

Notes du Séminaire de Catégories 10/11/2025

1 Catégories Cartésiennes Closes

Définition 1.1 (Catégorie Cartésienne Close). Une catégorie cartésienne close (CCC) est la donnée des éléments suivants :

- Une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$.
- Pour chaque paire d'objets $A, B \in \mathcal{C}$ la donnée d'un objet noté $A \Rightarrow B$ (aussi noté B^A ou $[A, B]$), appelé objet exponentielle ou Hom-interne.
- Pour chaque paire d'objets $A, B \in \mathcal{C}$ la donnée d'un morphisme $\mathbf{eval}_{A,B} : (A \Rightarrow B) \times A \rightarrow B$, appelé morphisme d'évaluation.
- Pour chaque morphisme $f : A \times B \rightarrow C$ la donnée d'un morphisme $\tilde{f} : A \rightarrow B \Rightarrow C$, appelé la transposé de f .
- Pour chaque $f : A \times B \rightarrow C$, $\tilde{f}$ est l'unique morphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 B \Rightarrow C \times B & \xrightarrow{\mathbf{eval}_{B,C}} & C \\
 \uparrow \tilde{f} \times \text{id}_B & \nearrow f & \\
 A \times B & &
 \end{array}$$

1.1 Exemples

Proposition 1.1.1. **Set** muni du produit usuelle est une catégorie cartésienne close.

Preuve. On définit l'objet exponentielle, le morphisme d'évaluation et la transposition comme suit :

- $A \Rightarrow B$ l'ensemble des fonctions de A vers B .
- $\mathbf{eval}_{A,B} : (f, b) \mapsto f(b)$.
- Pour tout $f : A \times B \rightarrow C$ on définit $\tilde{f} : a \mapsto (b \mapsto f(a, b))$.

Il est aisé de vérifier l'unicité de la transposé. □

Définition 1.1.2 (Pos). **Pos** est la catégorie des ensembles partiellement ordonnés avec les fonctions croissantes :

- Objets : les ensembles partiellement ordonnés $(X, \leqslant)$.
- Morphisme : les fonctions croissantes $f : \left(X, \leqslant_X\right) \rightarrow \left(Y, \leqslant_Y\right)$

Proposition 1.1.3. **Pos** est une catégorie cartésienne avec le produit donné par :

$$\left(X, \leqslant_X\right) \times \left(Y, \leqslant_Y\right) := \left(X \times Y, \leqslant_{X \times Y}\right)$$

avec l'ordre produit défini par, $(x, y) \leqslant_{X \times Y} (x', y')$ si et seulement si $x \leqslant_X x'$ et $y \leqslant_Y y'$.

Preuve. Exercice. □

Proposition 1.1.4. **Pos** est une catégorie cartésienne close.

Preuve. Exercice. □

Définition 1.1.5 (Treillis). Un treillis est un ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$ qui admet tout les inf et sup finis. En particulier, il admet un inf 0-aire : $\top$ l'élément maximum et un sup 0-aire : $\perp$ l'élément minimum.

Proposition 1.1.6. Les treillis sont des catégories bicartésienne.

Preuve. Exercice. □

Définition 1.1.7 (Algèbre de Heyting). Une algèbre de Heyting est un treillis $(E, \leq)$ tel que pour chaque paire d'éléments a et b , il existe un élément noté $a \Rightarrow b$ tel que :

$$\forall a, b, c \in E, \quad a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \Rightarrow c$$

Proposition 1.1.8. Les algèbres de Heyting sont des catégories bicartésienne close c'est à dire, des catégories bicartésienne qui sont aussi des catégories cartésiennes closes.

Preuve. Exercice. □

1.2 Quelques Résultats Important sur les CCC

Définition 1.2.1 ((l'autre) Transposé). Soit $\mathcal{C}$ une CCC et $g : A \rightarrow B \Rightarrow C$, on définit $\bar{g} : A \times B \rightarrow C$ la transposé de g :

$$\bar{g} := A \times B \xrightarrow{g \times \text{id}_B} B \Rightarrow C \times B \xrightarrow{\text{eval}_{B,C}} C$$

Proposition 1.2.2. Soit $\mathcal{C}$ une CCC, $f : A \times B \rightarrow C$ et $g : A \rightarrow B \Rightarrow C$ alors,

$$\tilde{\tilde{f}} = f \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{g}} = g$$

Preuve. Considérons d'abord $\tilde{\tilde{f}}$. En dépliant la définition on a $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f} \times \text{id}_B; \text{eval}_{B,C}$. Par la propriété d'unicité de la transposition on a $\tilde{\tilde{f}} = f$.

Considérons maintenant $\tilde{\tilde{g}}$. Comme c'est la transposé du morphisme $\bar{g}$, on sait que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B \Rightarrow C \times B & \xrightarrow{\text{eval}_{B,C}} & C \\ \uparrow \tilde{\tilde{g}} \times \text{id}_B & \nearrow \bar{g} = g \times \text{id}_B; \text{eval}_{B,C} & \\ A \times B & & \end{array}$$

On remarque que g vérifie aussi la même égalité

$$\begin{array}{ccc} B \Rightarrow C \times B & \xrightarrow{\text{eval}_{B,C}} & C \\ \uparrow g \times \text{id}_B & \nearrow g \times \text{id}_B; \text{eval}_{B,C} & \\ A \times B & & \end{array}$$

Par unicité de la transposé on a, $\tilde{\tilde{g}} = g$. □

Proposition 1.2.3 (Foncteur $A \Rightarrow -$). Soit $\mathcal{C}$ une CCC et A un objet de $\mathcal{C}$ alors, on peut construire un foncteur $A \Rightarrow - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ qui à un objet B associe l'objet exponentielle $A \Rightarrow B$.

Preuve. On définit ce foncteur :

- Sur les objets : $A \Rightarrow B := A \Rightarrow B$.
- Sur les morphismes : soit $f : B \rightarrow C$, on définit

$$h := A \Rightarrow B \times A \xrightarrow{\text{eval}_{A,B}} B \xrightarrow{f} C$$

On pose $A \Rightarrow f := \tilde{h} : A \Rightarrow B \rightarrow A \Rightarrow C$. □

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une CCC, A, B, C trois objets de $\mathcal{C}$, on a une bijection*

$$\varphi : \text{Hom}(B \times A, C) \rightarrow \text{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

Preuve. On définit $\varphi : (f : B \times A \rightarrow C) \mapsto \tilde{f}$. Son inverse est donné par l'autre transposé $\psi : (g : B \rightarrow A \Rightarrow C) \mapsto \bar{g}$. La preuve que ces fonctions sont bien inverse l'une de l'autre est donné par la Proposition 1.2.2. □

Remarque

En particulier on a une bijection entre $\text{Hom}(1 \times A, B) \simeq \text{Hom}(1, A \Rightarrow B)$. Comme $A \simeq 1 \times A$ on a donc $\text{Hom}(A, B) \simeq \text{Hom}(1, A \Rightarrow B)$. Cette remarque justifie l'appellation « Hom interne » en effet, la catégorie « voit » ses morphismes au travers des objets exponentielles.