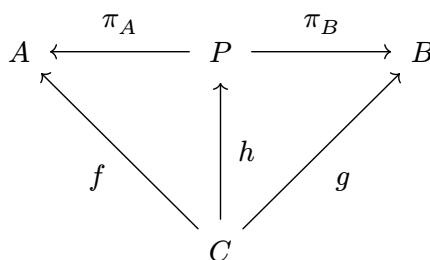


Notes du Séminaire de Catégories 20/10/2025

1 Produit

Définition 1.1 (Produit). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$, on dit que A et B admettent **un** produit s'il existe un objet P et deux morphismes $\pi_A : P \rightarrow A$ et $\pi_B : P \rightarrow B$ tel que : pour tout objet C et pour toute paire de morphismes $f : C \rightarrow A$ et $g : C \rightarrow B$, il existe un **unique** morphisme $h : C \rightarrow P$ tel que le diagramme suivant commute



On appelle alors π_A et π_B des projections. On note souvent $h := \langle f, g \rangle$.

⚠ Attention

Un produit est avant tout une paire de morphismes π_A et π_B . Un produit de A et B **n'est pas** un objet, c'est une paire de morphismes.

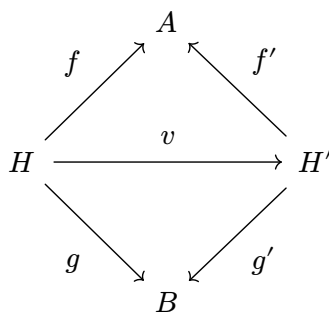
Proposition 1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$ tel que (P, π_A, π_B) et (P', π'_A, π'_B) soient deux produits de A et B . Alors, P et P' sont isomorphes.

Preuve. Exercice. □

Cette proposition n'est pas très satisfaisante car elle exprime une propriété sur les objets P et P' au lieu d'une propriété sur les produits (P, π_A, π_B) et (P', π'_A, π'_B) . Un théorème d'unicité du produit devrait avoir pour énoncé $(P, \pi_A, \pi_B) \simeq (P', \pi'_A, \pi'_B)$. Pour rendre cela formel, il faudrait pouvoir voir les triplets $(H, f : H \rightarrow A, g : H \rightarrow B)$ comme des objets d'une catégorie, on pourrait alors énoncer l'isomorphisme voulu.

Définition 1.3 (Catégorie Proj). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie **Proj**_{AB} comme suit :

- **Objets** : les triplet $(H, f : H \rightarrow A, g : H \rightarrow B)$.
- **Morphismes** : un morphisme $v : (H, f : H \rightarrow A, g : H \rightarrow B) \rightarrow (H', f' : H' \rightarrow A, g' : H' \rightarrow B)$ est un morphisme $v : H \rightarrow H'$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme suivante commute.



Ce nouveau point de vue simplifie beaucoup les choses, on a l'équivalence suivante :

Proposition 1.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. (P, π_A, π_B) est un produit de A et B si et seulement si (P, π_A, π_B) est un objet terminal de la catégorie $\mathbf{Proj}_{AB}$.

Preuve. Exercice. □

Théorème 1.5 (Unicité du produit). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. Si A et B admettent un produit alors il est unique à unique isomorphisme près. Concrètement, cela signifie qu'il existe un unique isomorphisme dans $\mathbf{Proj}_{AB}$ entre deux produits.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.4 et de l'unicité de l'objet terminal. Exercice. □

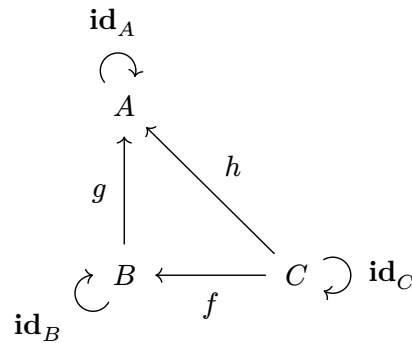
2 Catégorie Opposée

La notion de dualité est très importante en théorie des catégories.

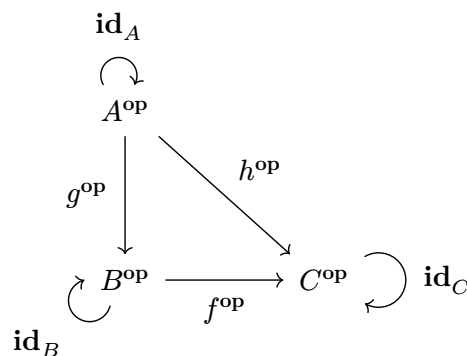
Définition 2.1 (Catégorie opposée). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, la catégorie opposée de $\mathcal{C}$ notée $\mathcal{C}^{\text{op}}$ est la catégorie définie comme suit :

- Objets : pour tout objet $A \in \mathcal{C}$, A^{op} est un objet de $\mathcal{C}^{\text{op}}$.
- Morphismes : pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, on définit $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$. La composition est donnée par $g^{\text{op}}; f^{\text{op}} = (f; g)^{\text{op}}$.

Exemple. La catégorie opposée de cette catégorie

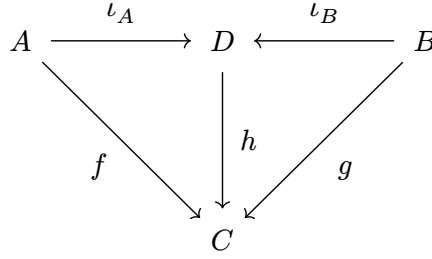


est la catégorie :



3 Coproduit

Définition 3.1 (Coproduit). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$, on dit que A et B admettent **un** coproduit s'il existe un objet D et deux morphismes $\iota_A : D \rightarrow A$ et $\iota_B : D \rightarrow B$ tel que : pour tout objet C et pour toute paire de morphismes $f : A \rightarrow C$ et $g : B \rightarrow C$, il existe un **unique** morphisme $h : D \rightarrow C$ tel que le diagramme suivant commute



On appelle alors ι_A et ι_B des injections. On note souvent $h := [f, g]$.

⚠ Attention

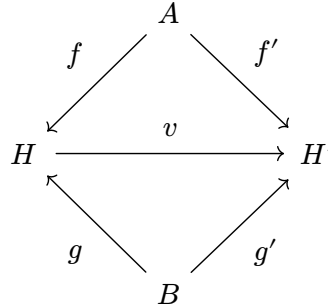
Un produit est avant tout une paire de morphismes ι_A et ι_B . Un coproduit de A et B n'est pas un objet, c'est une paire de morphismes.

Proposition 3.2 (Dualité Produit Coproduit). (D, ι_A, ι_B) est un coproduit de A et B si et seulement si $(D^{\text{op}}, \iota_A^{\text{op}}, \iota_B^{\text{op}})$ est un produit de A^{op} et B^{op} dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Preuve. Il suffit de remarquer que le diagramme de la définition du coproduit est l'opposé de celui du produit. $\square$

Définition 3.3 (Catégorie Inj). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. On définit la catégorie $\mathbf{Inj}_{AB}$ comme suit :

- Objets : les triplet $(H, f : A \rightarrow H, g : B \rightarrow H)$.
- Morphismes : un morphisme $v : (H, f : A \rightarrow H, g : B \rightarrow H) \rightarrow (H', f' : A \rightarrow H', g' : B \rightarrow H')$ est un morphisme $v : H \rightarrow H'$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme suivante commute.



Proposition 3.4. La catégorie $\mathbf{Inj}_{A,B}$ est exactement la catégorie $\mathbf{Proj}_{A^{\text{op}}B^{\text{op}}}$.

Preuve. Il suffit d'écrire les définitions. $\square$

Proposition 3.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. (D, ι_A, ι_B) est un coproduit de A et B si et seulement si (D, ι_A, ι_B) est un objet initial de la catégorie $\mathbf{Inj}_{AB}$.

Preuve. On pourrait faire la preuve à la main, on choisit ici de la faire en utilisant la dualité. (D, ι_A, ι_B) est un coproduit de A et B si et seulement si $(D^{\text{op}}, \iota_A^{\text{op}}, \iota_B^{\text{op}})$ est un produit de A^{op} et B^{op} . $(D^{\text{op}}, \iota_A^{\text{op}}, \iota_B^{\text{op}})$ est un produit de A^{op} et B^{op} si et seulement si c'est un objet terminal dans $\mathbf{Proj}_{A^{\text{op}}B^{\text{op}}}$. Un objet est terminal dans $\mathbf{Proj}_{A^{\text{op}}B^{\text{op}}}$ si et seulement si il est initial dans $\mathbf{Inj}_{A,B}$ (exercice). $\square$

Corollaire 3.5.1 (Unicité du Coproduit). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B deux objets de $\mathcal{C}$. Si A et B admettent un coproduit alors il est unique à unique isomorphisme près.

Preuve. En appliquant le théorème 1.5 à la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$ on obtient le résultat voulu. $\square$