Signaux sur automates cellulaires en plusieurs dimensions

J.-C. Dubacq[1]

[1] Laboratoire LIPN – UMR 7030
CNRS – Université Paris 13

Rencontre Programmation Sur Automates Cellulaires

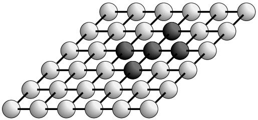
Outline

Outline

1. Définitions
   - Automates cellulaires
   - Signaux
   - Fischer-constructibilité
2. Propriétés générales
   - Fischer-constructibilité et signaux
   - Limites en 1D
3. Signaux en 2D
   - Représentation
   - Résultats

Définitions standards

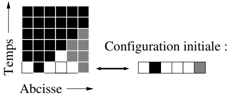
#include <stdca.h>



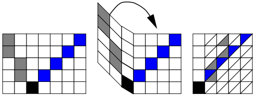
- Élément de base : la configuration
- Configuration : éléments organisés en grille de dimension *d* (ligne, plan), tous identiques, prenant un nombre de valeurs finies.
- Évolution de configurations grâce à une table de transition *locale* et *uniforme*
- Voisinage : ensemble des cellules dont dépend l'état d'une cellule après une itération de l'automate. Identique pour toutes les cellules.
- Notion de temps discret

Diagrammes espace-temps
Du bas vers le haut

- Représentation des données par des diagrammes espace-temps



- Opérations simples sur les diagrammes $\Longrightarrow$ Transformations systématiques sur l'AC

- Exemple du pliage 

- Temps réel : Ensemble des sites du diagramme espace-temps où la cellule correspondante, initialement inactive, pourrait pour la première fois devenir active.

Outline

Signaux

- Régularités du diagramme espace-temps
  $\Longrightarrow$ Notion de signal
  $\Longrightarrow$ Nouvelle vision : une cellule reçoit et réemet des signaux.
- Définition : Un signal $\mathfrak{S}$ sera dans cet exposé continu (connexe par voisinage) de dimension 1.
- Problème de ressemblance des états.
- Signaux simples (pente rationnelle, forme exponentielle) connus en 1D. On s'intéresse à la construction de signaux de formes diverses.

Outline

1. Définitions
   - Automates cellulaires
   - Signaux
   - Fischer-constructibilité
2. Propriétés générales
   - Fischer-constructibilité et signaux
   - Limites en 1D
3. Signaux en 2D
   - Représentation
   - Résultats

Fischer-constructibilité

- Fischer : crible d'Erathostène pour compter les nombres premiers
- Faire des tops à intervalles réguliers sur une cellule *déterminée* par la configuration initiale
- le $i^{\text{ième}}$ top au temps $f(i)$

Cette notion est très liée à la notion de signal pour une fonction strictement croissante.

Definition (Fischer-constructibilité)

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. On dit que f est d-Fischer-constructible s'il existe un automate cellulaire de dimension d et un sous-ensemble D des états de l'automate tel que :

$$s(0, i) \in D \Longleftrightarrow \exists! n \in \mathbb{N}, f(n) = i.$$

Stabilité des constructions

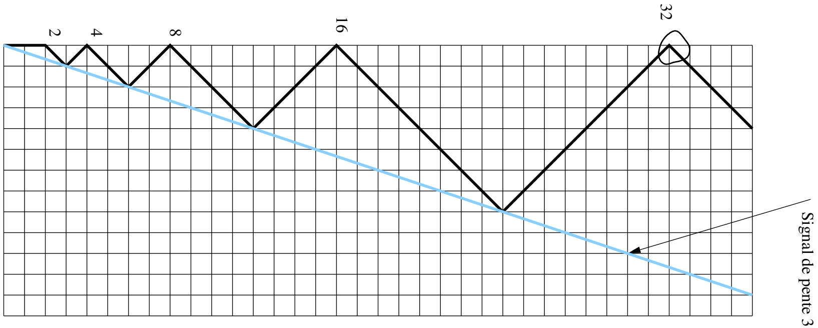
De bonnes fondations

Stabilité obtenue par des preuves géométriques :

- par multiplication par un scalaire
- par multiplication
- par addition
- par composition

Construction de Čulik-Choffrut

Dessin penché pour des raisons de format



Outline

1. Définitions
   - Automates cellulaires
   - Signaux
   - Fischer-constructibilité
2. Propriétés générales
   - Fischer-constructibilité et signaux
   - Limites en 1D
3. Signaux en 2D
   - Représentation
   - Résultats

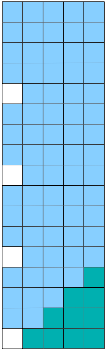
Fischer-constructibilité et signaux

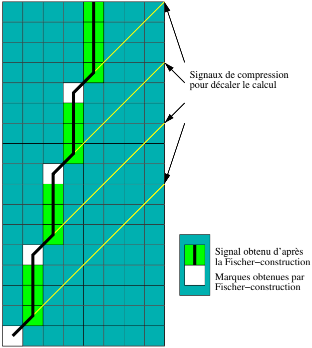
Theorème

Soit f strictement croissante. On a alors :

1. *Si f est Fischer-constructible, et qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $f \geq n(1+\alpha)$, alors on sait construire le signal de pente f ;*
2. *Si f croît plus vite qu'une exponentielle asymptotiquement, et qu'il existe un signal de pente f, alors 2f est Fischer-constructible (et donc f).*

Construction





Outline

Limites en 1D

Problématique : construire des signaux aussi proches que possible du temps réel.
Exemple : construire une réciproque de fonction ayant des grandes valeurs (par rapport au temps réel)

Theorème (Inversion)

Si f est une fonction strictement croissante, et qu'il existe un signal de forme f, il est possible de construire un signal de forme $2(n + f^{-1}(n))$.

Theorème (Mazoyer-Terrier)

Il n'est pas possible de faire de signaux entre $n + a$ et $n + b\log(n)$

$\Longrightarrow$ Impossible de faire plus rapide que $n + \log(n)$.

Dimension 2 ?

Problématique de la propagation des informations en dimension 2

- Limitation en 1D $\Longrightarrow$ quelles sont les limites en 2D ?
- Utile pour la programmation et les algorithmes cellulaires
- Domaine non encore exploré (en 1995)

Outline

Représentation en 2D

En fait, en 3D

Problème de la représentation en 2D des diagrammes espace-temps

$\Longrightarrow$ Visualisation 3D

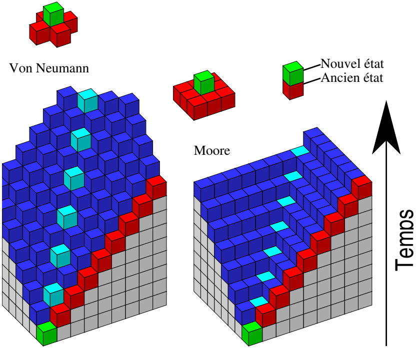
$\Longrightarrow$ Impossibilité de représenter des blocs « pleins »

Autre problème Le temps réel dépend du voisinage

$\Longrightarrow$ Voisinage de Moore

$\Longrightarrow$ On parlera aussi ici des signaux contenus dans un même plan.

Conventions de représentation



Ceci est le temps réel

Outline

1. Définitions
   - Automates cellulaires
   - Signaux
   - Fischer-constructibilité
2. Propriétés générales
   - Fischer-constructibilité et signaux
   - Limites en 1D
3. Signaux en 2D
   - Représentation
   - Résultats

Théorème d'inversion stricte

Theorème

Pour tout signal Fischer-constructible de forme f en 1D, on peut faire un signal de forme $n + f^{-1}(n)$.

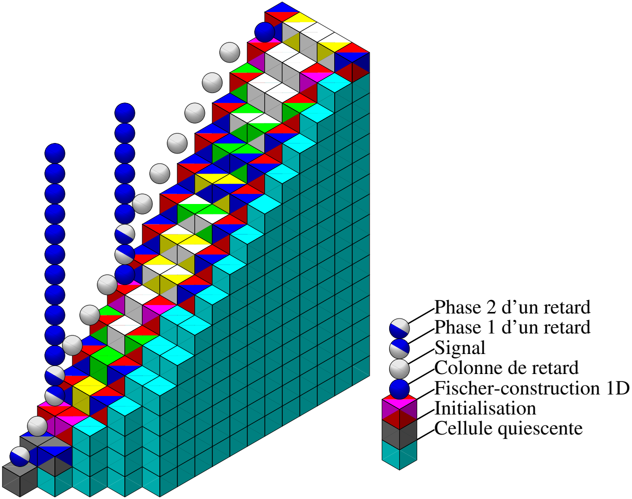
Construction simple :

$\Longrightarrow$ Réciproque augmente à chaque top

$\Longrightarrow$ Laisser une balise au moment du top

$\Longrightarrow$ le signal « grimpe » à chaque balise

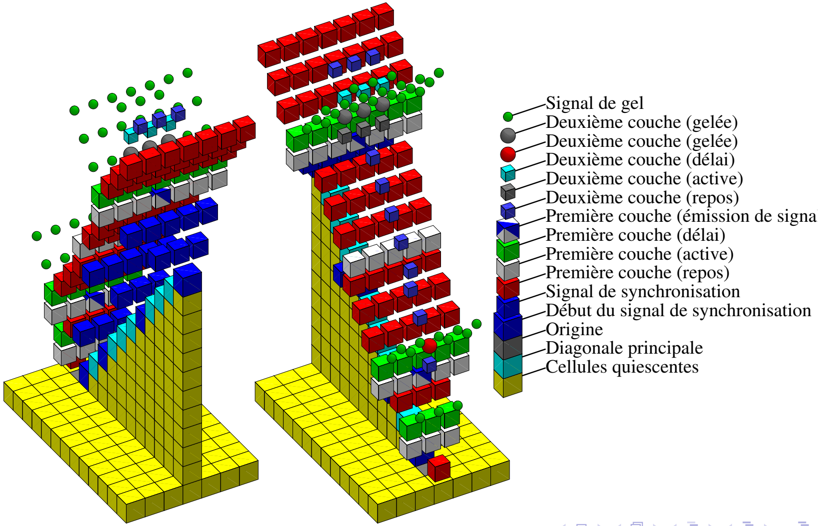
Construction générique



Augmentation de puissance

- On sait construire le $\log^\star$ en 1D
- Augmentation stricte de la capacité de génération des signaux en 2D
- Généralisation possible en dimension n ?
- « Classification » possible ?

Construction du log*



Limitation 2D

- Voisinage de Von Neumann
- Démonstration analogue au 1D
- Principe : fortes dépendances $\Longrightarrow$ périodicité sur les diagonales
- Résultat Terrier-Dubacq 2001 : limitation en dimension quelconque.

$\Longrightarrow$ Impossible de faire plus rapide que $n + \log \log n$ en 2D et en Von Neumann.

Conclusion (obsolète)

- Description des automates cellulaires commes des émetteurs/récepteurs de signaux
- Possibilité de classifier en fonction de la dimension et du voisinage
- Dimension : lien entre la hiérarchie de Grzegorczyk et la classification des automates cellulaires.
- Problème du voisinage peu exploré
- Pas d'entrées : notion de chaos intrinsèque

Conjecture

Les fonctions d-Fischer-constructibles avec $d \geq 2$, sont de classe $d+3$ dans la hiérarchie de Grzegorczyk.