\ x \geq 0 & & & \end{array}$$

Correction :

Dictionnaire non réalisable. La solution associée $(500, -30, 0, 1200, 0)$ ne vérifie pas $x_2 \geq 0$. ◇

Problème 2 :

$$\begin{array}{rrrr} \max & 187 & -5\,x_3 & +3\,x_5 \\ x_1 = & 500 & +20\,x_3 & -10\,x_5 \\ x_2 = & 800 & +40\,x_3 & -20\,x_5 \\ x_4 = & 1200 & -2\,x_3 & +100\,x_5 \\ x \geq 0 & & & \end{array}$$

Correction :
La solution associée est $(500, 800, 0, 1200, 0)$. Dictionnaire non optimal. La variable x_5 entre en base et la variable x_2 sort. ◇

Problème 3 :

$$\begin{array}{rrrr}
\max & 300 & +100\,x_2 & -\,x_4 \\
x_1 = & 20 & +20\,x_2 & -10\,x_4 \\
x_3 = & 60 & & -20\,x_4 \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Correction :
La solution associée est $(20, 0, 60, 0)$. Dictionnaire non optimal. La variable x_2 entre en base et le PL est non borné. ◇

Problème 4 :

$$\begin{array}{rrrr}
\max & 50 & -\,x_2 & -2\,x_1 \\
x_4 = & 17 & +20\,x_2 & -10\,x_1 \\
x_3 = & \frac{3}{2} & & -20\,x_1 \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Correction :
La solution associée est $(0, 0, \frac{3}{2}, 17)$ Le dictionnaire est optimal. ◇

Problème 5 :

$$\begin{array}{rrrr}
\max & 190 & +\,x_2 & +3\,x_3 \\
x_1 = & 20 & -20\,x_2 & -10\,x_3 \\
x_5 = & 12 & +40\,x_2 & -2\,x_3 \\
x_4 = & 1 & -\,x_2 & \\
x \geq 0 & & &
\end{array}$$

Correction :
La solution associée est $(20, 0, 0, 1, 12)$. Dictionnaire non optimal. La variable x_2 entre en base et la variable x_1 sort. ◇

Exercice 12 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{array}{l}
\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 14\,x_4 \\
2\,x_1 + \,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \leq 7 \\
x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0
\end{array}$$

Correction :
Mise sous forme standard :

$$\begin{array}{l}
\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 14\,x_4 \\
2\,x_1 + \,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 = 7 \\
x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Dictionnaire associé à la variable d'écart :

$$\begin{array}{l}
\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 14\,x_4 \\
x_5 = 7 - 2\,x_1 - \,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4 \\
x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

x_1 entre en base, x_5 sort. Nouveau dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max \frac{21}{2} + \frac{3}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 + 8\,x_4 - \frac{3}{2}\,x_5\\
&x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{3}{2}\,x_3 - 2\,x_4 - \frac{1}{2}\,x_5\\
&x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

x_2 entre en base, x_1 sort. Nouveau dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max 21 - 3\,x_1 - 5\,x_3 + 2\,x_4 - 3\,x_5\\
&x_2 = 7 - 2\,x_1 - 3\,x_3 - 4\,x_4 - \,x_5\\
&x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

x_4 entre en base, x_1 sort. Nouveau dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max \frac{49}{2} - 4\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{13}{2}\,x_3 - \frac{7}{2}\,x_5\\
&x_4 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{4}\,x_2 - \frac{3}{4}\,x_3 - \frac{1}{4}\,x_5\\
&x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

◇

Exercice 13 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}
&\max 3\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3\\
&x_1 + \,x_2 + 2\,x_3 \leq 4\\
&2\,x_1 \qquad + \;3\,x_3 \leq 5\\
&2\,x_1 + \,x_2 + 3\,x_3 \leq 7\\
&x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Correction :

Mise sous forme standard :

$$\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 3x_2 + 4x_3\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4\\
&2x_1 + \quad + 3x_3 + x_5 = 5\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Premier dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 3x_2 + 4x_3\\
&x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3\\
&x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3\\
&x_6 = 7 - 2x_1 - x_2 - 3x_3\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

La variable x_1 entre en base, x_5 sort de base. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\max 7.5 + 3x_2 - 0.5x_3 - 1.5x_5\\
&x_4 = 1.5 - x_2 - 0.5x_3 + 0.5x_5\\
&x_1 = 2.5 - 1.5x_3 - 0.5x_5\\
&x_6 = 2 - x_2 + x_5\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

La variable x_2 entre en base. La variable x_4 sort de base. Dictionnaire associé :

$$\begin{aligned}
&\max 12 - 2x_3 - 3x_4\\
&x_2 = 1.5 - 0.5x_3 - x_4 + 0.5x_5\\
&x_1 = 2.5 - 1.5x_3 - 0.5x_5\\
&x_6 = 0.5 + 0.5x_3 + x_4 + 0.5x_5\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Solution optimale : $(2.5, 1.5, 0, 0, 0, 0.5)$. ◇

Exercice 14 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}
&\max 5\,x_1 + 6\,x_2 + 9\,x_3 + 8\,x_4\\
&x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \quad x_4 \leq 5\\
&x_1 + \quad x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 \leq 3\\
&x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Correction :
Premier dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4\\
&x_5 = 5 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4\\
&x_6 = 3 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

La variable x_1 entre en base, x_6 sort. Dictionnaire associé :

$$\begin{aligned}
&\max 15 + x_2 - x_3 - 7x_4 - 5x_6\\
&x_5 = 2 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6\\
&x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_6\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

x_2 entre en base, x_5 sort. Dictionnaire associé :

$$\begin{aligned}
&\max 17 - 2x_3 - 5x_4 - x_5 - 4x_6\\
&x_2 = 2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6\\
&x_1 = 1 - x_3 - 5x_4 + x_5 - 2x_6\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Solution optimale : $(1, 2, 0, 0, 0, 0)$. ◇

Exercice 15 : Algorithme du simplexe

Résoudre le problème linéaire suivant à l'aide de la méthode du simplexe.

$$\begin{aligned}
&\max -2\,x_1 + 3\,x_2 - \, x_3\\
&2\,x_1 + 2\,x_2 - \, x_3 \leq 6\\
&3\,x_1 - 2\,x_2 + \, x_3 \leq 10\\
&\;x_1 - 3\,x_2 + \, x_3 \leq 3\\
&x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Correction :
Dictionnaire :

$$\begin{aligned}
&\max -2x_1 + 3x_2 - x_3\\
&x_4 = 6 - 2x_1 - 2x_2 + x_3\\
&x_5 = 10 - 3x_1 + 2x_2 - x_3\\
&x_6 = 3 - x_1 + 3x_2 - x_3\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

x_2 entre en base, x_4 en sort. Dictionnaire associé :

$$\begin{aligned}
&\max 9 - 5x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4\\
&x_2 = 3 - x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\\
&x_5 = 16 - 5x_1 - x_4\\
&x_6 = 12 - 4x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4\\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

x_3 entre en base. Les contraintes de non négativité impliquent $x_3 \geq -6$ et $x_3 \geq -24$. Problème non borné ! Effectivement, tout point du type $(0, 3 + \frac{k}{2}, k)$, $k \geq 0$ est solution du problème (par exemple). ◇