

Devoir Maison 1

Devoir à rendre pour le 17 Novembre 2025. Sauf exception, chaque étudiant doit rendre une copie **manuscrite**. Justifier minutieusement chaque réponse.

Exercice 1 (Symétrie du Produit)

Soit $(\mathcal{C}, \times, 1)$ une catégorie cartésienne.

- 1) Montrer que pour toute paire d'objets $A, B \in \mathcal{C}$, le morphisme canonique $\sigma_{A,B} := \langle \pi_2^{A,B}, \pi_1^{A,B} \rangle : A \times B \rightarrow B \times A$ est un isomorphisme.
- 2) Montrer que pour tous morphismes $f : A \rightarrow A'$ et $g : B \rightarrow B'$ le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\sigma_{A,B}} & B \times A \\ f \times g \downarrow & & \downarrow g \times f \\ A' \times B' & \xrightarrow{\sigma_{A',B'}} & B' \times A' \end{array}$$

Exercice 2 (Catégorie Distributive)

Une catégorie bicartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1, +, 0)$ est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$, d'une structure cartésienne $(\mathcal{C}, \times, 1)$ et cocartésienne $(\mathcal{C}, +, 0)$ sur $\mathcal{C}$. Une catégorie bicartésienne est distributive si pour tous objets $A, B, C \in \mathcal{C}$, le morphisme canonique

$$\text{dist}_{A,B,C} := [\text{id}_A \times \iota_1^{B,C}, \text{id}_A \times \iota_2^{B,C}] : (A \times B) + (A \times C) \rightarrow A \times (B + C)$$

est un isomorphisme.

- 0) Écrire la propriété universelle du coproduit dans le cas particulier de $\text{dist}_{A,B,C}$.
- 1) Donner sans justifier un exemple de catégorie distributive et un exemple de catégorie bicartésienne non distributive.

Le but de cet exercice est de montrer que dans une catégorie distributive $A \times 0 \simeq 0$.

- 2) Soit $(A, +, \times, 0, 1)$ un anneau, montrer en utilisant la distributivité que pour tout $a \in A$, $a \times 0 = 0$.

Dans la suite on considère une catégorie distributive $(\mathcal{C}, \times, 1, +, 0)$.

3) Montrer que pour tout objets $A, B \in \mathcal{C}$ il existe au moins un morphisme de $A \times 0$ vers B .

Nous allons maintenant montrer qu'il est unique.

4) Montrer que les deux injections $\iota_1^{0,0} : 0 \rightarrow 0 + 0$ et $\iota_2^{0,0} : 0 \rightarrow 0 + 0$ sont égales.

5) Soit A un objet de $\mathcal{C}$, montrer que les deux injections vers $(A \times 0) + (A \times 0)$ sont égales. *Indice: considérer le diagramme de la question 0.*

6) Soit A et B deux objets de $\mathcal{C}$ et $f, g : A \times 0 \rightarrow B$ deux morphismes parallèles. Montrer que $f = g$ et conclure.

Un objet initial 0 est dit strict si pour tout objet A , s'il existe un morphisme $f : A \rightarrow 0$ alors $A \simeq 0$.

7) Montrer que l'objet initial d'une catégorie distributive est toujours strict. *Indice: construire un isomorphisme entre A et $A \times 0$.*

Exercice Bonus (Catégorie des Fonctions Partielles)

On note Set_{part} la catégorie des ensembles et des fonctions partielles entre ensembles. Concrètement, les objets de Set_{part} sont les ensembles et les morphismes, les fonctions partielles.

1) Décrire les coproduits binaire et l'élément initial dans Set_{part} .

2) Décrire les produits binaire et l'élément terminal dans Set_{part} .

3) Set_{part} est elle distributive ?