

Notes du Séminaire de Catégories 03/11/2025

1 Produits Finis

Définition 1.1 (Proj n -aire). La définition de la catégorie $\mathbf{Proj}_{A,B}$ se généralise facilement à un n -uplet quelconque d'objets. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_n$ des objets de $\mathcal{C}$. On définit $\mathbf{Proj}_{A_1, \dots, A_n}$ de la manière suivante :

- Objets : $(X, f_1 : X \rightarrow A_1, \dots, f_n : X \rightarrow A_n)$ où X est un objet de $\mathcal{C}$ et pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i : X \rightarrow A_i$ est un morphisme de X vers A_i .
- Morphismes: un morphisme de $(X, f_1 : X \rightarrow A_1, \dots, f_n : X \rightarrow A_n)$ vers $(Y, g_1 : Y \rightarrow A_1, \dots, g_n : Y \rightarrow A_n)$ est un morphisme $v : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v; g_i = f_i$$

Remarque

Cette définition est bien posée même pour $n = 0$. Dans ce cas $\mathbf{Proj} = \mathcal{C}$.

Définition 1.2 (Produits n -aire). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{C}$ une catégorie, on dit qu'un n -uplet d'objets $A_1, \dots, A_n$ admettent un produit si la catégorie $\mathbf{Proj}_{A_1, \dots, A_n}$ admet un objet terminal.

Remarque

Le produit 0-aire est l'objet terminal.

Exemple. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et A, B, C trois objets. Par définition, ils admettent un produit si il existe un objet P et trois morphismes π_1, π_2, π_3 tel que (P, π_1, π_2, π_3) est terminal dans $\mathbf{Proj}_{A,B,C}$. Tout comme avec le produit binaire, on peut exprimer cette condition de manière équivalente :

Pour tout objet E et triplet de morphisme $f_1 : E \rightarrow A$, $f_2 : E \rightarrow B$, $f_3 : E \rightarrow C$ il existe un unique morphisme, noté $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, de E vers P tel que : pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle; \pi_i^{A,B,C} = f_i$.

Définition 1.3. Une catégorie $\mathcal{C}$ admet tout les produits finis si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout n -uplet d'objets $A_1, \dots, A_n$, la catégorie $\mathbf{Proj}_{A_1, \dots, A_n}$ admet un objet terminal.

Proposition 1.4. Une catégorie $\mathcal{C}$ admet tout les produits finis si et seulement si elle admet un objet terminal et tout les produits binaires.

Preuve. Exercice. □

Attention

Le produit d'objets étant unique à unique isomorphisme prêt, on s'autorise à parler **du** produit au lieu **d'un** produit. On le notera $A \times B$, notations que nous avons jusqu'à présent volontairement évité.

2 Catégories Cartésiennes

Définition 2.1 (Catégorie Cartésienne). Une catégorie cartésienne est la donnée de :

- Une catégorie $\mathcal{C}$.
- Un foncteur $- \times - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- Pour chaque paire d'objets A, B un choix de morphisme $\pi_1^{A,B} : A \times B \rightarrow A$ et $\pi_2^{A,B} : A \times B \rightarrow B$.
- Un choix d'un objet terminal 1 .

On demande les conditions suivante :

- Pour toute paire d'objets A, B , $(A \times B, \pi_1^{A,B}, \pi_2^{A,B})$ est un produit de A, B .
- Pour toute paire de morphismes $f : A \rightarrow A'$ et $g : B \rightarrow B'$ le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1^{A,B}} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2^{A,B}} & B \\
 f \downarrow & & f \times g \downarrow & & \downarrow g \\
 A' & \xleftarrow{\pi_1^{A',B'}} & A' \times B' & \xrightarrow{\pi_2^{A',B'}} & B'
 \end{array}$$

On note souvent une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ en omettant le choix de projections π_1 et π_2 .

Proposition 2.2. Soit $(\mathcal{C}, \times, 1)$ une catégorie cartésienne alors $\mathcal{C}$ admet tout les produits finis.

Preuve. $\mathcal{C}$ admet un objet terminal 1 , elle a donc tout les produits 0-aire. Le foncteur $- \times -$ permet d'obtenir les produits binaire. Par la Proposition 1.4, $\mathcal{C}$ admet tout les produits finis. $\square$

Remarque

Une catégorie cartésienne est une catégorie dans lequel on a fait un choix de produit pour chaque paire d'objet. En présence de l'axiome du choix, se donner une catégorie qui admet tout les produits finis ou une catégorie cartésienne est équivalent. Cette remarque est formalisée par la proposition suivante.

Proposition 2.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admet tout les produits finis alors, l'axiome du choix nous permet de construire une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$.

Preuve. $\mathcal{C}$ admet un objet terminal, l'axiome du choix nous permet d'en choisir un, notons le 1 . De même pour chaque paire d'objets A, B , l'axiome du choix nous permet de choisir un produit noté $(A \times B, \pi_1^{A,B}, \pi_2^{A,B})$. Il nous reste à construire un foncteur $- \times - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. On le construit de la manière suivante :

- Sur les objets : $- \times - : (A, B) \mapsto A \times B$ (notre choix d'objet produit).
- Sur les morphismes : soit $f : A \rightarrow A'$ et $g : B \rightarrow B'$ deux morphismes, on définit $f \times g := \langle \pi_1^{A,B}; f, \pi_2^{A,B}; g \rangle : A \times B \rightarrow A' \times B'$.

La vérification de fonctorialité est laissée en exercice. $\square$

3 Divers Résultats sur les Produits

Proposition 3.1 (Unité du Produit). *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, A un objet, 1 l'objet terminal et $A \times 1$ le produit de A et 1 . Alors $\pi_1^{A,1} : A \times 1 \rightarrow A$ est un isomorphisme. Son inverse est $\langle \text{id}_A, !_A \rangle$ où $!_A$ est l'unique morphisme de A vers 1 .*

Proposition 3.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, A, B, C trois objets, $A \times B$ le produit de A et B et $f, g : C \rightarrow A \times B$ deux morphismes parallèles. f et g sont égaux si et seulement si ils sont égaux sur chaque composante du produit. Formellement :*

$$f = g \Leftrightarrow f; \pi_1^{A,B} = g; \pi_1^{A,B} \text{ et } f; \pi_2^{A,B} = g; \pi_2^{A,B}$$

Preuve. Si $f = g$ alors leur composition avec les projections sont évidemment égales. Supposons que $f; \pi_1^{A,B} = g; \pi_1^{A,B}$ et $f; \pi_2^{A,B} = g; \pi_2^{A,B}$. Par la propriété universelle du produit on a $f = \langle f; \pi_1^{A,B}, f; \pi_2^{A,B} \rangle = \langle g; \pi_1^{A,B}, g; \pi_2^{A,B} \rangle = g$. □