

Notes du Séminaire de Catégories 17/11/2025

1 Catégories de Foncteurs

Définition 1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, alors pour tout $A \in \mathcal{C}$ l'opération $\text{Hom}(A, -)$ associant à un objet $B \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\text{Hom}(A, B)$ et associant à un morphisme $f : B \rightarrow B'$ la fonction $\text{Hom}(A, f) : h \in \text{Hom}(A, B) \mapsto h; f \in \text{Hom}(A, B')$ définit un foncteur $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Définition 1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, alors pour tout $A \in \mathcal{C}$ l'opération $\text{Hom}(-, A)$ associant à un objet $B \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\text{Hom}(B, A)$ et associant à un morphisme $f : B \rightarrow B'$ la fonction $\text{Hom}(f, A) : h \in \text{Hom}(B', A) \mapsto f; h \in \text{Hom}(B, A)$ définit un foncteur $\text{Hom}(-, A) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Définition 1.3 (Catégorie des préfaisceaux). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on définit $\hat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathcal{C}$. Ses objets sont les foncteurs contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathbf{Set}$ et ses morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Exercice. Vérifier les détails des définitions précédentes.

Proposition 1.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, sa catégorie de préfaisceaux $\hat{\mathcal{C}}$ est bicartésienne close (cartésienne + cocartésienne + cartésienne close).

Preuve. Montrons que $\hat{\mathcal{C}}$ est cartésienne. Soit $1_{\hat{\mathcal{C}}} : A \in \mathcal{C} \mapsto 1_{\mathbf{Set}}$ le foncteur constant. C'est un préfaisceau, montrons qu'il est terminal. Soit $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un préfaisceau, on vérifie facilement que la transformation naturelle définie par $!_A : F(A) \rightarrow 1_{\mathbf{Set}}$ est l'unique transformation naturelle de F vers $1_{\hat{\mathcal{C}}}$. $1_{\hat{\mathcal{C}}}$ est donc un objet terminal. Soit F et G deux préfaisceaux, on définit leur produit « point par point » : $F \times G : A \mapsto F(A) \times G(A)$ et $F \times G : f \mapsto F(f) \times G(f)$. Les projections sont données de la même manière $(\pi_1^{F,G})_A := \pi_1^{F(A),G(A)} : F(A) \times G(A) \rightarrow F(A)$.

La preuve que $\hat{\mathcal{C}}$ est cocartésienne est cartésienne close et laissée en exercice. $\square$

Définition 1.5 (Foncteur de Yoneda). Le foncteur de Yoneda $\mathbf{y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ est défini par :

- Objets : soit $A \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y}(A) := \text{Hom}(-, A)$.
- Morphisme : soit $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$, $\mathbf{y}(f) : \text{Hom}(-, A) \rightarrow \text{Hom}(-, B)$ est la transformation naturelle définie par $\mathbf{y}(f)_Z : h \in \text{Hom}(Z, A) \mapsto h; f \in \text{Hom}(Z, B)$.

Théorème 1.6 (Lemme de Yoneda). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, alors pour tout $A \in \mathcal{C}$ et $F \in \hat{\mathcal{C}}$, il existe une bijection

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), F) \simeq F(A)$$

cette bijection est naturelle en A et F . C'est à dire que les diagrammes suivants commutent : Pour tout $h : A \rightarrow A' \in \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), F) & \xrightarrow{\simeq} & F(A) \\ \uparrow & & \uparrow F(h) \\ \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(h), F) & & \\ \uparrow & & \\ \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A'), F) & \xrightarrow{\simeq} & F(A') \end{array}$$

Pour toute morphisme (transformation naturelle) $\eta : F \rightarrow G \in \hat{\mathcal{C}}$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), F) & \xrightarrow{\simeq} & F(A) \\
\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), \eta) \downarrow & & \downarrow \eta_A \\
\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), G) & \xrightarrow{\simeq} & G(A)
\end{array}$$

Autrement dit, cette bijection définit un isomorphisme naturelle entre les foncteurs $\mathrm{Hom}(\mathbf{y}(-), F)$ et F de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ vers **Set** et les foncteurs $\mathrm{Hom}(\mathbf{y}(A), -)$ et $-(A)$ de $\hat{\mathcal{C}}$ vers **Set**.

Corollaire 1.6.1. *Le foncteur de Yoneda $\mathbf{y} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ est plein et fidèle.*

Preuve. Exercice. □

Corollaire 1.6.2 (Principe de Yoneda). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, alors pour tout $A, B \in \mathcal{C}$,*

$$A \simeq B \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$$

Lemme 1.7. *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur plein et fidèle, alors pour tout $A, B \in \mathcal{C}$,*

$$A \simeq B \Leftrightarrow F(A) \simeq F(B)$$

Preuve. Exercice. □

Preuve. La preuve du Corollaire 1.6.2 s'obtient en appliquant le lemme précédant au foncteur de Yoneda. □

2 Catégorie Cartésienne Close V2

Définition 2.1 (Catégorie Cartésienne Close). *Une catégorie cartésienne close est l'ensemble des données suivant :*

- Une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$.
- Pour chaque objet $A \in \mathcal{C}$ un endofoncteur $A \Rightarrow - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- Pour tout $A, B, C \in \mathcal{C}$ une bijection $\varphi_{A,B,C} : \mathrm{Hom}(B \times A, C) \simeq \mathrm{Hom}(B, A \Rightarrow C)$. On demande de plus que cette bijection soit naturelle en B et C . C'est à dire que les diagrammes suivant commutent :

Pour tout $f : B \rightarrow B'$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(B \times A, C) & \xrightarrow{\varphi_{A,B,C}} & \mathrm{Hom}(B, A \Rightarrow C) \\
\mathrm{Hom}(f \times \mathrm{id}_A, C) \uparrow & & \uparrow \mathrm{Hom}(f, A \Rightarrow C) \\
\mathrm{Hom}(B' \times A, C) & \xrightarrow{\varphi_{A,B',C}} & \mathrm{Hom}(B', A \Rightarrow C)
\end{array}$$

Pour tout $g : C \rightarrow C'$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(B \times A, C) & \xrightarrow{\varphi_{A,B,C}} & \mathrm{Hom}(B, A \Rightarrow C) \\
\mathrm{Hom}(B \times A, f) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}(B, A \Rightarrow f) \\
\mathrm{Hom}(B \times A, C') & \xrightarrow{\varphi_{A,B,C'}} & \mathrm{Hom}(B, A \Rightarrow C')
\end{array}$$

Autrement dit, φ définit un isomorphisme naturelle entre les foncteurs $\text{Hom}(- \times A, C)$ et $\text{Hom}(-, A \Rightarrow C)$ et les foncteurs $\text{Hom}(B \times A, -)$ et $\text{Hom}(B, A \Rightarrow -)$.

Proposition 2.2. *Les deux définitions de catégories cartésiennes closes sont équivalente.*

Preuve. On laisse en exercice la preuve que la définition en terme de morphismes d'évaluations implique la définition en terme d'Hom-set. Montrons que la définition en terme d'Hom-set implique la définition en terme de morphisme d'évaluation et de transposition.

Soit $f : B \times A \rightarrow C$, on définit

$$\tilde{f} := \varphi_{A,B,C}(f) : B \rightarrow A \Rightarrow C$$

On définit

$$\mathbf{eval}_{A,B} := \varphi_{A,A \Rightarrow B,B}^{-1}(\text{id}_{A \Rightarrow B}) : A \Rightarrow B \times A \rightarrow B$$

Il nous faut à présent montrer que pour tout $f : B \times A \rightarrow C$ le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A \Rightarrow C \times A & \xrightarrow{\mathbf{eval}_{A,C}} & C \\ \tilde{f} \times \text{id}_A \uparrow & \nearrow f & \\ B \times A & & \end{array}$$

La naturalité en B de φ nous donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B \times A, C) & \xleftarrow{\varphi_{A,B,C}^{-1}} & \text{Hom}(B, A \Rightarrow C) \\ \uparrow \text{Hom}(\tilde{f} \times \text{id}_A, C) & & \uparrow \text{Hom}(\tilde{f}, A \Rightarrow C) \\ \text{Hom}(A \Rightarrow C \times A, C) & \xleftarrow{\varphi_{A,A \Rightarrow C,C}^{-1}} & \text{Hom}(A \Rightarrow C, A \Rightarrow C) \end{array}$$

Calculons l'image par ces deux chemins de $\text{id}_{A \Rightarrow C}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tilde{f} \times \text{id}_A, C)(\varphi_{A,A \Rightarrow C,C}^{-1}(\text{id}_{A \Rightarrow C})) &= \text{Hom}(\tilde{f} \times \text{id}_A, C)(\mathbf{eval}_{A,C}) \\ &= \tilde{f} \times \text{id}_A; \mathbf{eval}_{A,C} \\ \varphi_{A,B,C}^{-1}(\text{Hom}(\tilde{f}, A \Rightarrow C)(\text{id}_{A \Rightarrow C})) &= \varphi_{A,B,C}^{-1}(\tilde{f}; \text{id}_{A \Rightarrow C}) \\ &= \varphi_{A,B,C}^{-1}(\tilde{f}) \\ &= \varphi_{A,B,C}^{-1}(\varphi_{A,B,C}(f)) \\ &= f \end{aligned}$$

Donc $f = \tilde{f} \times \text{id}_A; \mathbf{eval}_{A,C}$. Il nous reste maintenant à montrer l'unicité de $\tilde{f}$. Soit $g : B \rightarrow A \Rightarrow C$ tel que $g \times \text{id}_A; \mathbf{eval}_{A,C} = f$. En remplaçant $\tilde{f}$ par g dans le diagramme précédent, on obtient l'égalité suivante :

$$\varphi_{A,B,C}^{-1}(g) = g \times \text{id}_A; \mathbf{eval}_{A,C}$$

Donc $\varphi_{A,B,C}^{-1}(g) = f$, en appliquant φ des deux côtés on a $g = \varphi_{A,B,C}(f) = \tilde{f}$. □