

Signaux sur automates cellulaires en dimension 2

Jean-Christophe Dubacq — LRI, Orsay

SÉMINAIRE OCAD — 21 NOVEMBRE 2002

Automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire de dimension d est un triplet (S, V, f) où S est un ensemble d'états, V un sous-ensemble fini de \mathbf{Z}^d et f une fonction de $S^{|V|} \rightarrow S$. Une configuration est un élément de $S^{\mathbf{Z}^d}$.*

Automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire de dimension d est un triplet (S, V, f) où S est un ensemble d'états, V un sous-ensemble fini de \mathbf{Z}^d et f une fonction de $S^{|V|} \rightarrow S$. Une configuration est un élément de $S^{\mathbf{Z}^d}$.*



Configuration

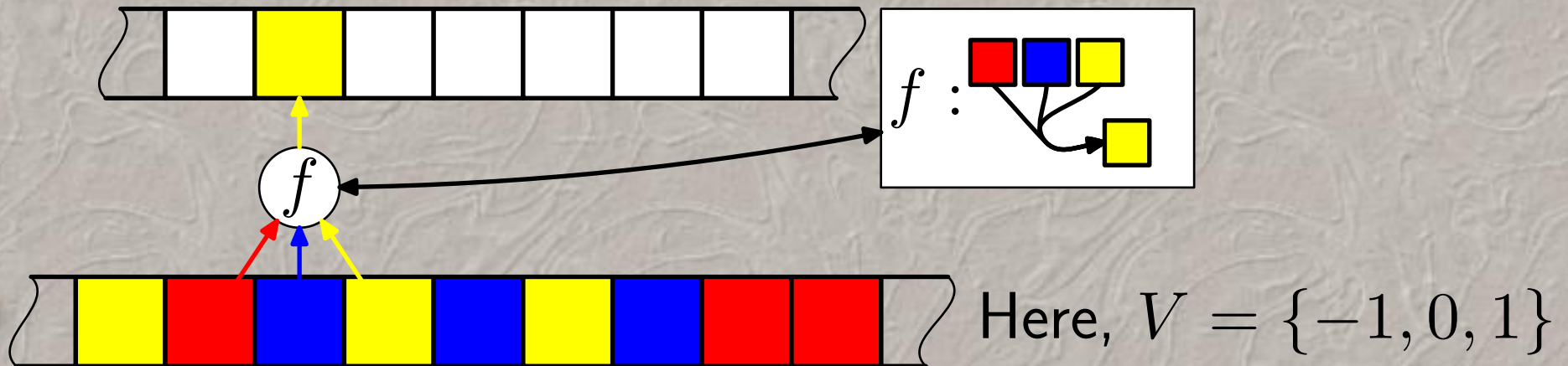
Automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire de dimension d est un triplet (S, V, f) où S est un ensemble d'états, V un sous-ensemble fini de \mathbf{Z}^d et f une fonction de $S^{|V|} \rightarrow S$. Une configuration est un élément de $S^{\mathbf{Z}^d}$.*



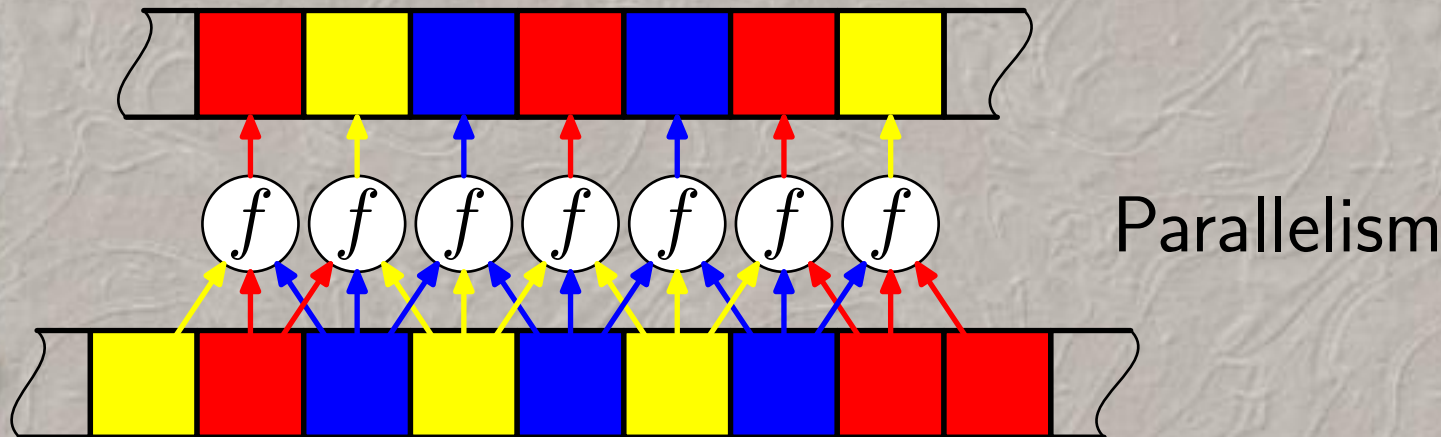
Automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire de dimension d est un triplet (S, V, f) où S est un ensemble d'états, V un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^d et f une fonction de $S^{|V|} \rightarrow S$. Une configuration est un élément de $S^{\mathbb{Z}^d}$.*



Automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire de dimension d est un triplet (S, V, f) où S est un ensemble d'états, V un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^d et f une fonction de $S^{|V|} \rightarrow S$. Une configuration est un élément de $S^{\mathbb{Z}^d}$.*



Définition 2 (Fonction globale) *La fonction globale d'un automate cellulaire est la fonction $\tilde{f} : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ qui à une configuration \mathcal{C} associe la configuration image $\tilde{f}(\mathcal{C})$:*

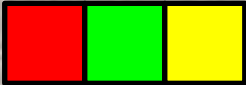
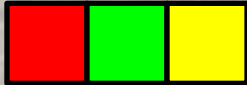

$$\langle \mathbf{u} \rangle = f \left(\langle \mathbf{u} + \mathbf{x}^1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u} + \mathbf{x}^v \rangle \right).$$

Par itération successive, on définit une suite de configurations. On appelle la fonction $(\mathbf{u}, t) \mapsto \langle \mathbf{u}, t \rangle$ le diagramme espace-temps de l'automate cellulaire.


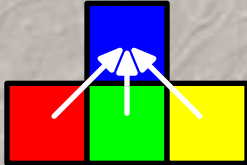
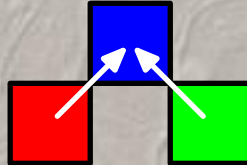
Plusieurs voisinages

von Neumann	Moore	Treillis
En dimension 1		
En dimension 2		
Mathématiquement		
$\sum x_i \leq 1$	$ x_i \leq 1$	$ x_i = 1$


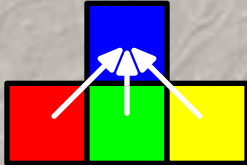
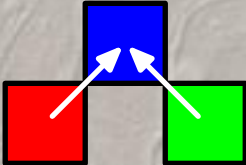
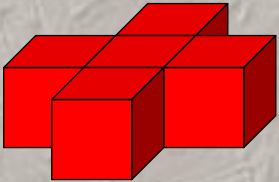
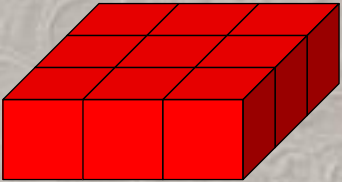
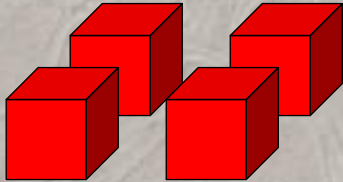
Plusieurs voisinages

von Neumann	Moore	Treillis
En dimension 1		
		
En dimension 2		
Mathématiquement		
$\sum x_i \leq 1$	$ x_i \leq 1$	$ x_i = 1$


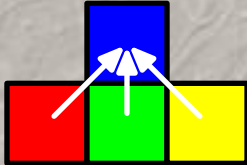
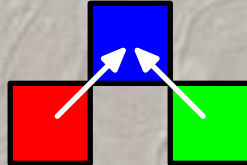
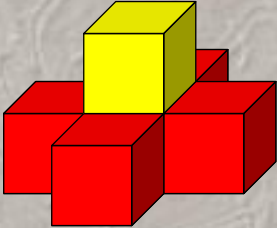
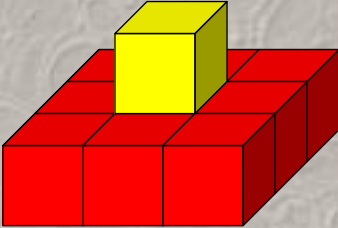
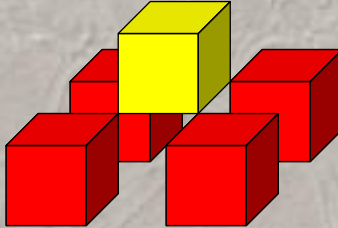
Plusieurs voisinages

von Neumann	Moore	Treillis
En dimension 1		
		
En dimension 2		
Mathématiquement		
$\sum x_i \leq 1$	$ x_i \leq 1$	$ x_i = 1$

Plusieurs voisinages

von Neumann	Moore	Treillis
En dimension 1		
		
En dimension 2		
		
Mathématiquement		
$\sum x_i \leq 1$	$ x_i \leq 1$	$ x_i = 1$

Plusieurs voisinages

von Neumann	Moore	Treillis
En dimension 1		
		
En dimension 2		
		
Mathématiquement		
$\sum x_i \leq 1$	$ x_i \leq 1$	$ x_i = 1$

Classification de Wolfram

Wolfram a institué une classification empirique des automates cellulaires en 4 classes : nihilpotents, périodiques, aléatoires, complexes.

Classification de Wolfram

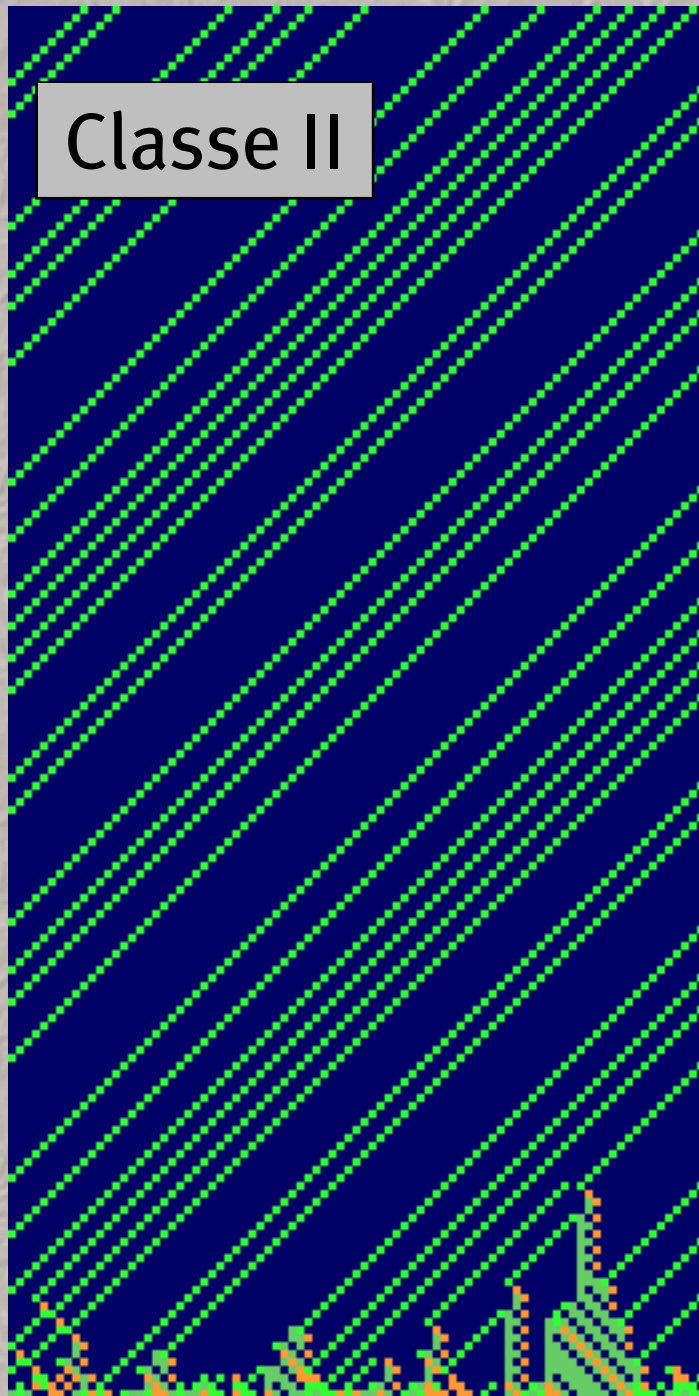
Wolfram a institué une classification empirique des automates cellulaires en 4 classes : nihilpotents, périodiques, aléatoires, complexes.

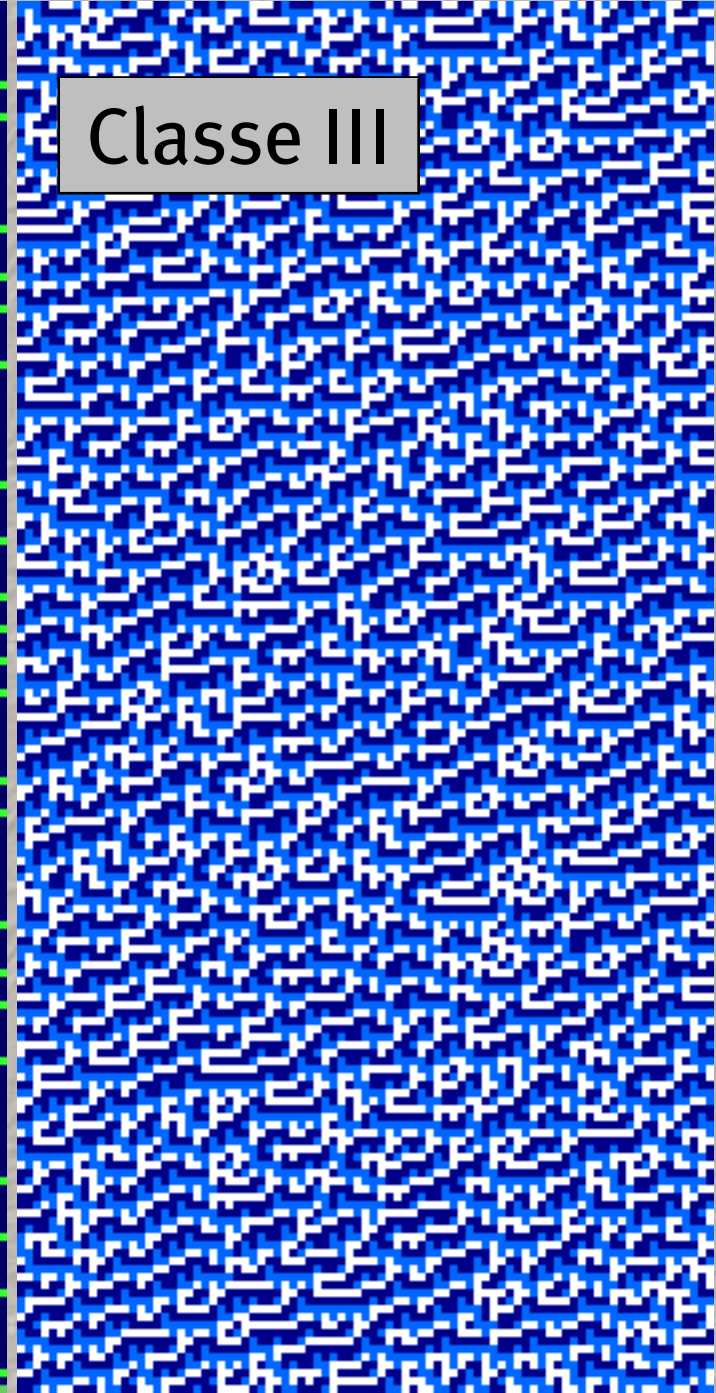
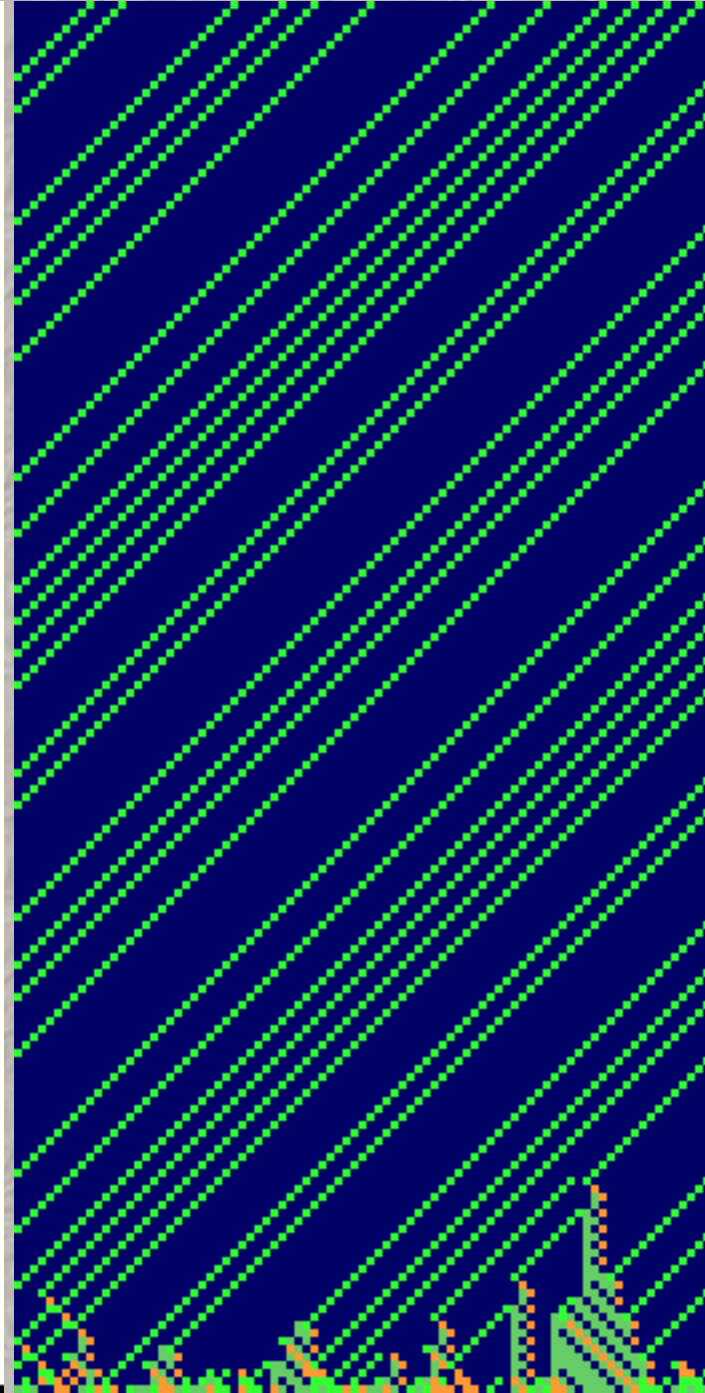
Cette classification est censée permettre de trouver les automates cellulaires les plus intéressants dans la classe IV.

Classe I

.....

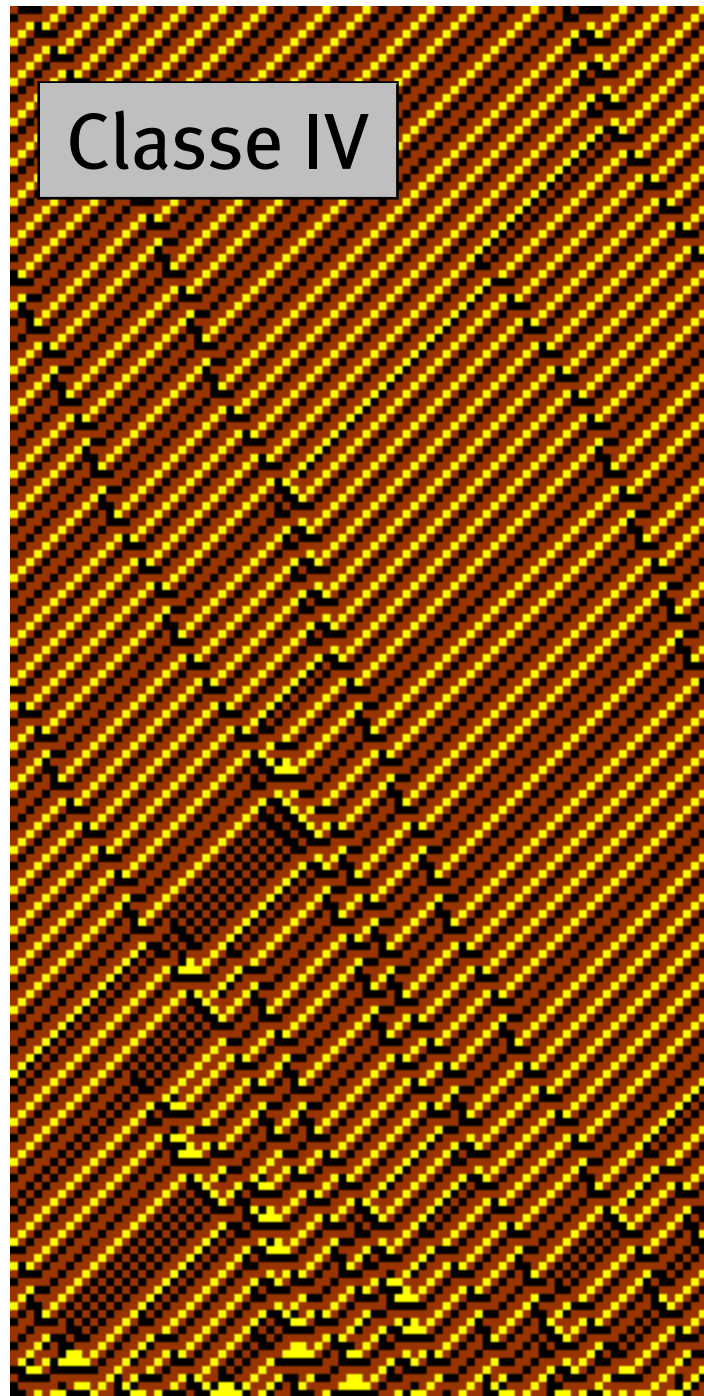
Classe II



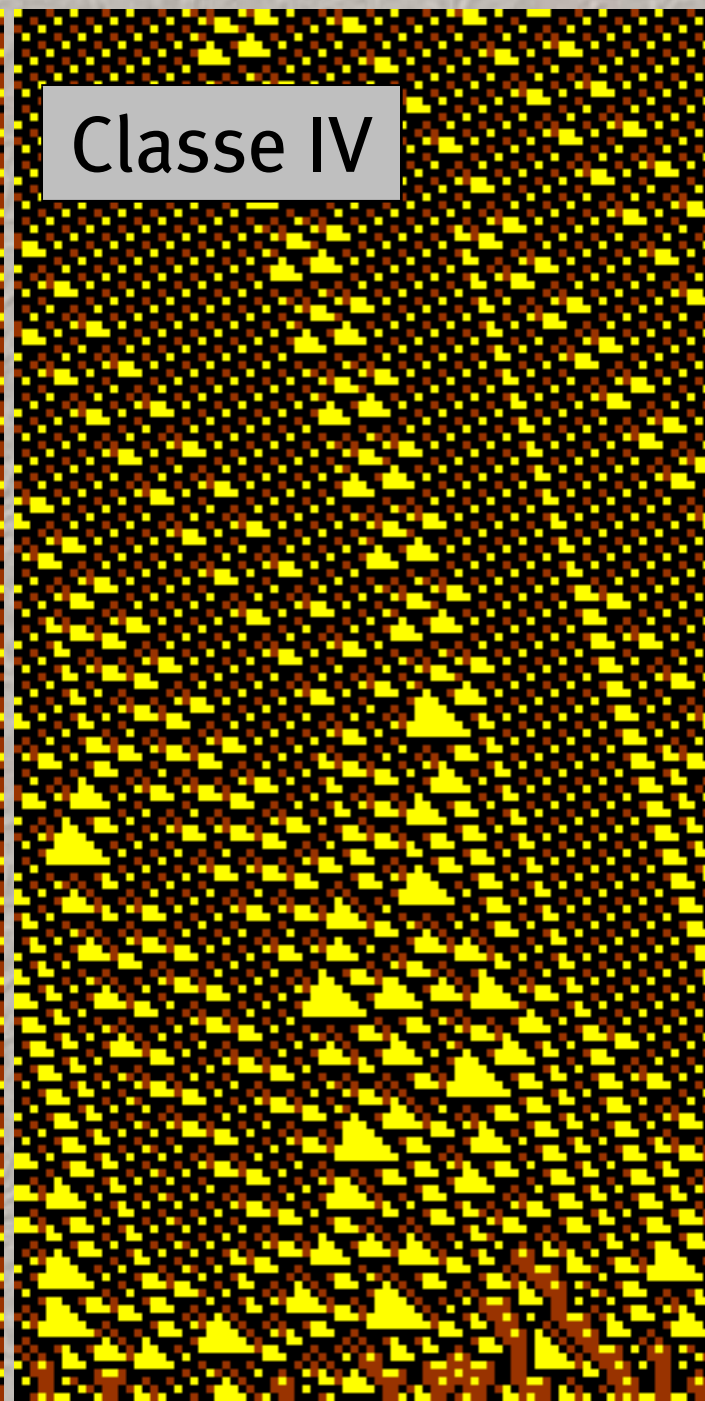
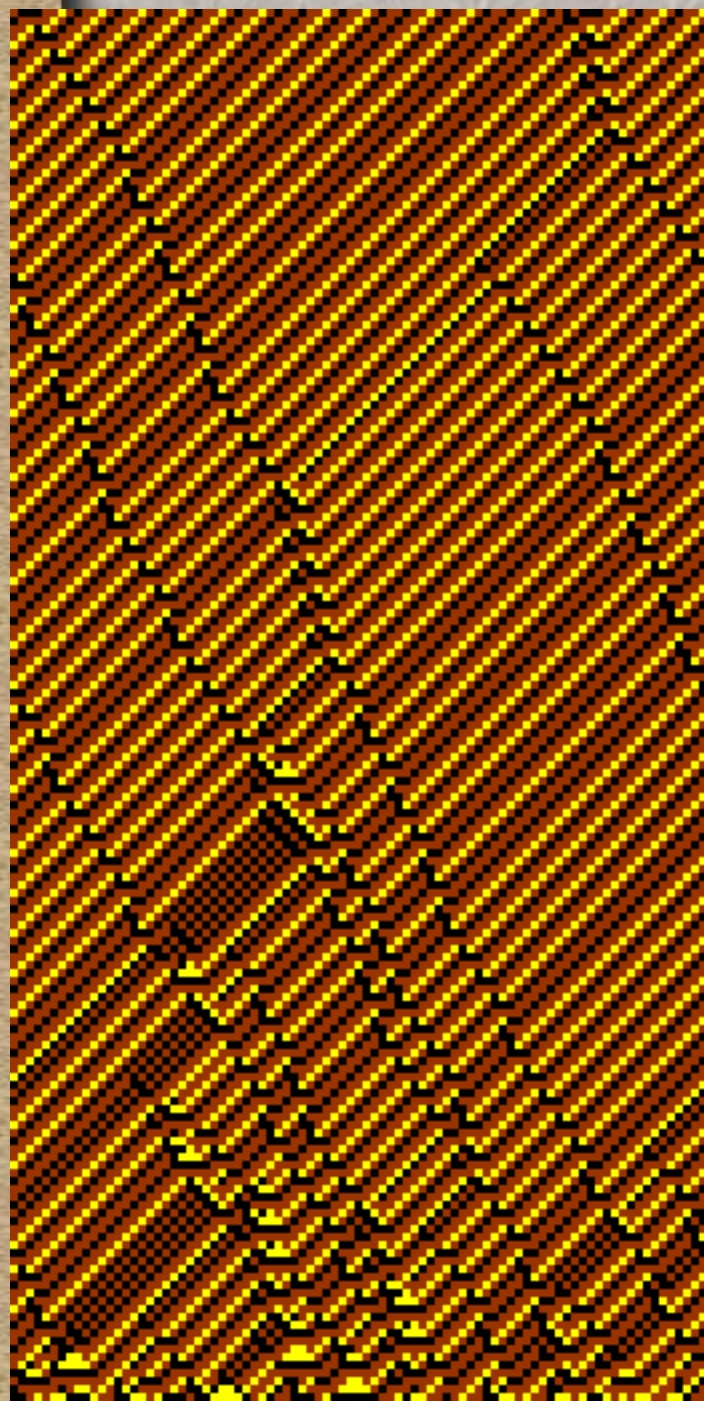


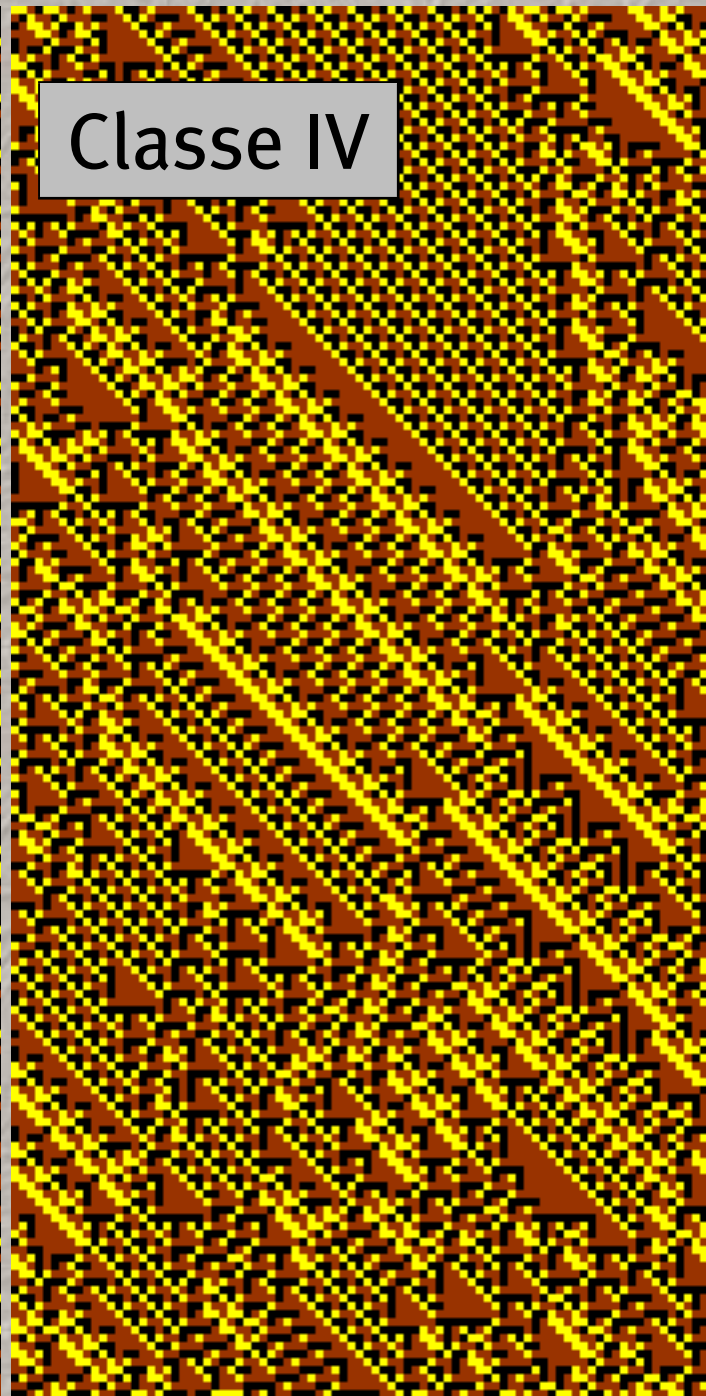
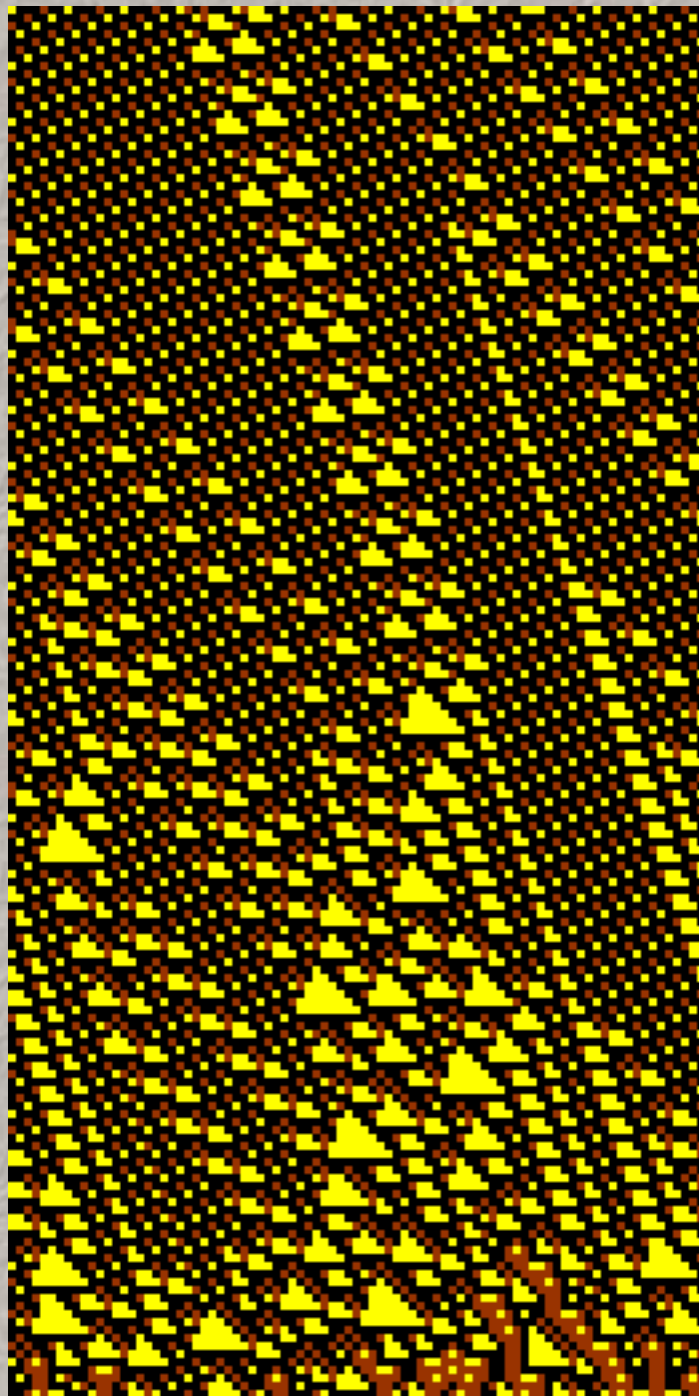
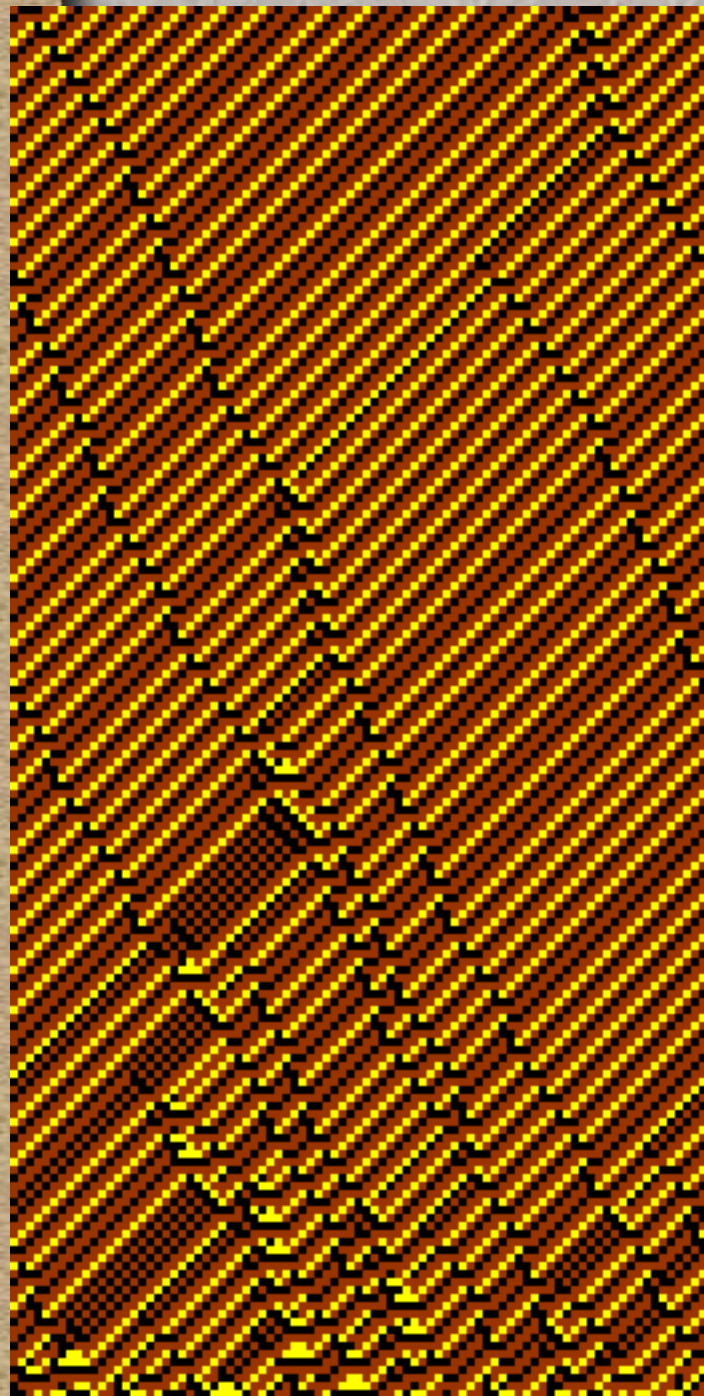
Classe III

Classe IV



Classe IV

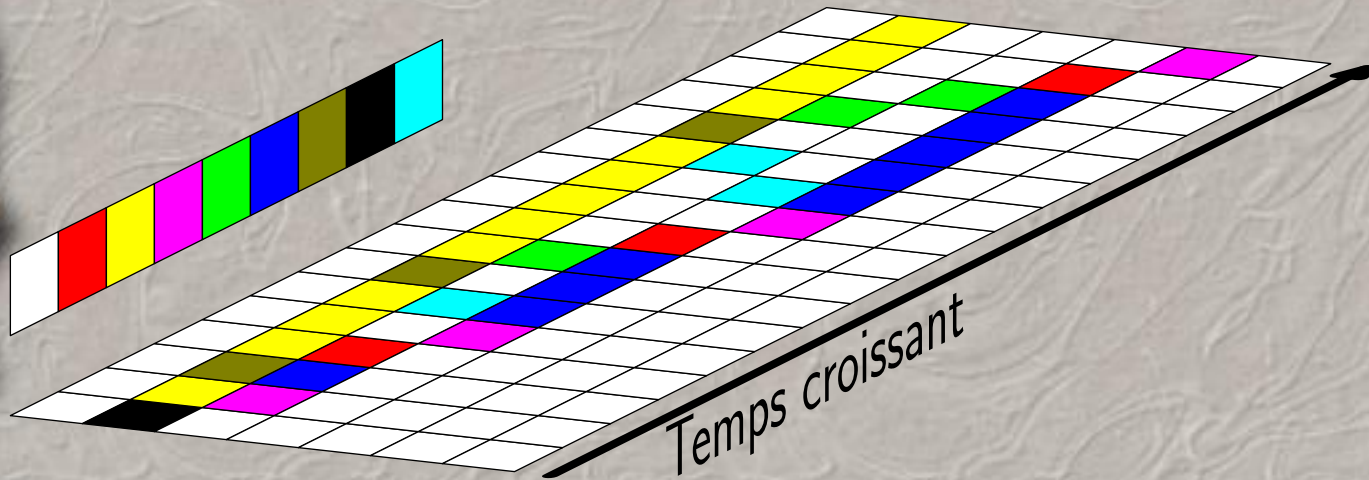




Classe IV

Notion de signal

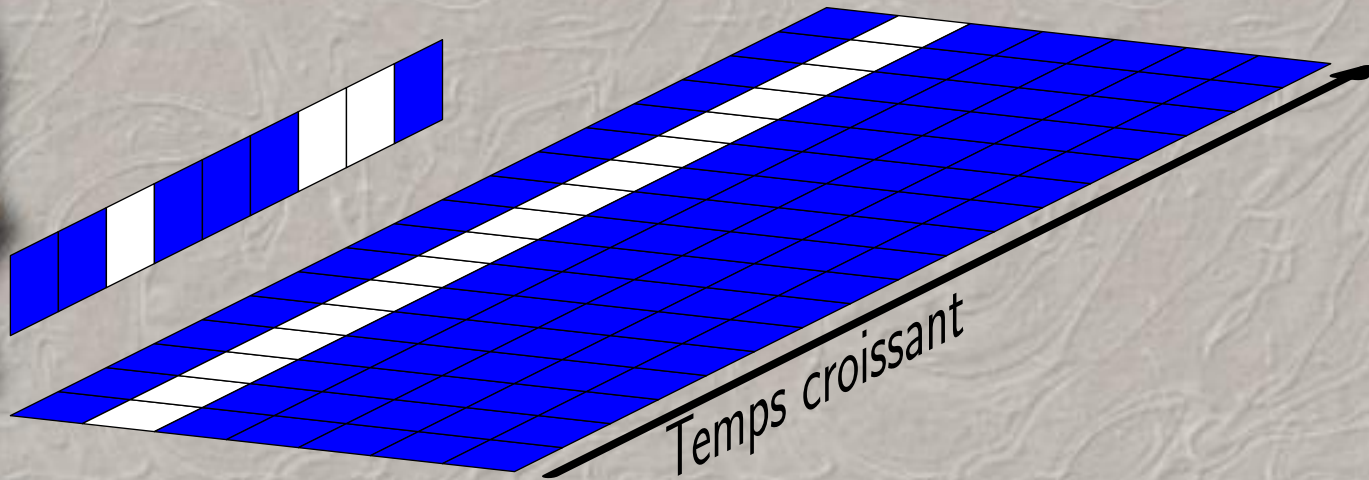
Diagramme espace-temps d'un automate (9 états) :



Notion de signal

Diagramme espace-temps d'un automate (9 états) :

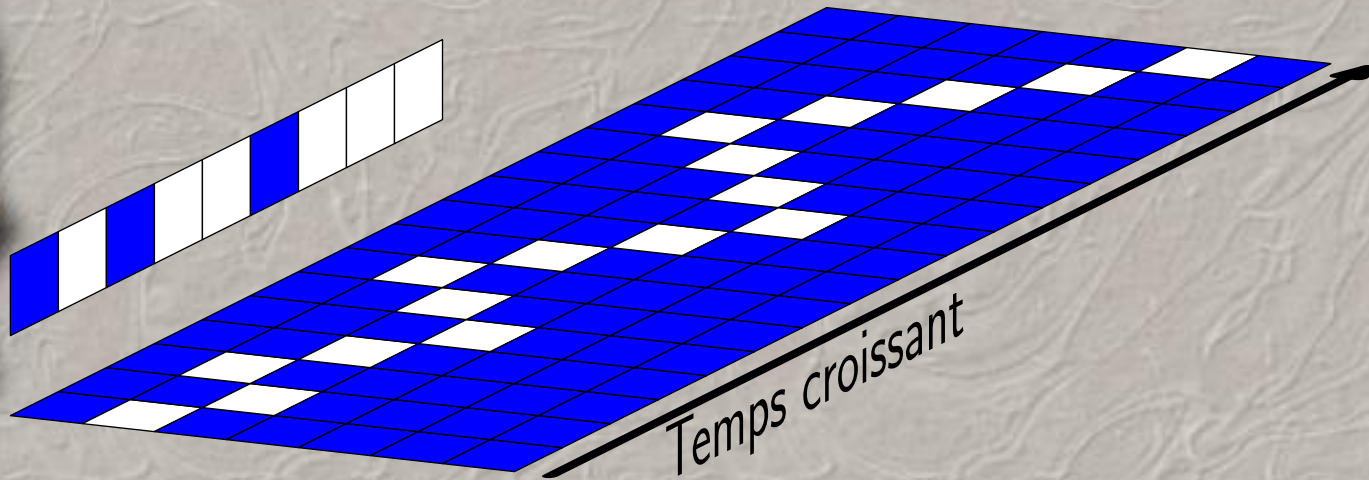
Construction Partitionner les états.



Notion de signal

Diagramme espace-temps d'un automate (9 états) :

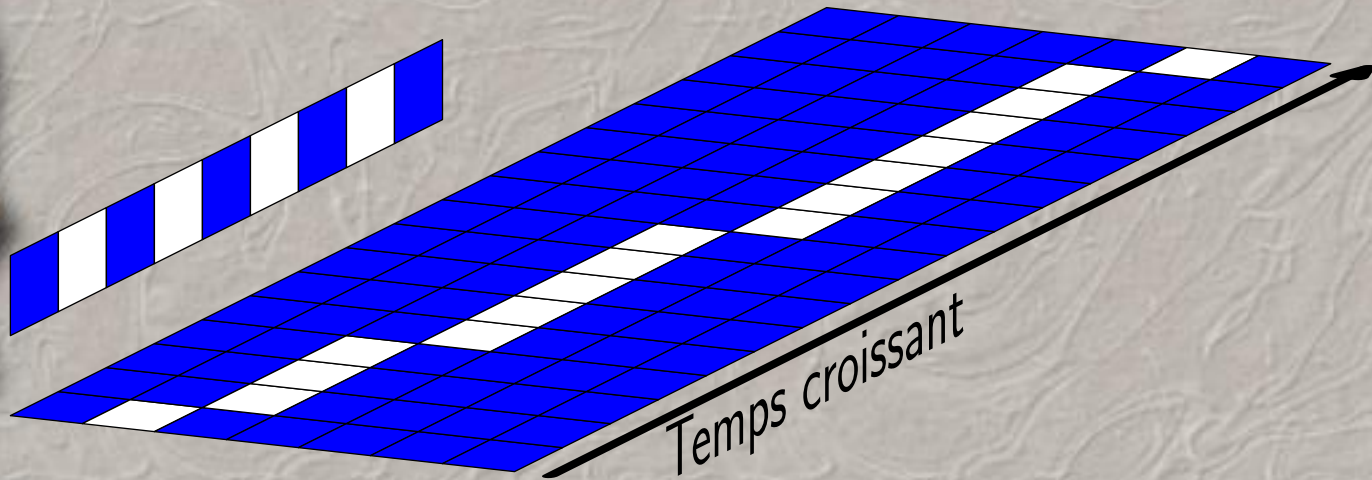
Construction Partitionner les états.



Notion de signal

Diagramme espace-temps d'un automate (9 états) :

Construction Partitionner les états.



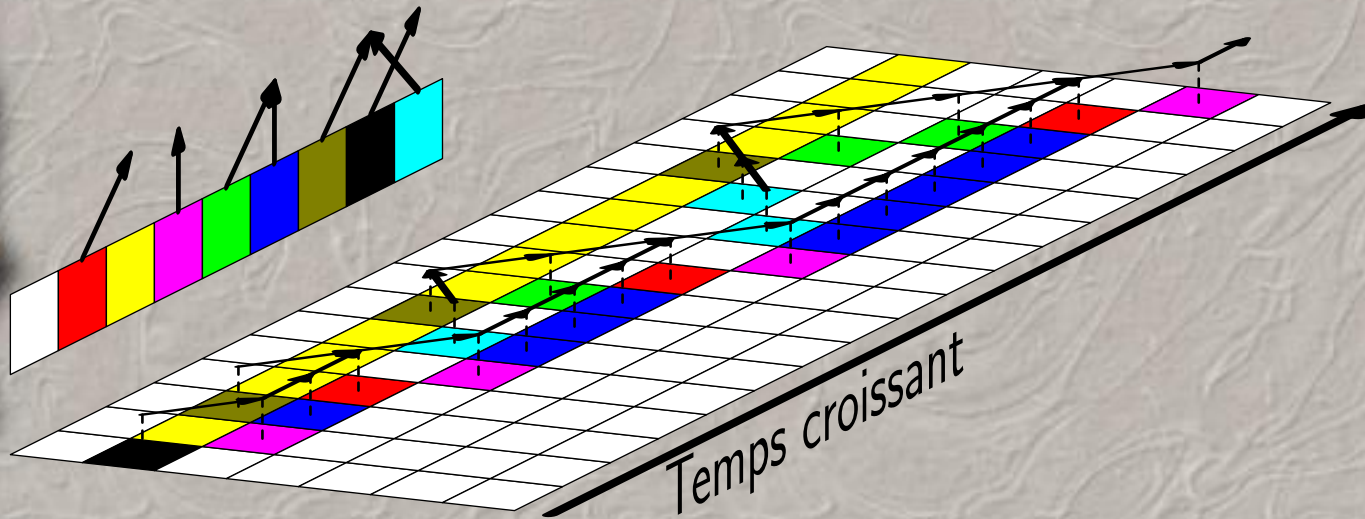
Notion de signal



Diagramme espace-temps d'un automate (9 états) :



Construction Partitionner les états.

Détection Décider d'une direction.

Support Utiliser un automate fini.





Définition 3 (AC à impulsion) *On se donne un automate cellulaire A possédant deux états distingués,  et  tel que $f(\square, \dots, \square) = \square$. On étudie le diagramme espace-temps de A appliqué à la configuration $\infty \left\{ \square \square \square \color{red}\square \square \square \square \right\} \infty$.*

Définition 3 (AC à impulsion) On se donne un automate cellulaire A possédant deux états distingués,  et  tel que $f(\text{white}, \dots, \text{white}) = \text{white}$. On étudie le diagramme espace-temps de A appliqué à la configuration $\infty \left\langle \text{white} \text{ white} \text{ white} \text{ red} \text{ white} \text{ white} \text{ white} \right\rangle \infty$.

Définition 4 (Signal) Un V -signal Γ est une séquence de sites $\{(\mathbf{u}(t), t)\}_{t \geq 0}$ tels que

- $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$.
- $\forall t \geq 0 : \mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t) \in V$.

Définition 3 (AC à impulsion) On se donne un automate cellulaire A possédant deux états distingués,  et  tel que $f(\text{white}, \dots, \text{white}) = \text{white}$. On étudie le diagramme espace-temps de A appliqué à la configuration $\infty \left[\text{white} \text{white} \text{white} \text{red} \text{white} \text{white} \text{white} \right] \infty$.

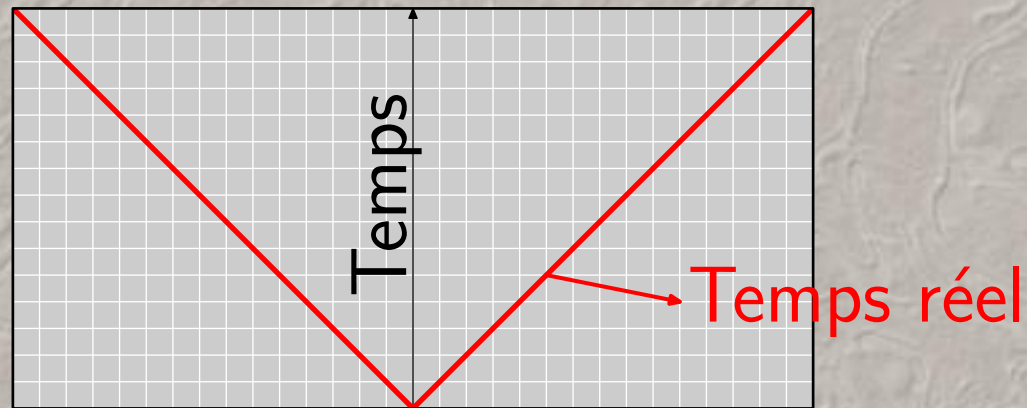
Définition 4 (Signal) Un V -signal Γ est une séquence de sites $\{(\mathbf{u}(t), t)\}_{t \geq 0}$ tels que

- $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$.
- $\forall t \geq 0 : \mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t) \in V$.

Définition 5 (Signaux de base) On appelle signal de base tout signal qui est ultimement périodique.

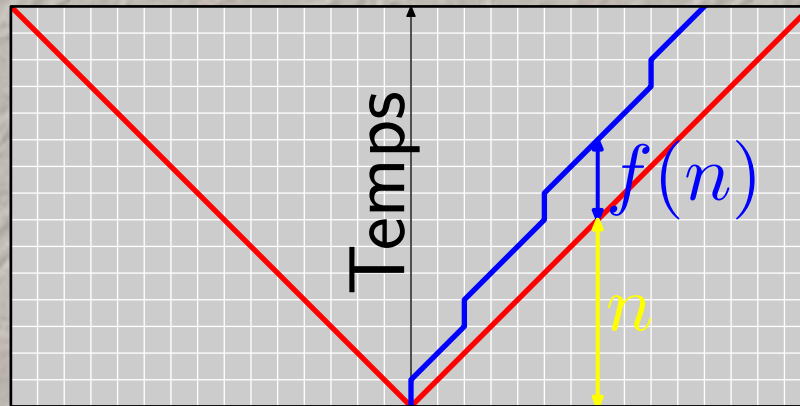
Faire des signaux rapides

Le signal le plus « rapide » que l'on sache faire est le signal de temps réel :



Faire des signaux rapides

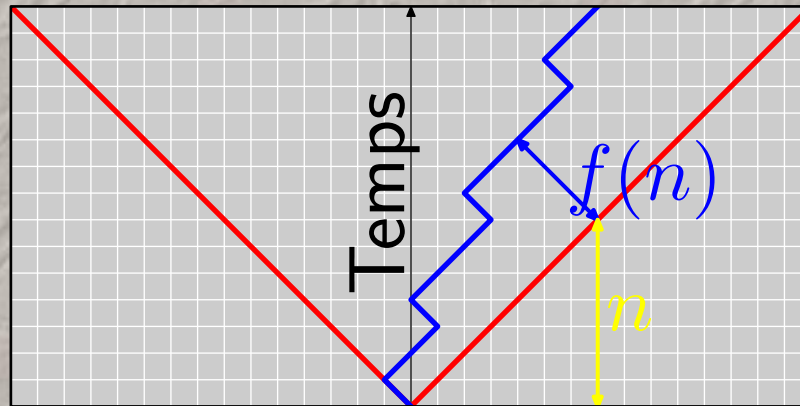
Le signal le plus « rapide » que l'on sache faire est le signal de temps réel :



Un signal peut « définir » une fonction f , soit par le signal $(n, n + f(n))$,

Faire des signaux rapides

Le signal le plus « rapide » que l'on sache faire est le signal de temps réel :



Un signal peut « définir » une fonction f , soit par le signal $(n, n + f(n))$, soit par le signal $(n - f(n), n + f(n)) \implies$ *pente* du signal.

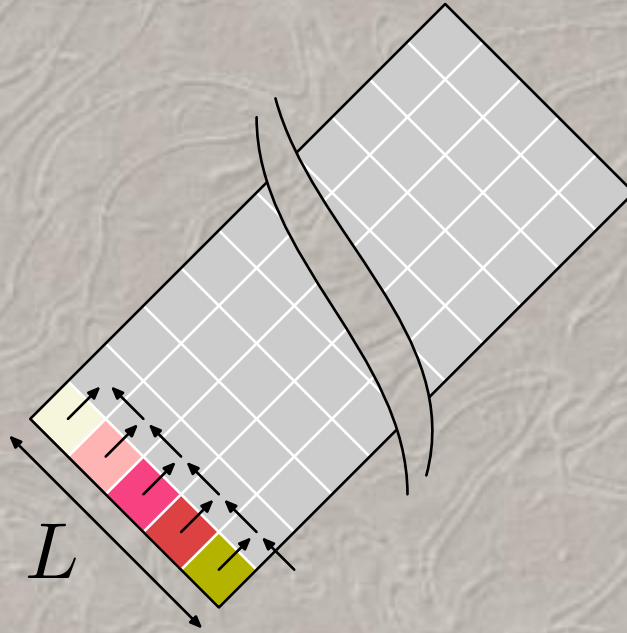
Construction de signaux complexes

On ne peut pas construire n'importe quel signal qui ne soit pas de base.

Théorème 1 *Soit A un AC à q états. Alors il n'est pas possible de construire un signal non ultimement périodique de pente inférieure à :*

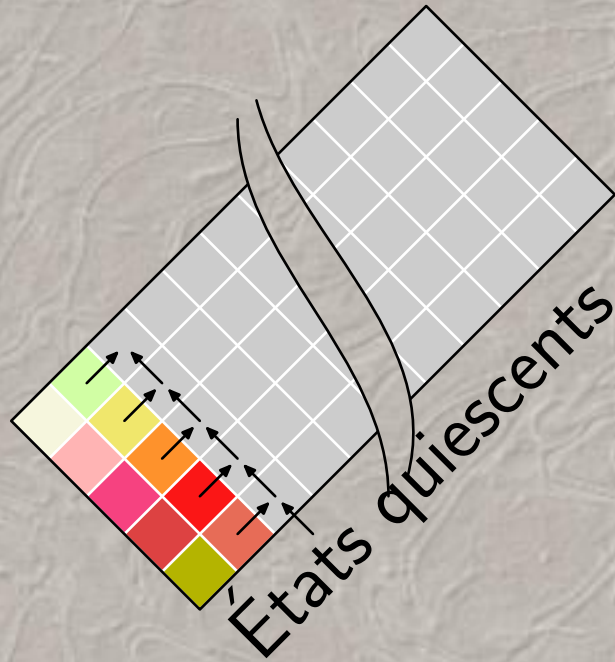
- $\log_q(n)$ en dimension 1,
- $\log_{\text{ppcm } 1\dots q}(n)$ en dimension supérieure.

En dimension 1 : bandes périodiques



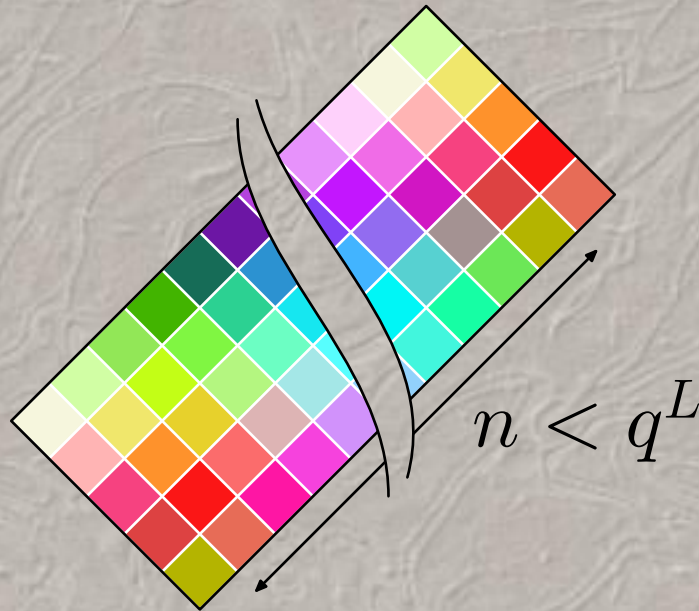
On considère une tranche de taille L . Elle est composée de lamelles.

En dimension 1 : bandes périodiques



On considère une tranche de taille L . Elle est composée de lamelles. Chaque lamelle dépend uniquement de la lamelle précédente.

En dimension 1 : bandes périodiques



On considère une tranche de taille L . Elle est composée de lamelles. Chaque lamelle dépend uniquement de la lamelle précédente. Donc, il y a périodicité de la lamelle.

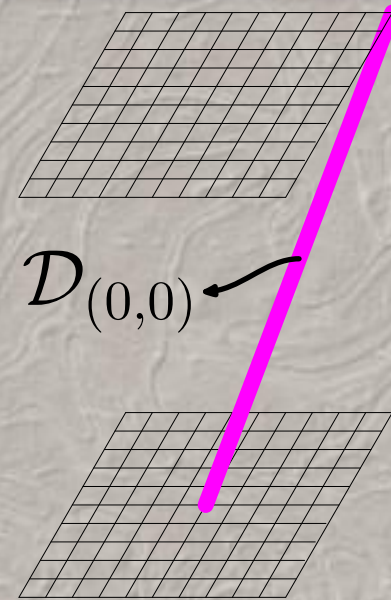
En dimension supérieures : généralisation

On définit \mathcal{D}_i comme suit :

$$\mathcal{D}_i^t = \langle t \cdot \mathbf{1} - \mathbf{i}, t \rangle$$

$$\mathcal{D}_i = \begin{cases} (\mathcal{D}_i^t)_{t \geq \lceil \max(i_1, \dots, i_k)/2 \rceil} & \text{if } \mathbf{i} \in \mathbf{N}^k \\ \lambda^\infty & \text{else.} \end{cases}$$

– \mathcal{D}_0 est le signal de temps réel.



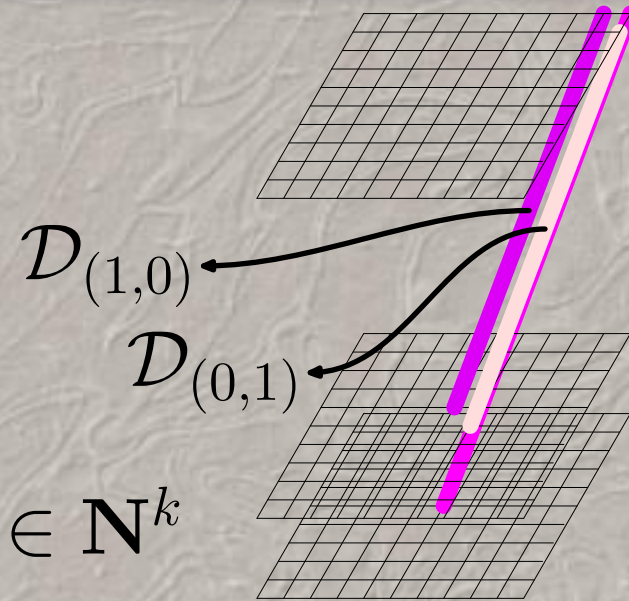
En dimension supérieures : généralisation

On définit \mathcal{D}_i comme suit :

$$\mathcal{D}_i^t = \langle t \cdot \mathbf{1} - \mathbf{i}, t \rangle$$

$$\mathcal{D}_i = \begin{cases} (\mathcal{D}_i^t)_{t \geq \lceil \max(i_1, \dots, i_k)/2 \rceil} & \text{if } \mathbf{i} \in \mathbf{N}^k \\ \lambda^\infty & \text{else.} \end{cases}$$

– \mathcal{D}_0 est le signal de temps réel.



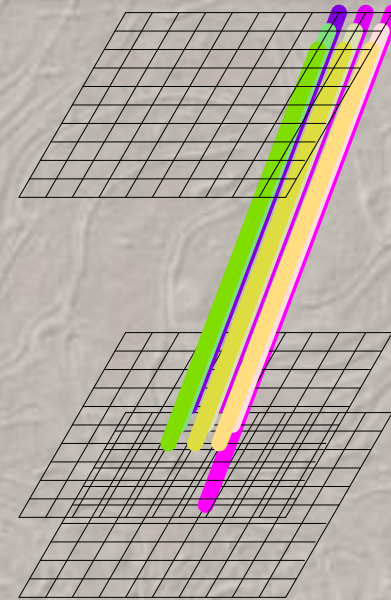
En dimension supérieures : généralisation

On définit \mathcal{D}_i comme suit :

$$\mathcal{D}_i^t = \langle t \cdot \mathbf{1} - \mathbf{i}, t \rangle$$

$$\mathcal{D}_i = \begin{cases} (\mathcal{D}_i^t)_{t \geq \lceil \max(i_1, \dots, i_k)/2 \rceil} & \text{if } \mathbf{i} \in \mathbf{N}^k \\ \lambda^\infty & \text{else.} \end{cases}$$

- \mathcal{D}_0 est le signal de temps réel.
- Mots infinis, définis à partir d'un état potentiellement non quiescent.



En dimension supérieures : généralisation

On définit \mathcal{D}_i comme suit :

$$\mathcal{D}_i^t = \langle t \cdot \mathbf{1} - \mathbf{i}, t \rangle$$

$$\mathcal{D}_i = \begin{cases} (\mathcal{D}_i^t)_{t \geq \lceil \max(i_1, \dots, i_k)/2 \rceil} & \text{if } \mathbf{i} \in \mathbf{N}^k \\ \lambda^\infty & \text{else.} \end{cases}$$

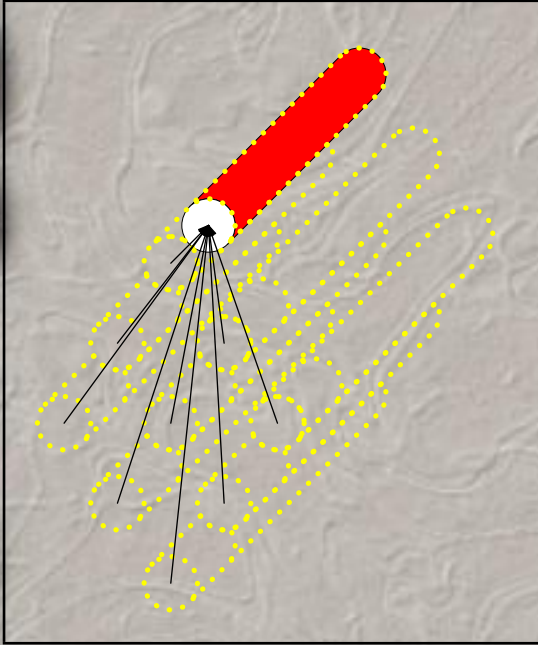


- \mathcal{D}_0 est le signal de temps réel.
- Mots infinis, définis à partir d'un état potentiellement non quiescent.

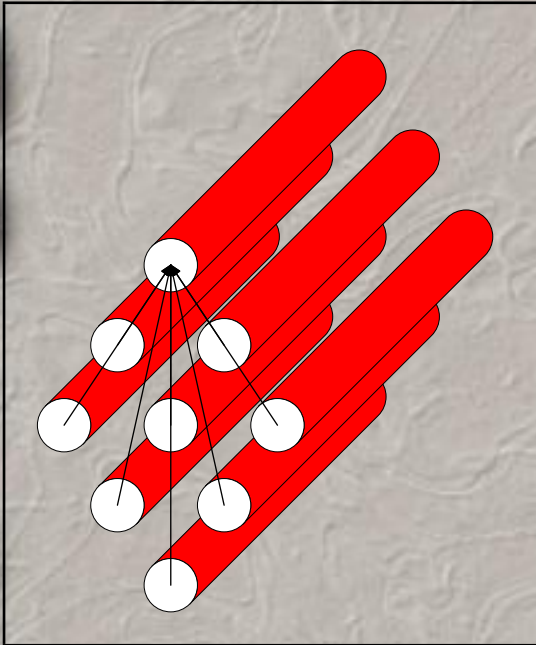
Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$,



Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$,



Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$, on va conserver une relation sur la périodicité de \mathcal{D}_i par rapport à la périodicité des \mathcal{D}_{i-x-1} pour $x \in V_{\text{Moore}}$.

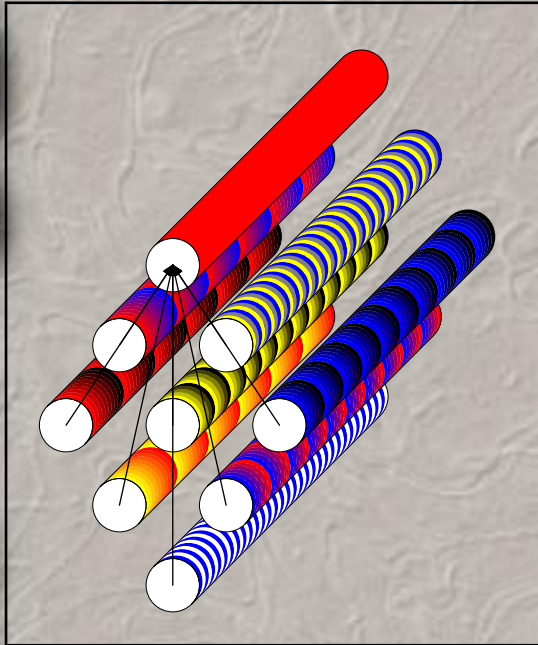


Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$, on va conserver une relation sur la périodicité de \mathcal{D}_i par rapport à la périodicité des \mathcal{D}_{i-x-1} pour $x \in V_{\text{Moore}}$.

\mathcal{D}_{i-x-1} est périodique ($x \in V_{\text{Moore}}$)

$\Rightarrow \mathcal{D}_i$ est périodique.

(comportement d'automate à q états).



Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$, on va conserver une relation sur la périodicité de \mathcal{D}_i par rapport à la périodicité des \mathcal{D}_{i-x-1} pour $x \in V_{\text{Moore}}$.

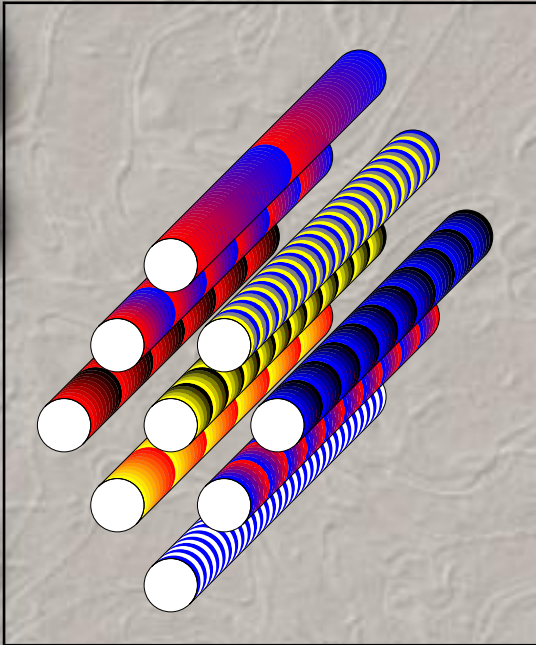
\mathcal{D}_{i-x-1} est périodique ($x \in V_{\text{Moore}}$)

$\Rightarrow \mathcal{D}_i$ est périodique.

(comportement d'automate à q états).

On a écroutement des périodes :

2, 3, 5, 6, 10 \Rightarrow 30 et non 1800. La période du 8-uplet est le ppcm des périodes.



Comme \mathcal{D}_i^{t+1} dépend de \mathcal{D}_{i-x-1}^t avec $x \in V_{\text{Moore}}$, on va conserver une relation sur la périodicité de \mathcal{D}_i par rapport à la périodicité des \mathcal{D}_{i-x-1} pour $x \in V_{\text{Moore}}$.

\mathcal{D}_{i-x-1} est périodique ($x \in V_{\text{Moore}}$)

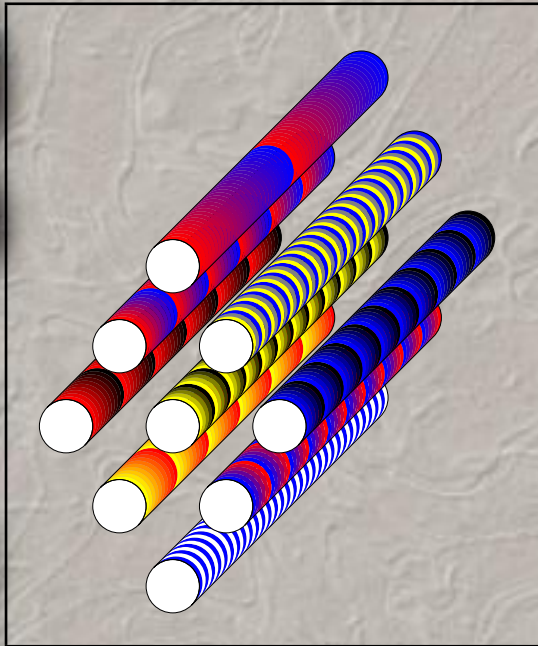
$\Rightarrow \mathcal{D}_i$ est périodique.

(comportement d'automate à q états).

On a écoulement des périodes :

2, 3, 5, 6, 10 \Rightarrow 30 et non 1800. La période du 8-uplet est le ppcm des périodes.

\Rightarrow Chaque période divise donc $\text{ppcm}(1, \dots, q)^k$.



Théorème 2 (Dubacq, Terrier) *Pour tout $i \in \mathbf{Z}^k$, il existe*

$\alpha_i \in \mathcal{S}^$, $\beta_i \in \mathcal{S}^*$, $u_i \in \mathbf{N}$ et $v_i \in \mathbf{N}$ tels que :*

– $\mathcal{D}_i = \alpha_i (\beta_i)^\infty$.

– $u_i + v_i \leq |\mathcal{S}|$ *et* $1 \leq v_i \leq |\mathcal{S}|$.

– $|\alpha_i| \leq M_i + u_i P_i$, *où M_i est* $\max_{x \in V \text{ Moore} \setminus \{1\}} (|\alpha_{i-x-1}|)$.

– $|\beta_i|$ *divise* $v_i P_i$, *où P_i is* $\text{ppcm}_{x \in V \text{ Moore} \setminus \{1\}} (|\beta_{i-x-1}|)$.

Théorème 2 (Dubacq, Terrier) Pour tout $i \in \mathbf{Z}^k$, il existe

$\alpha_i \in \mathcal{S}^*$, $\beta_i \in \mathcal{S}^*$, $u_i \in \mathbf{N}$ et $v_i \in \mathbf{N}$ tels que :

– $\mathcal{D}_i = \alpha_i (\beta_i)^\infty$.

– $u_i + v_i \leq |\mathcal{S}|$ et $1 \leq v_i \leq |\mathcal{S}|$.

– $|\alpha_i| \leq M_i + u_i P_i$, où M_i est $\max_{x \in V \text{ Moore} \setminus \{1\}} (|\alpha_{i-x-1}|)$.

– $|\beta_i|$ divise $v_i P_i$, où P_i is $\text{ppcm}_{x \in V \text{ Moore} \setminus \{1\}} (|\beta_{i-x-1}|)$.

Plus précisément :

– $|\alpha_i| < |\mathcal{S}| \text{ppcm}(1, \dots, |\mathcal{S}|)^{i_1 + \dots + i_k}$.

– $|\beta_i|$ divise $\text{ppcm}(1, \dots, |\mathcal{S}|)^{i_1 + \dots + i_k + 1}$.

Réduction d'états : logarithme en base 2

Soit $\ell(t) = \lfloor \log_2(t + 1) \rfloor$. Il est possible de détecter le signal $\Gamma = (t - \ell(t), t - \ell(t), t + \ell(t))$ avec le voisinage treillis.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$	Règle n°
λ	λ	λ	λ	λ	#0
1	λ	λ	λ	0	#1
0	λ	λ	λ	1	#2
λ	λ	0	1	1	#3
1	λ	0	1	0	#4
0	λ	0	1	1	#5
1	λ	1	0	1	#6
1	λ	0	0	1	#7
0	λ	1	0	0	#8
0	λ	0	0	0	#9
*	1	λ	*	1	#10
*	1	1	*	1	#11
*	1	0	*	0	#12
*	0	*	*	0	#13
*	*	*	*	λ	#14

a, b, c et d sont les cellules avec les coordonnées relatives suivantes :

- a est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- b est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- c est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- d est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les règles sont classées par ordre de priorité.

Réduction d'états : logarithme en base 2

Soit $\ell(t) = \lfloor \log_2(t + 1) \rfloor$. Il est possible de détecter le signal $\Gamma = (t - \ell(t), t - \ell(t), t + \ell(t))$ avec le voisinage treillis.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$	Règle n°
λ	λ	λ	λ	λ	#0
1	λ	λ	λ	0	#1
0	λ	λ	λ	1	#2
λ	λ	0	1	1	#3
1	λ	0	1	0	#4
0	λ	0	1	1	#5
1	λ	1	0	1	#6
1	λ	0	0	1	#7
0	λ	1	0	0	#8
0	λ	0	0	0	#9
*	1	λ	*	1	#10
*	1	1	*	1	#11
*	1	0	*	0	#12
*	0	*	*	0	#13
*	*	*	*	λ	#14

a, b, c et d sont les cellules avec les coordonnées relatives suivantes :

- a est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- b est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- c est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- d est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 états + λ
(dimension 2)

Les règles sont classées par ordre de priorité.

Réduction d'états : logarithme en base 2

Soit $\ell(t) = \lfloor \log_2(t + 1) \rfloor$. Il est possible de détecter le signal $\Gamma = (t - \ell(t), t - \ell(t), t + \ell(t))$ avec le voisinage treillis.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$	Règle n°
λ	λ	λ	λ	λ	#0
1	λ	λ	λ	0	#1
0	λ	λ	λ	1	#2
λ	λ	0	1	1	#3
1	λ	0	1	0	#4
0	λ	0	1	1	#5
1	λ	1	0	1	#6
1	λ	0	0	1	#7
0	λ	1	0	0	#8
0	λ	0	0	0	#9
*	1	λ	*	1	#10
*	1	1	*	1	#11
*	1	0	*	0	#12
*	0	*	*	0	#13
*	*	*	*	λ	#14

a, b, c et d sont les cellules avec les coordonnées relatives suivantes :

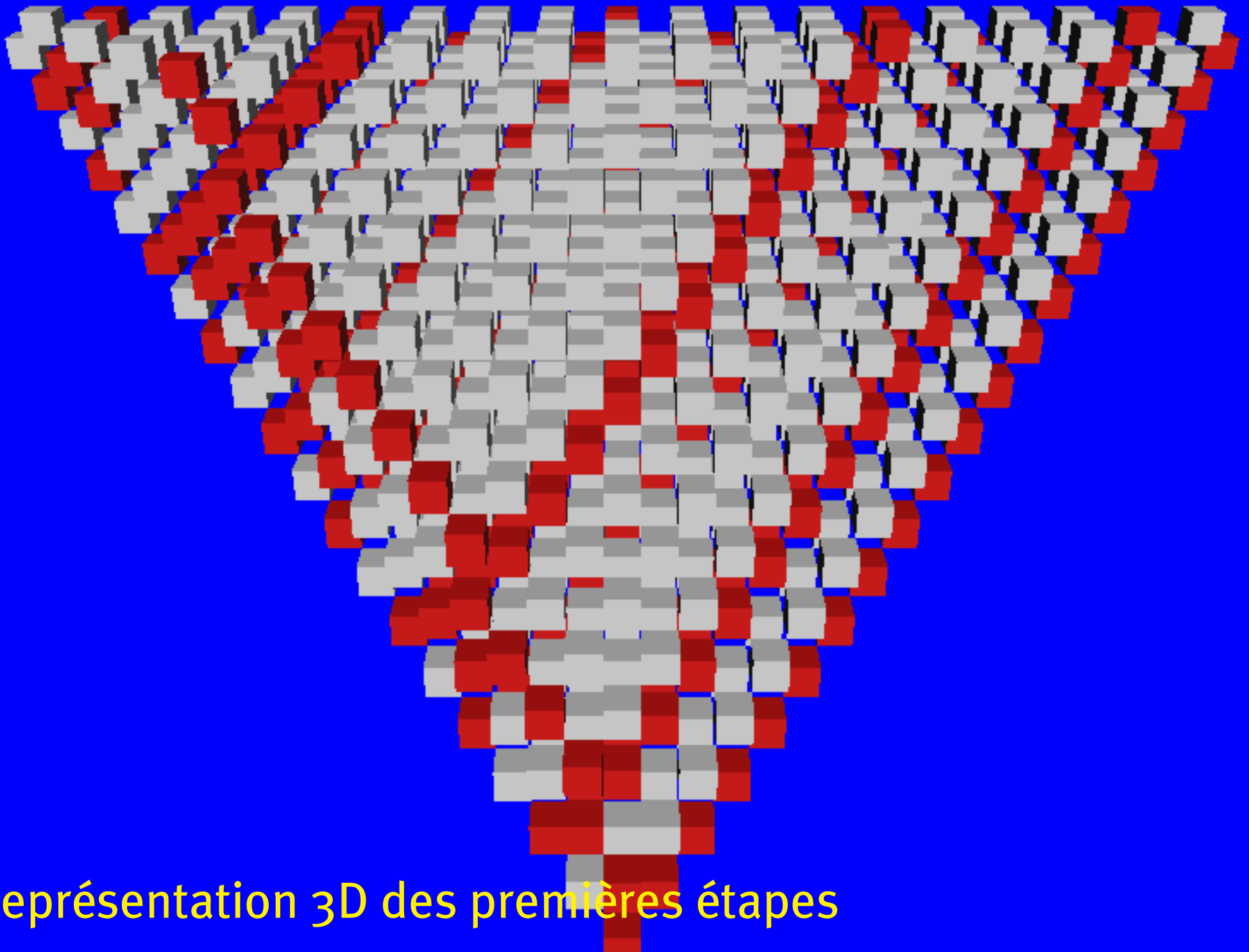
- a est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- b est $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- c est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
- d est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 états + λ
(dimension 2)

3 états + λ
(dimension 1)

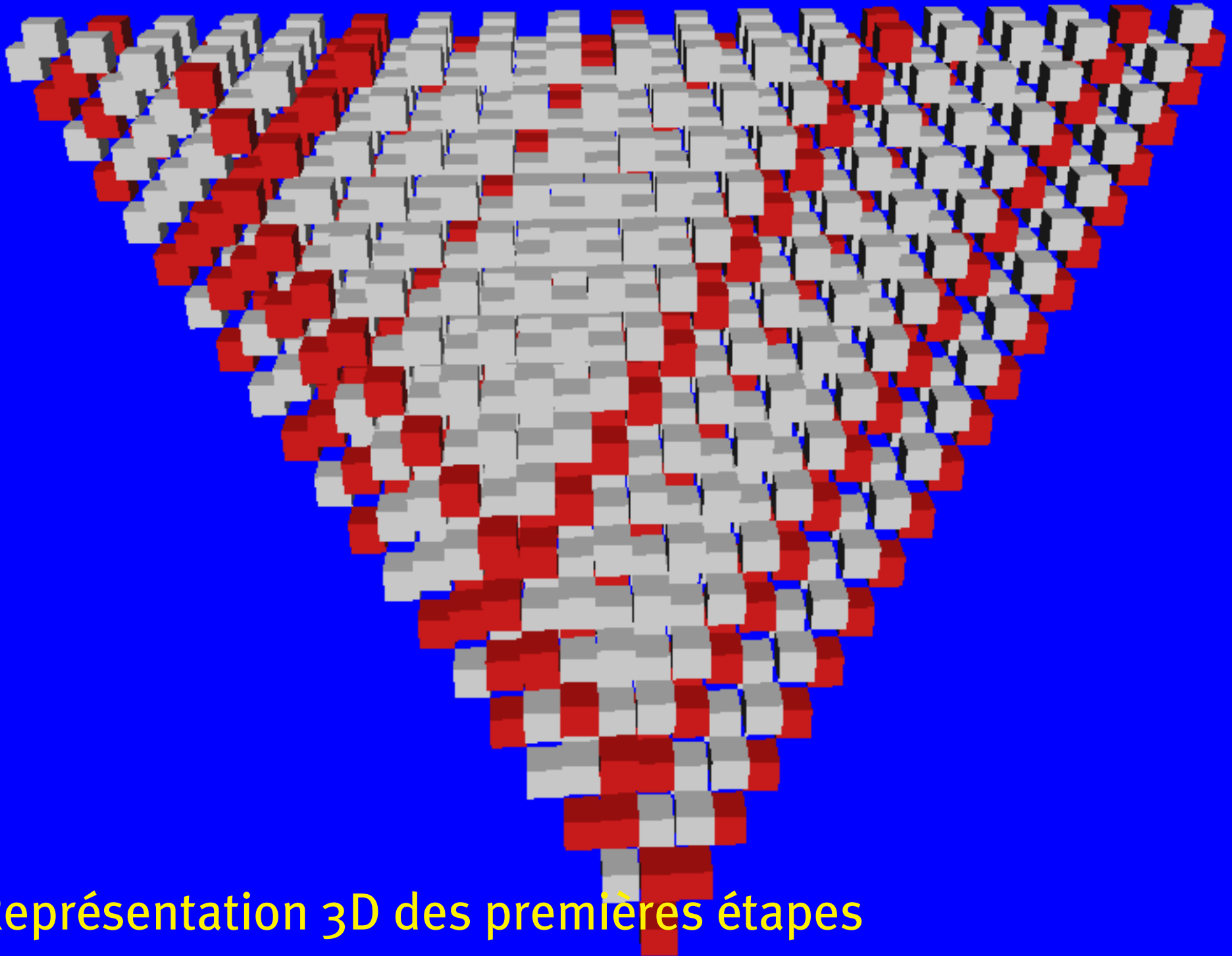
Les règles sont classées par ordre de priorité.

Temps=20



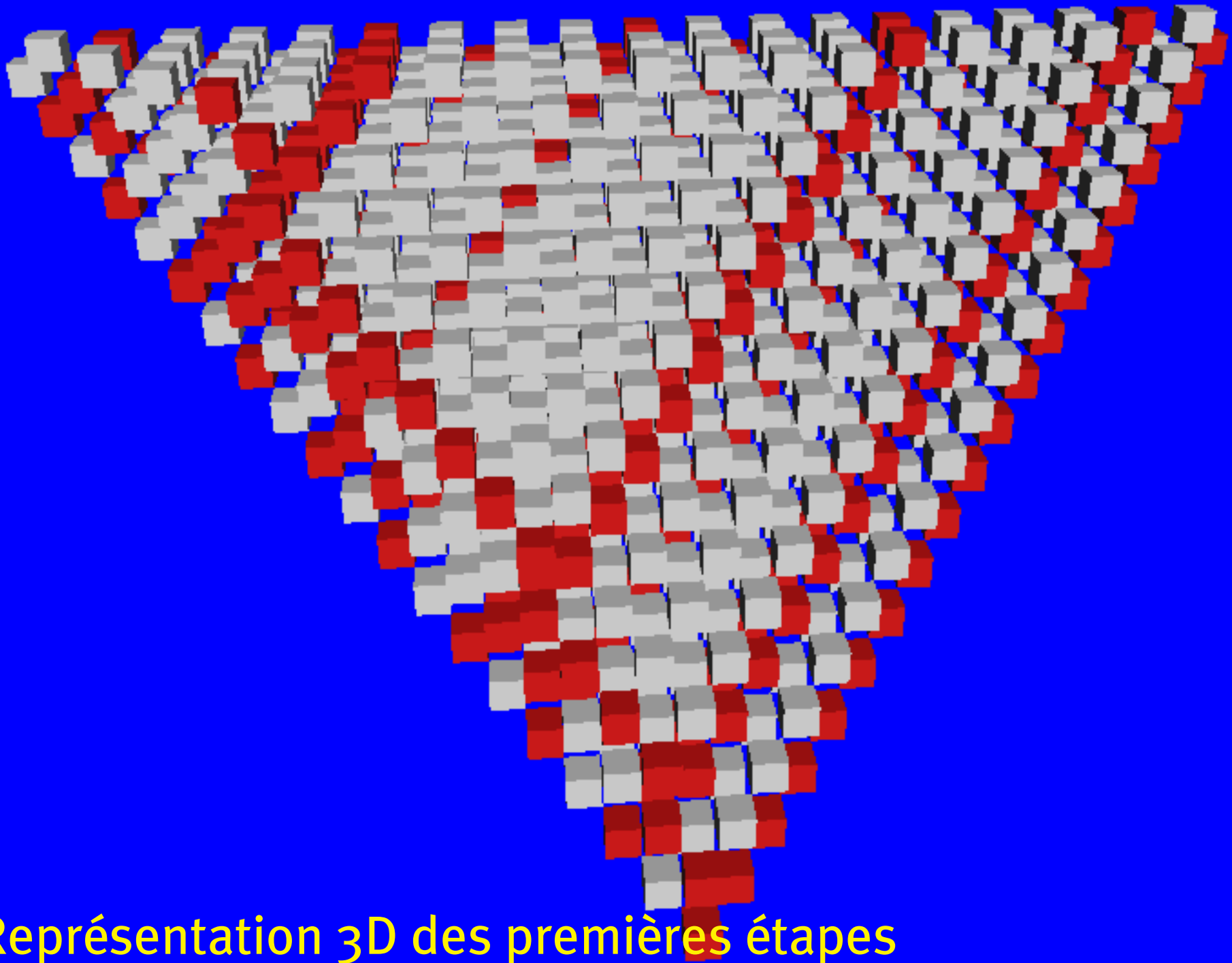
Représentation 3D des premières étapes

Temps=20



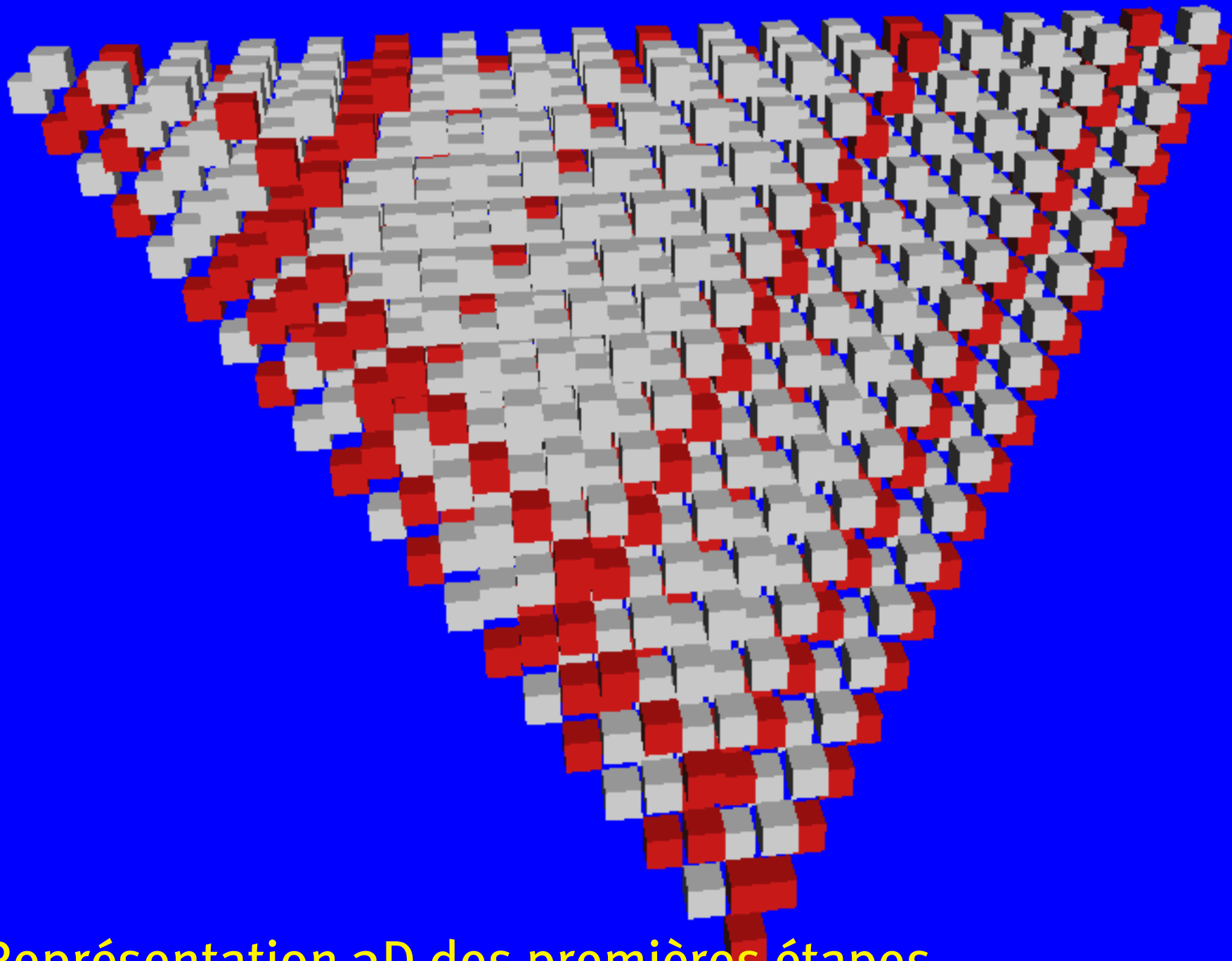
Représentation 3D des premières étapes

Temps=20



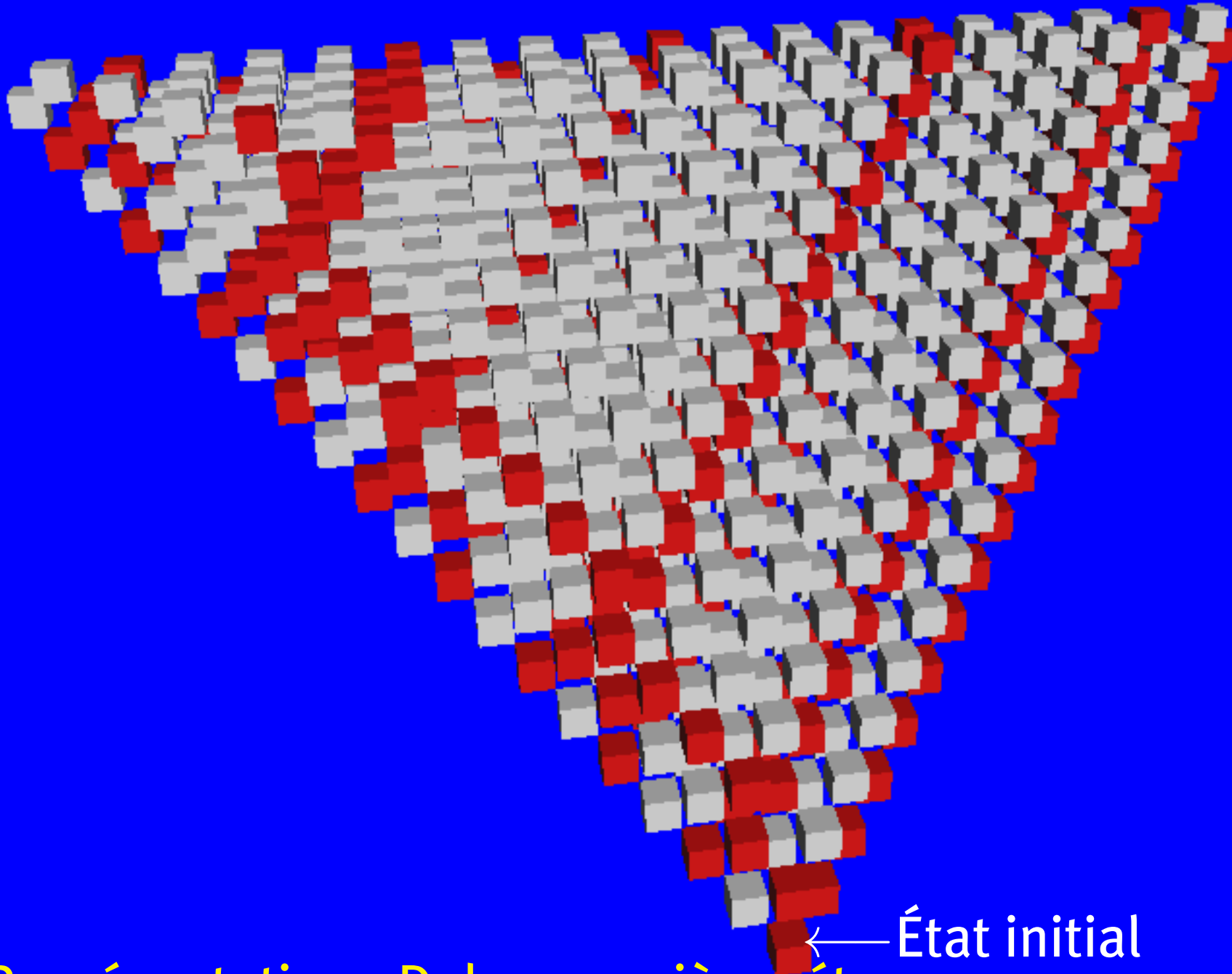
Représentation 3D des premières étapes

Temps=20



Représentation 3D des premières étapes

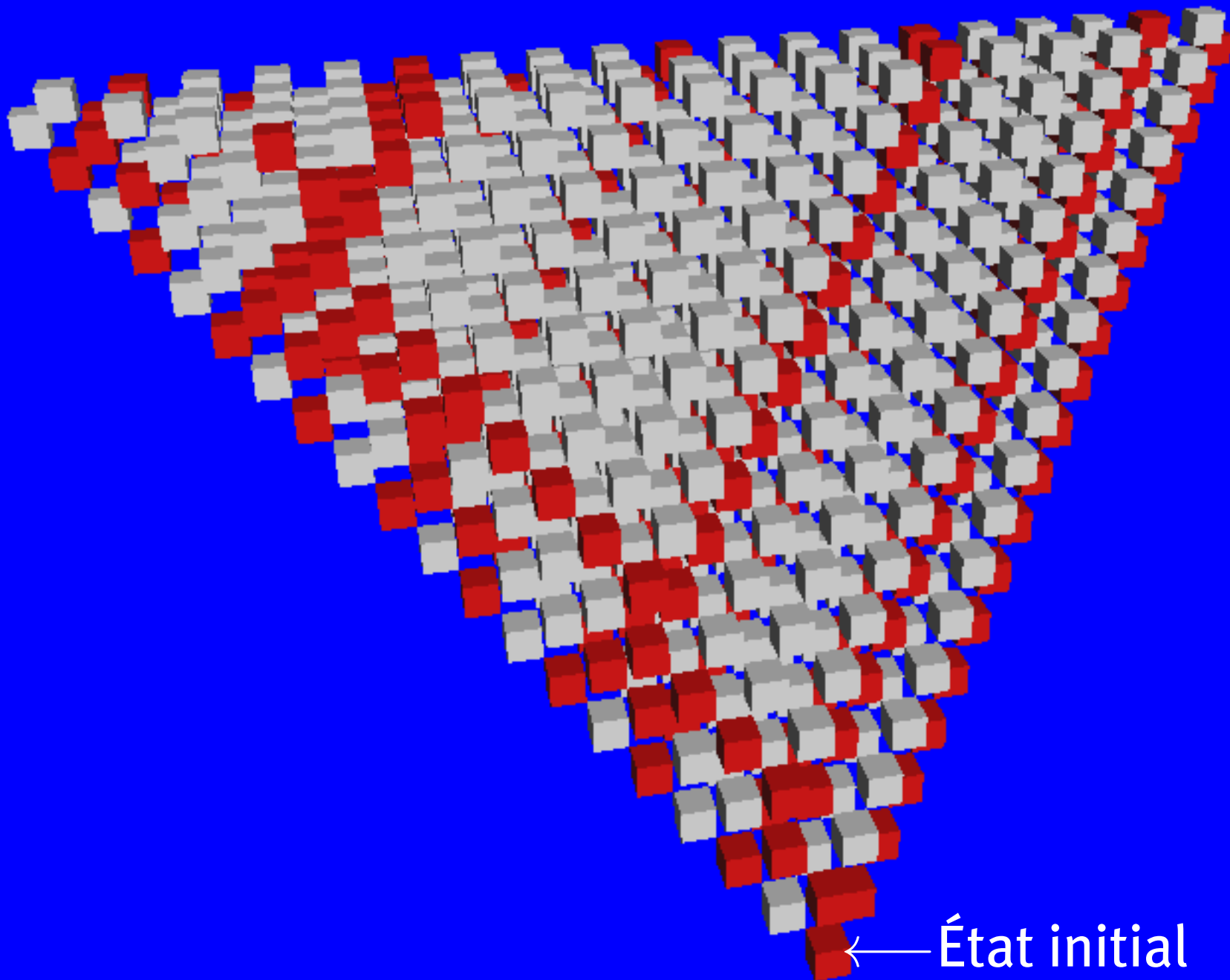
Temps=20



← État initial

Représentation 3D des premières étapes

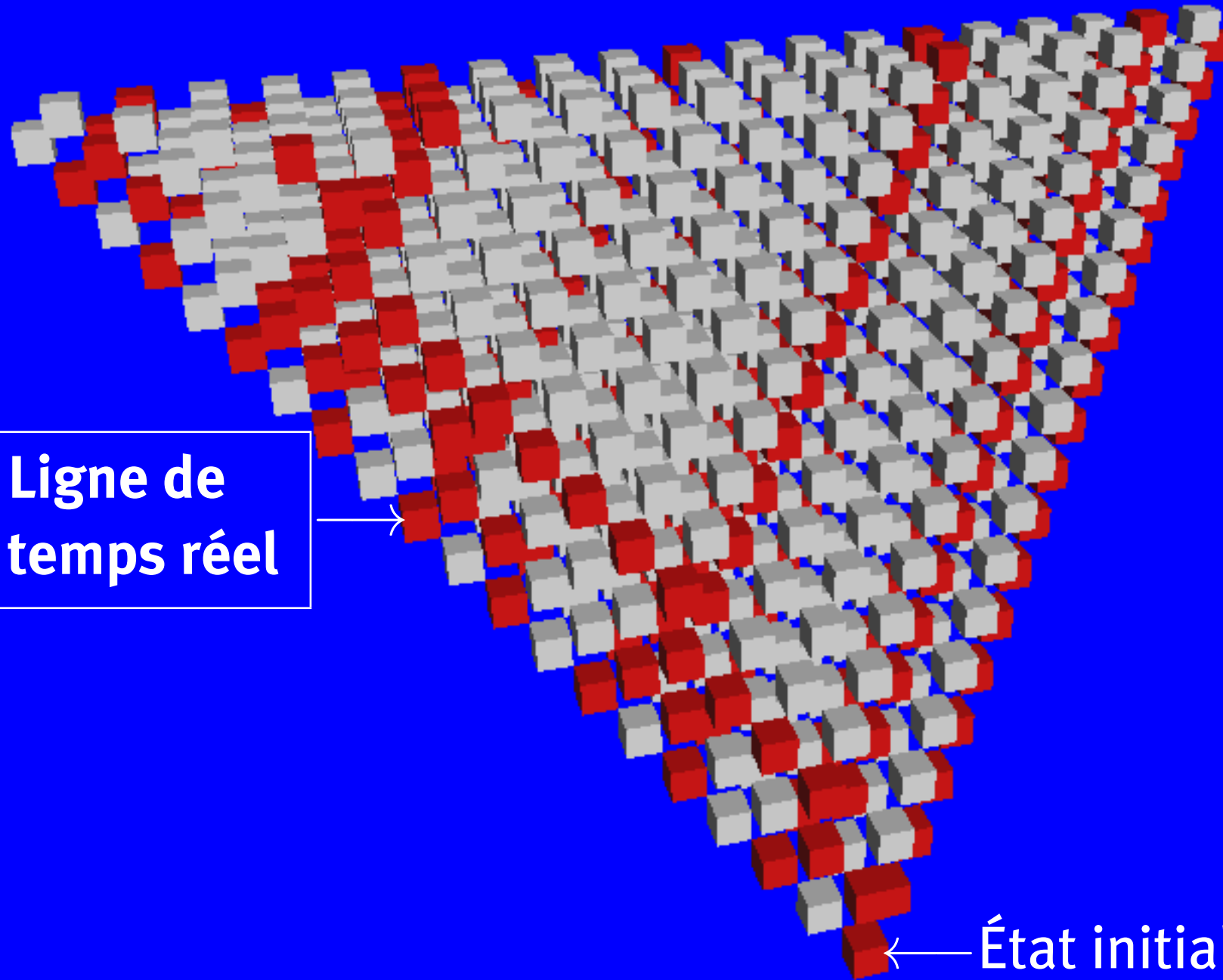
Temps=20



← État initial

Représentation 3D des premières étapes

Temps=20

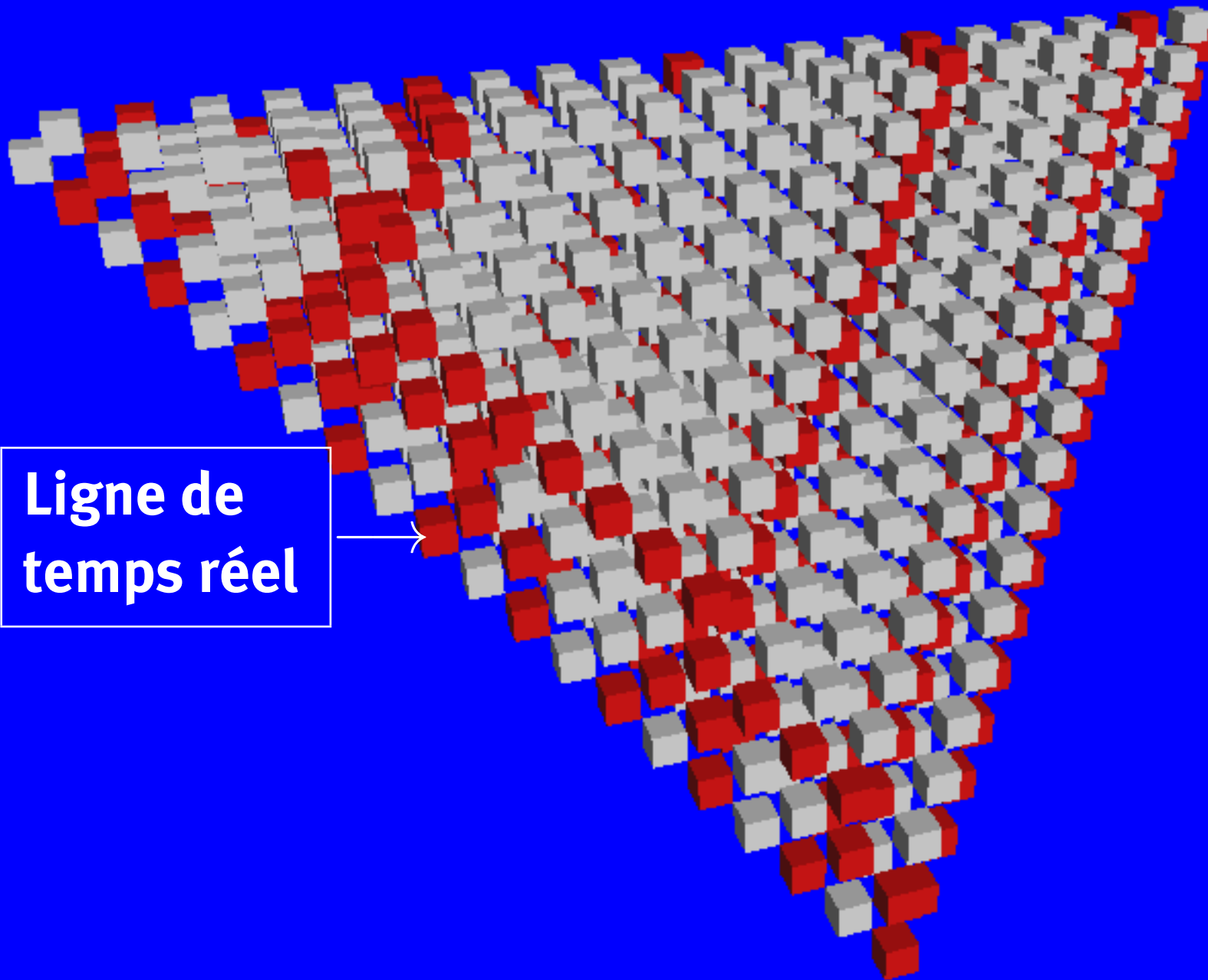


Ligne de temps réel

← État initial

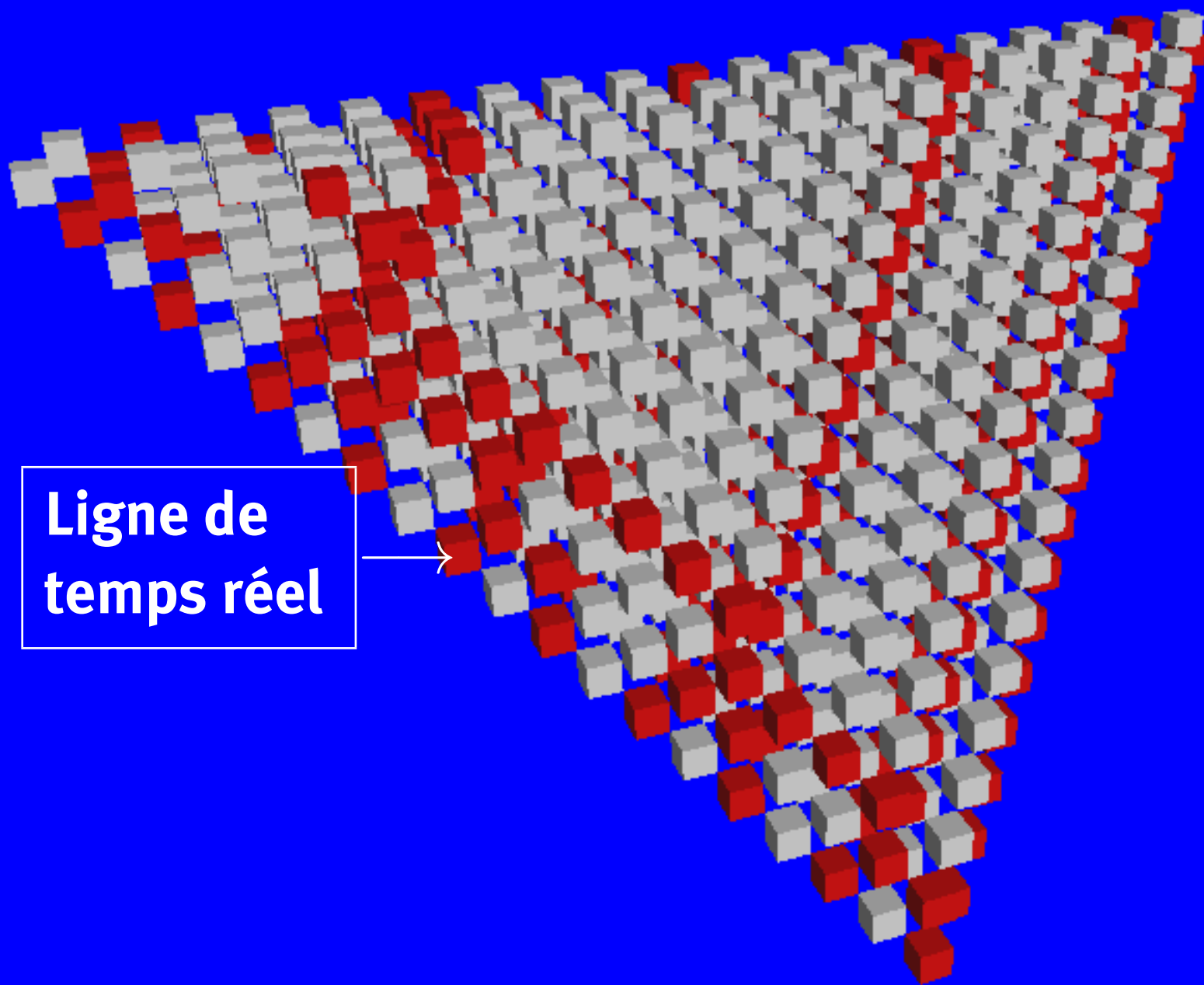
Représentation 3D des premières étapes

Temps=20



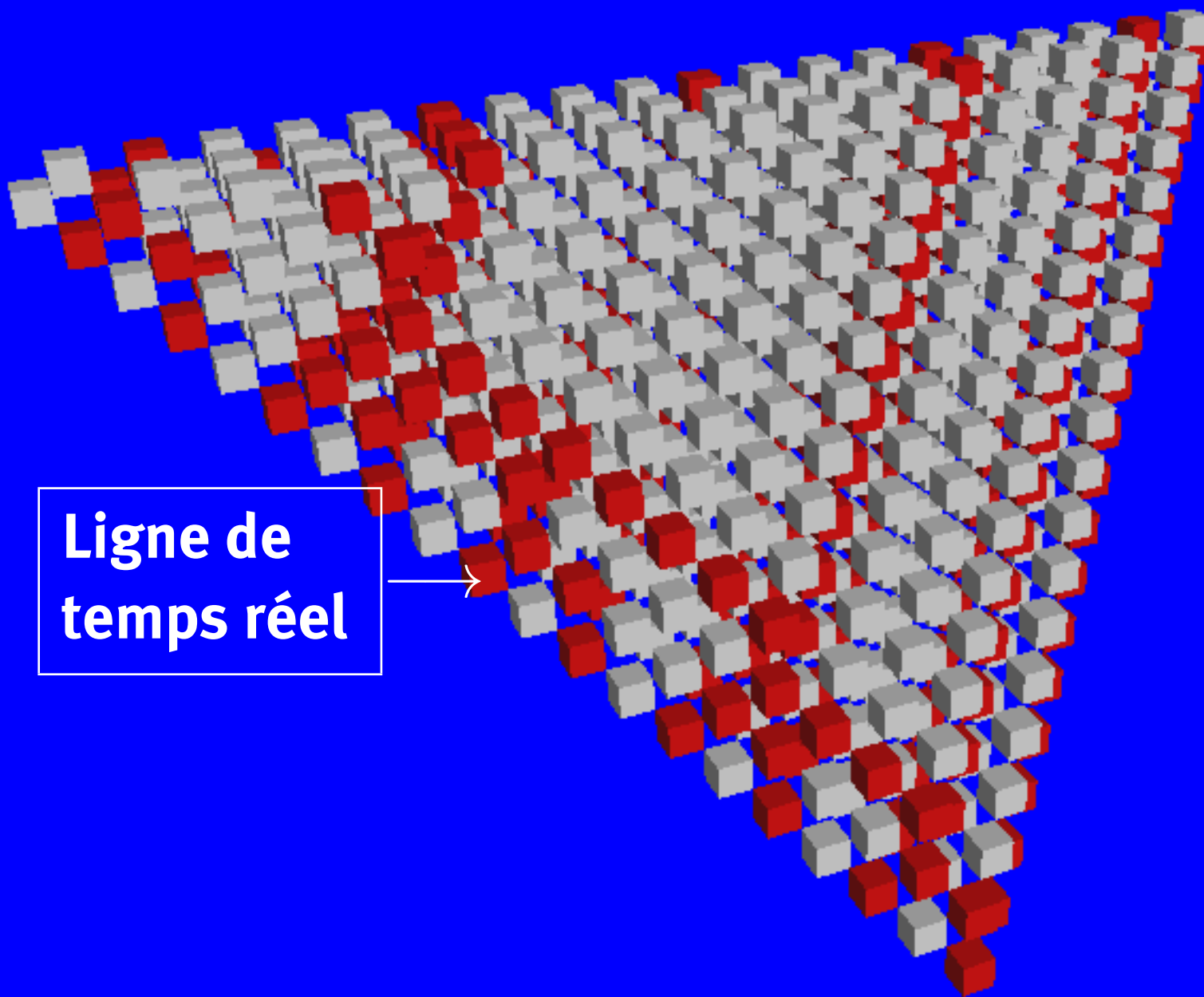
Ligne de
temps réel

Représentation 3D des premières étapes



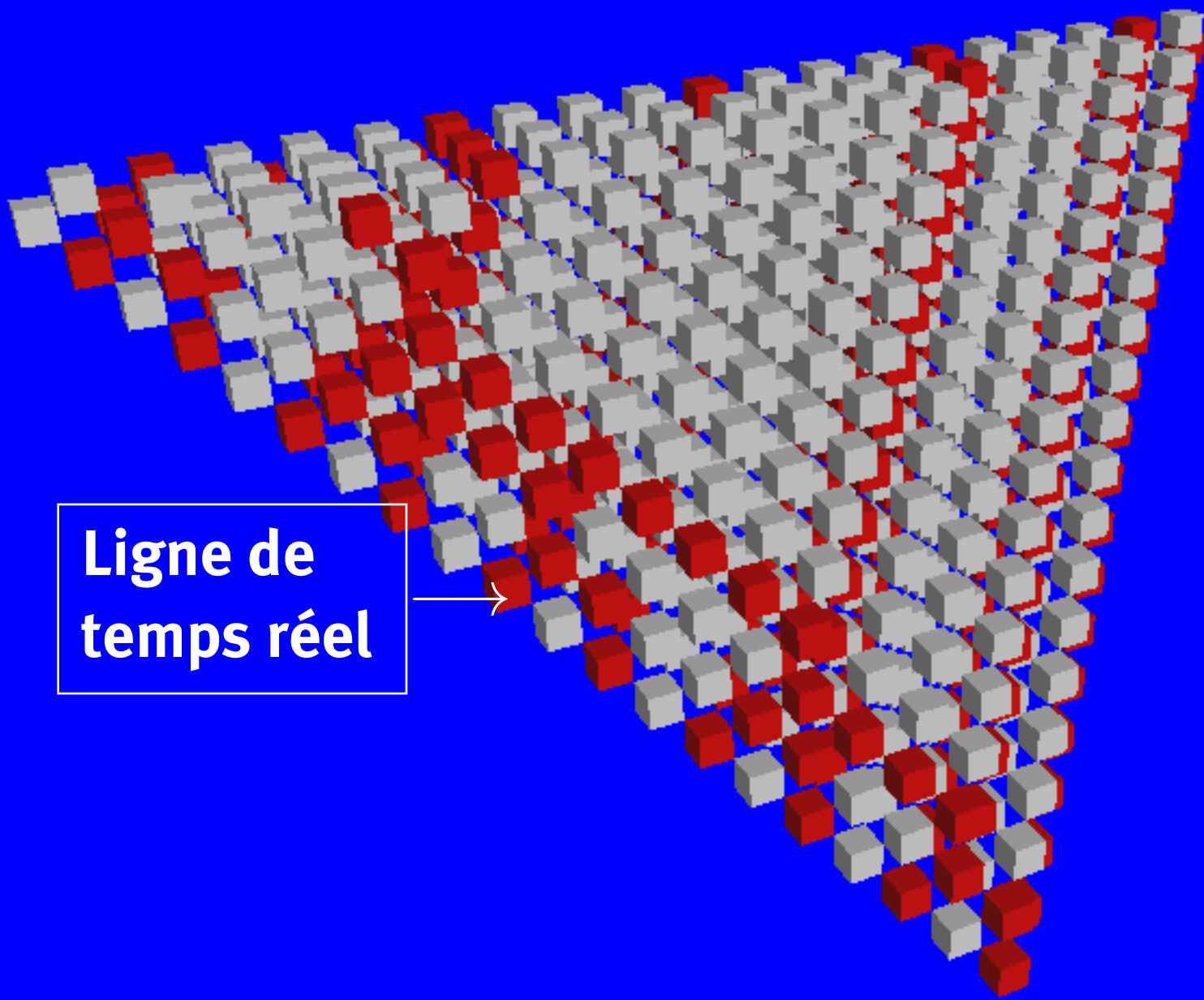
Ligne de
temps réel

Représentation 3D des premières étapes



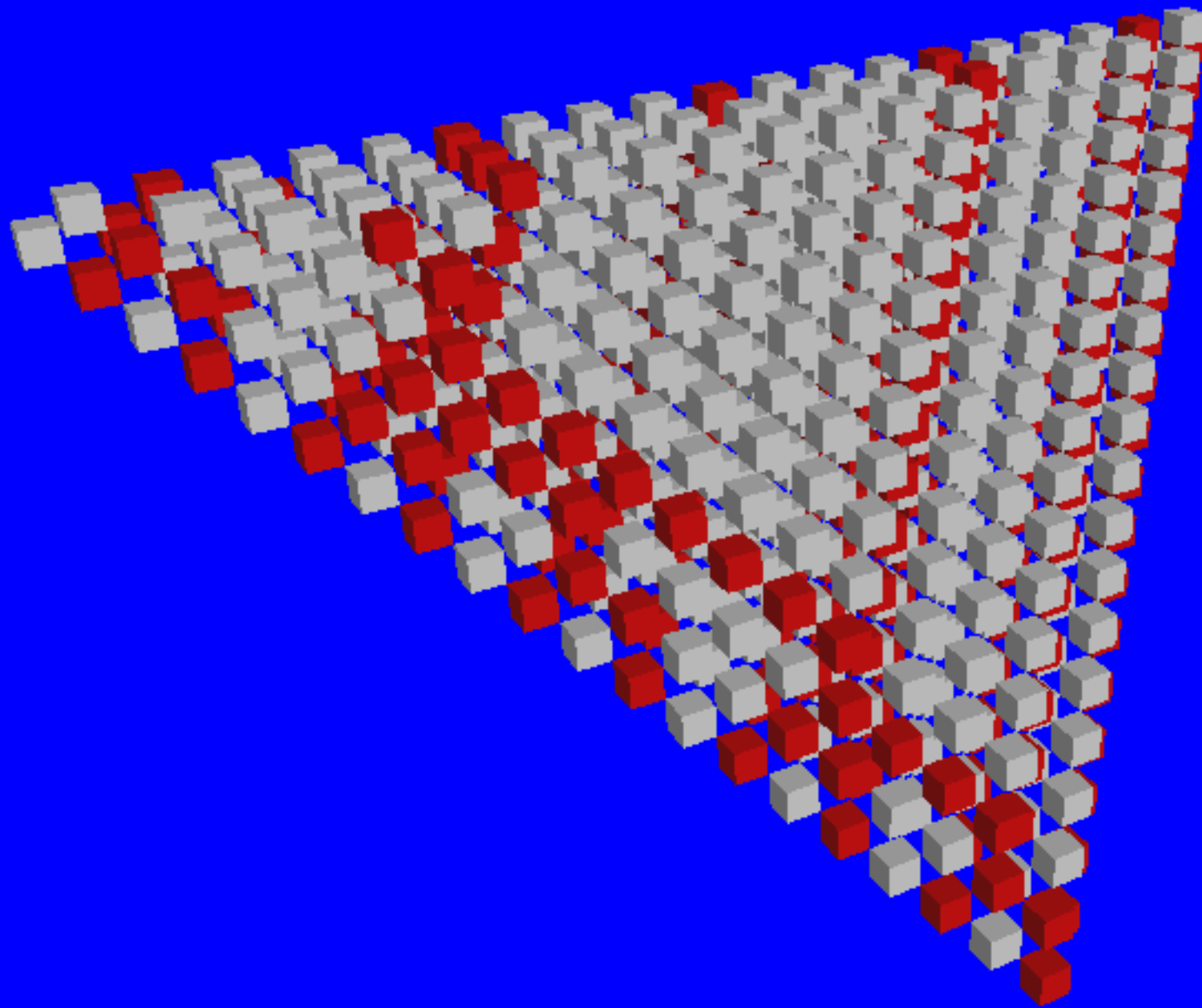
Ligne de
temps réel

Représentation 3D des premières étapes

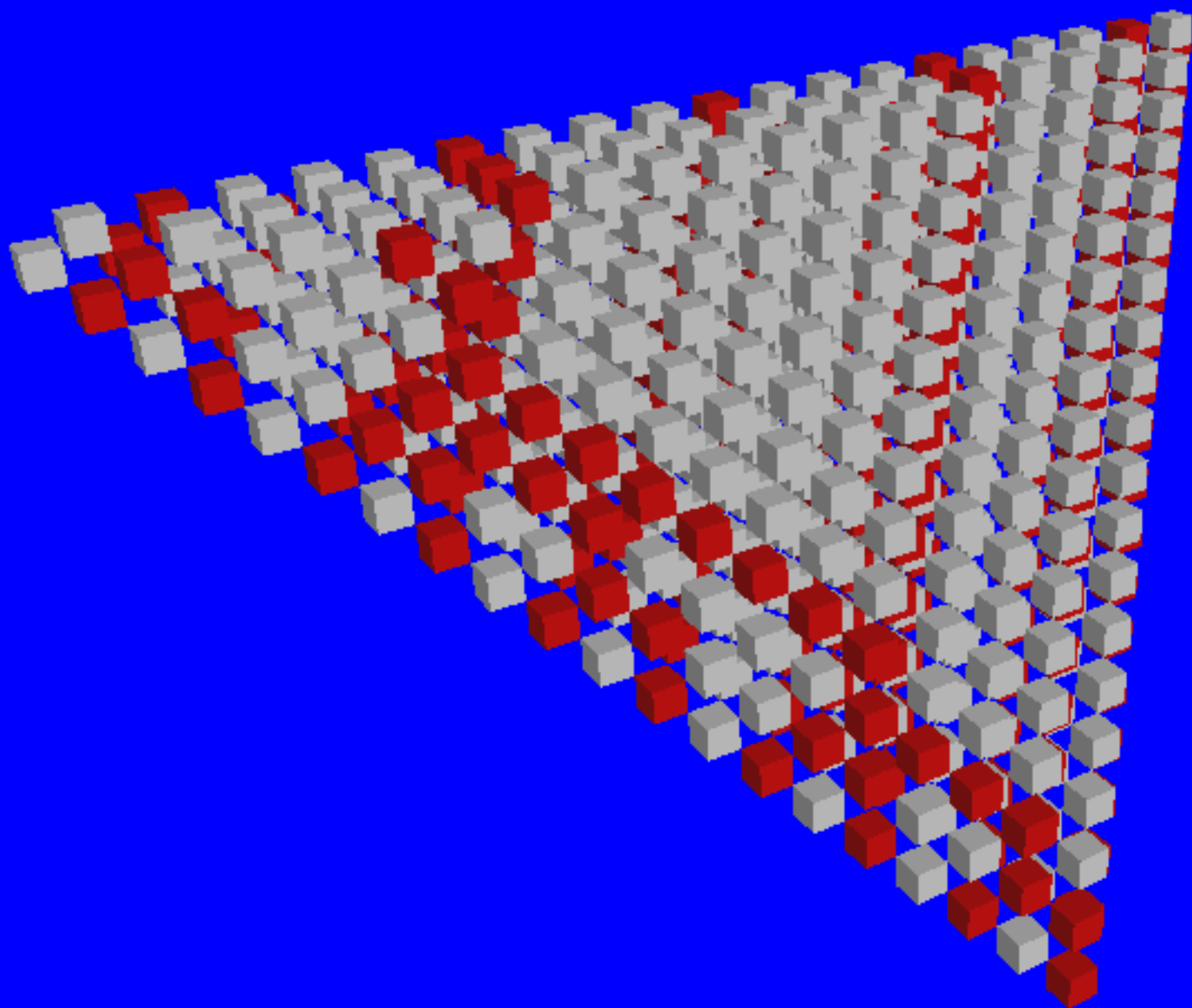


Ligne de
temps réel

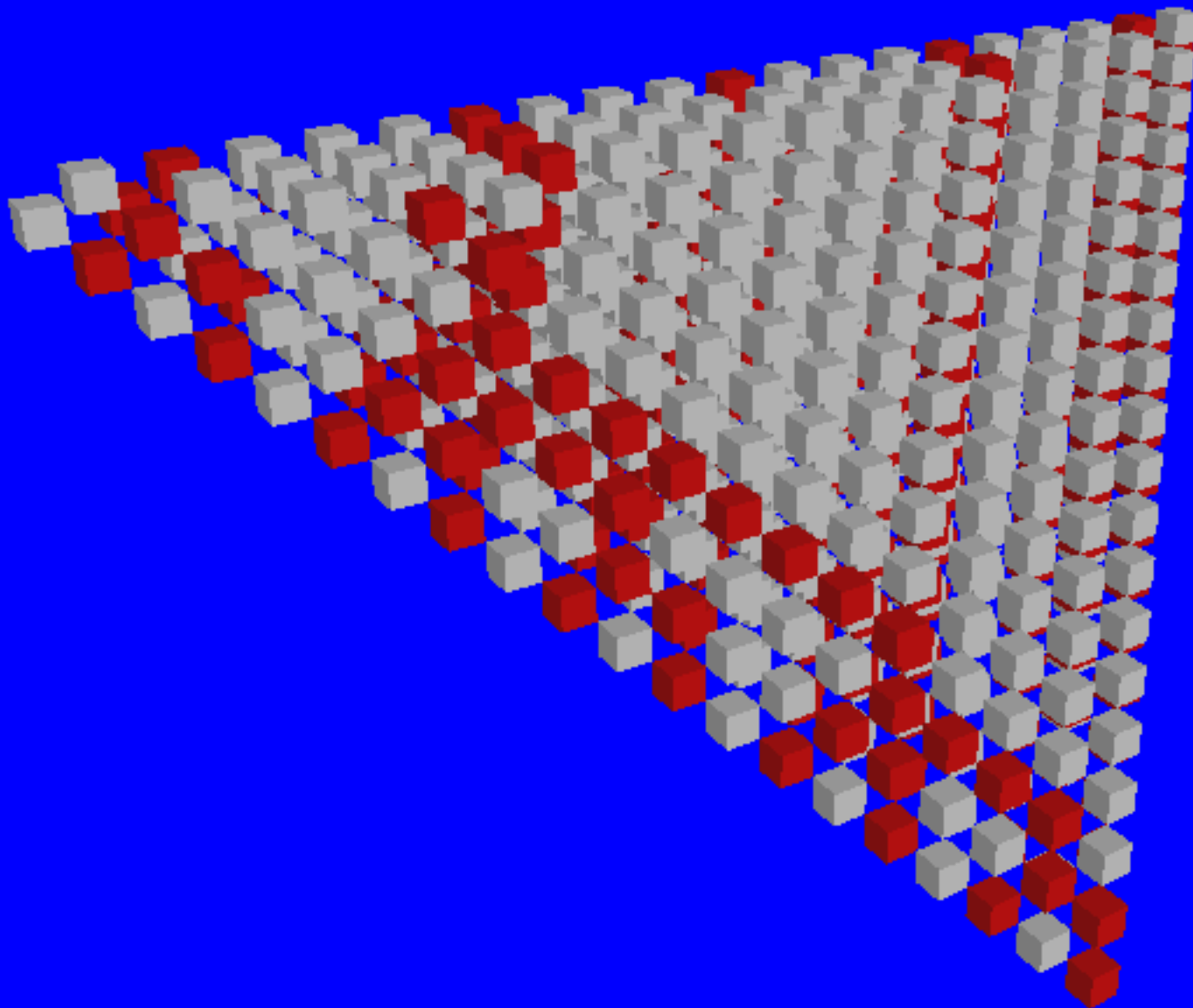
Représentation 3D des premières étapes



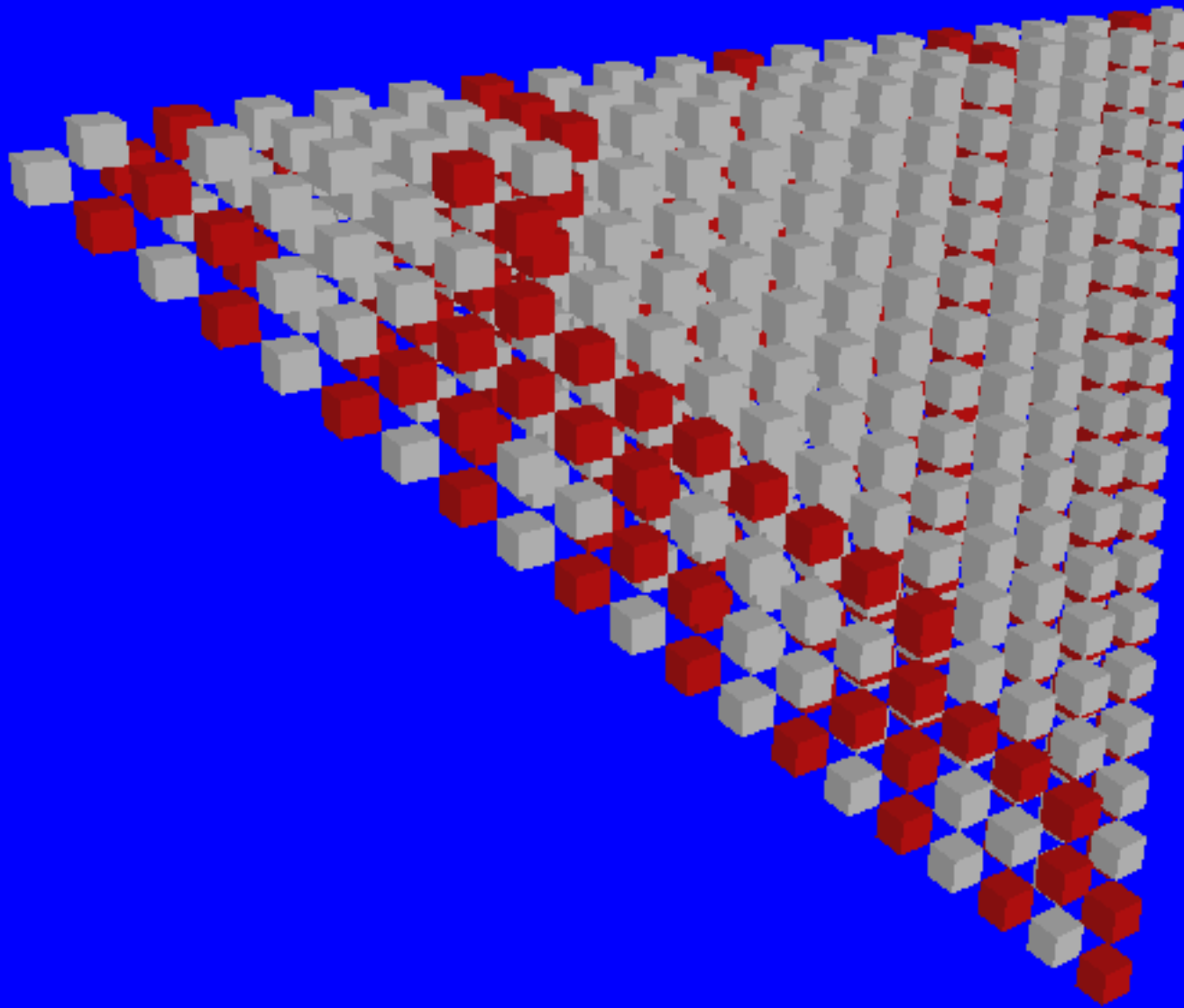
Représentation 3D des premières étapes



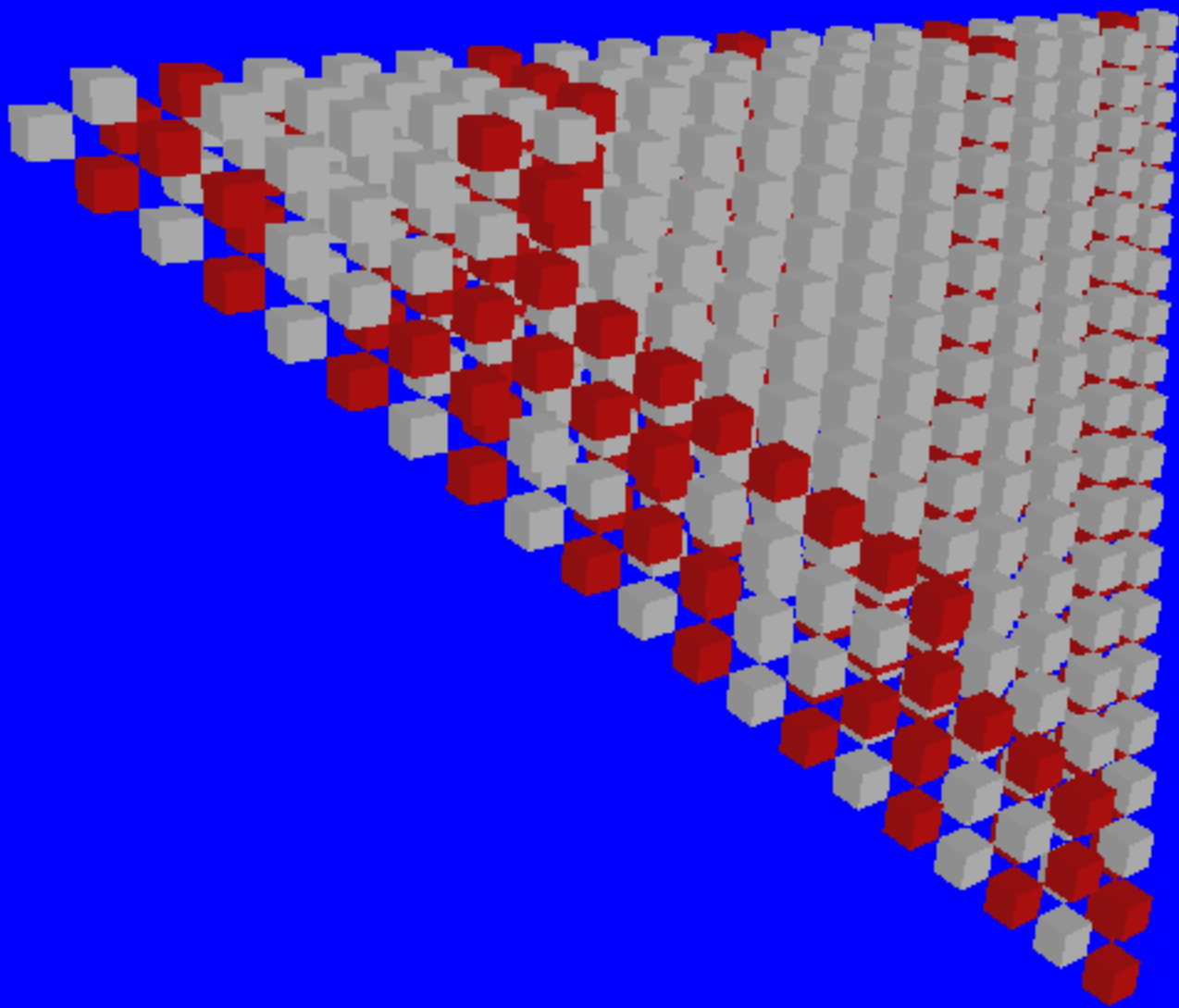
Représentation 3D des premières étapes



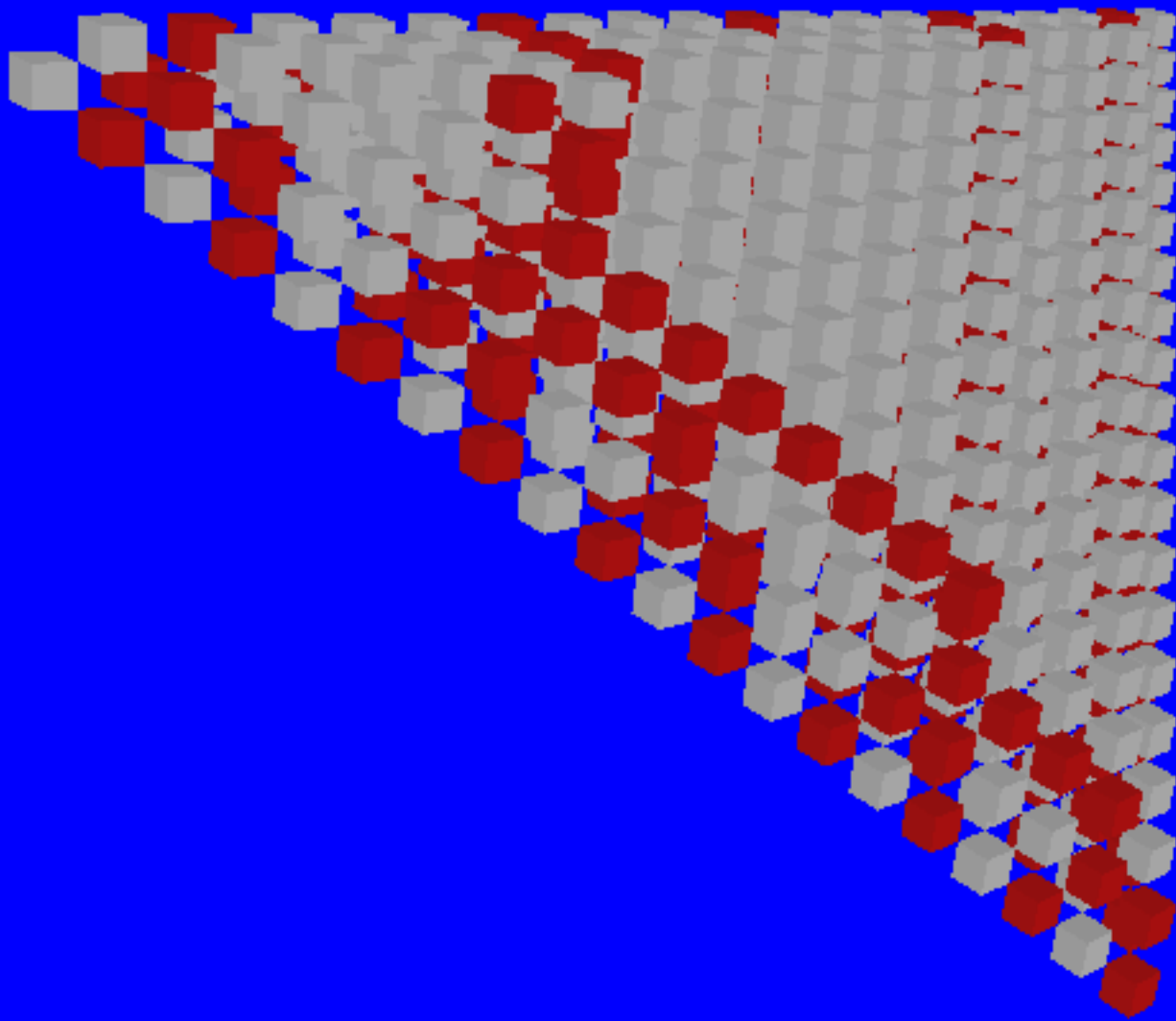
Représentation 3D des premières étapes



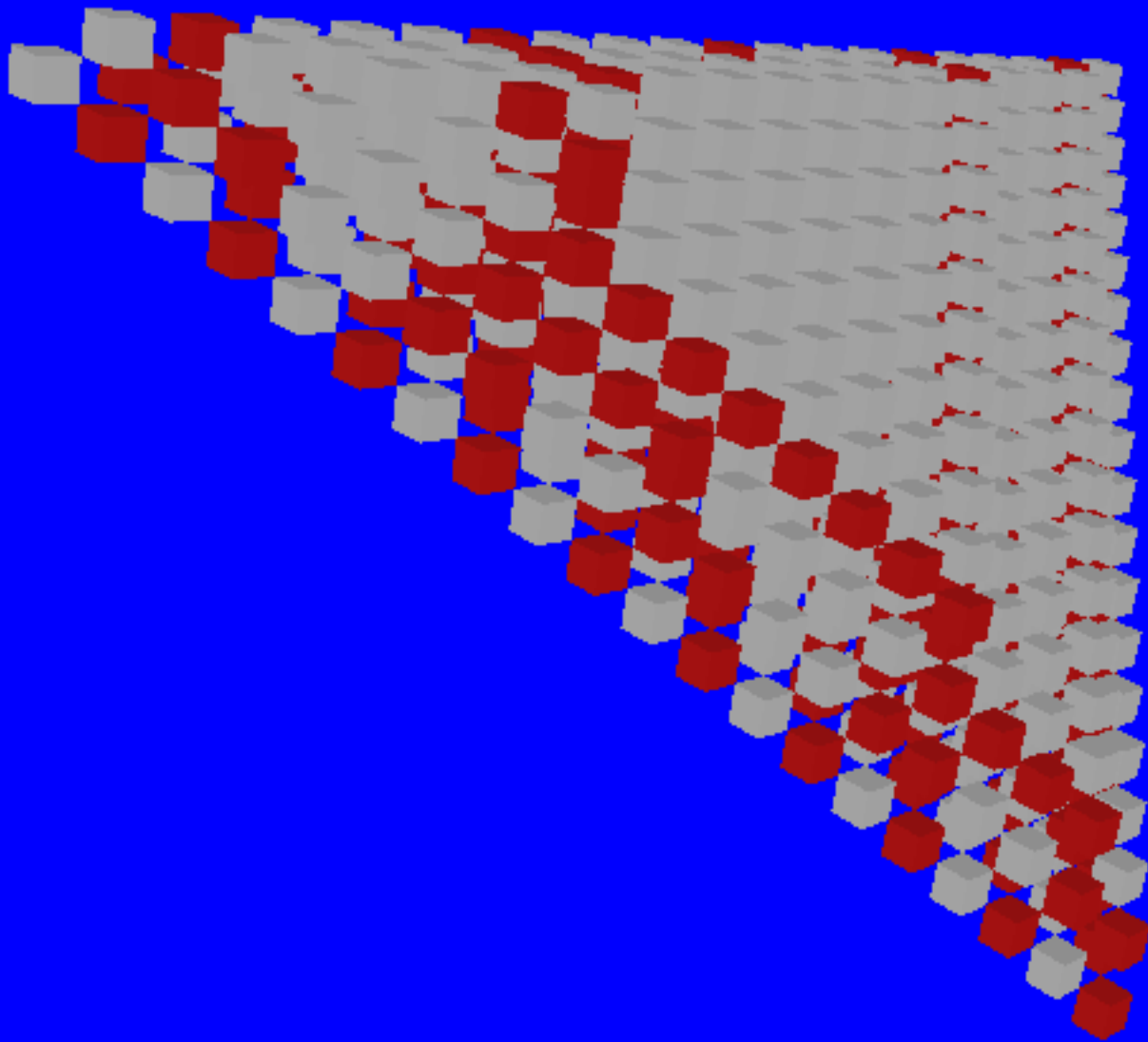
Représentation 3D des premières étapes



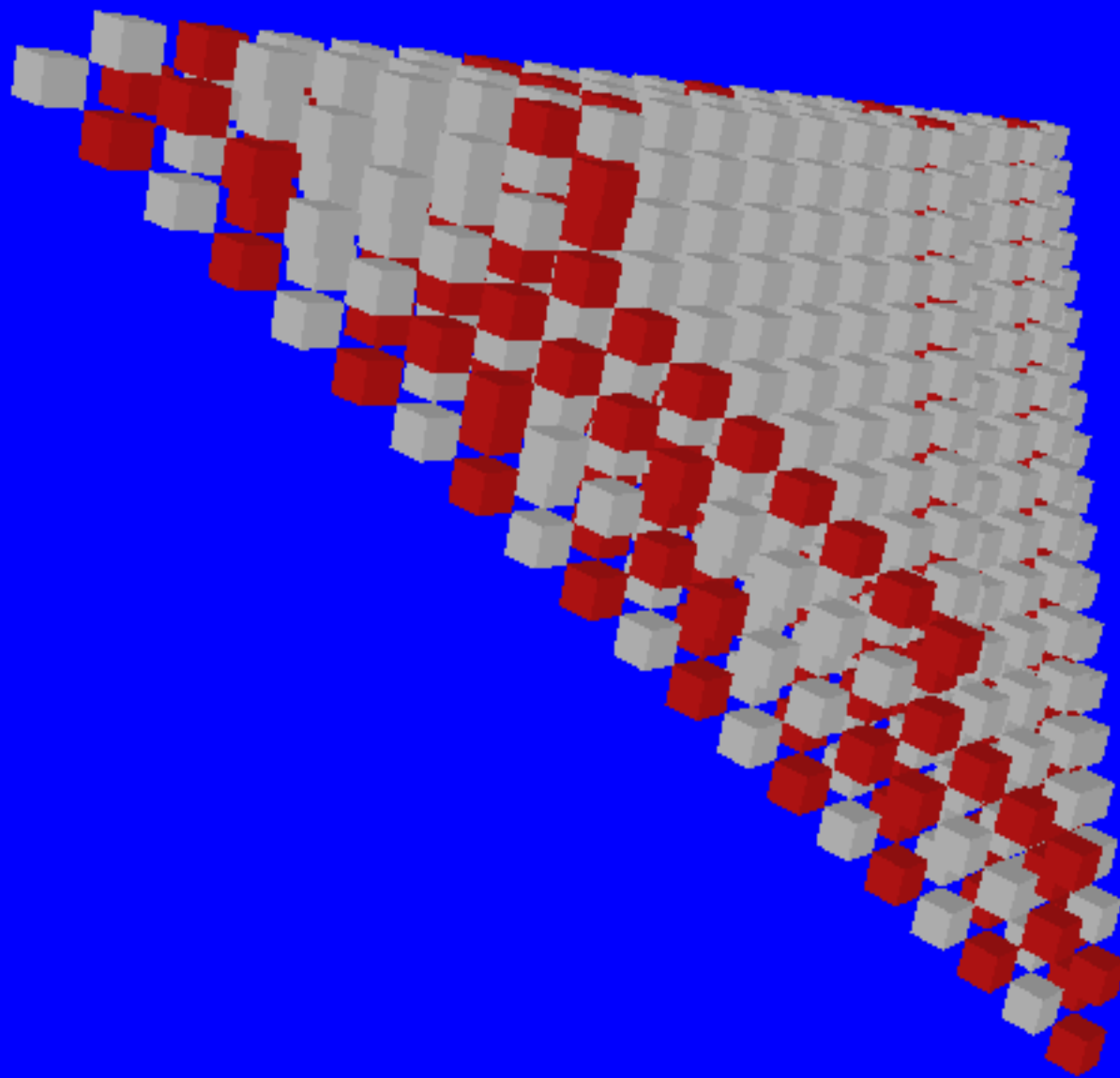
Représentation 3D des premières étapes



Représentation 3D des premières étapes

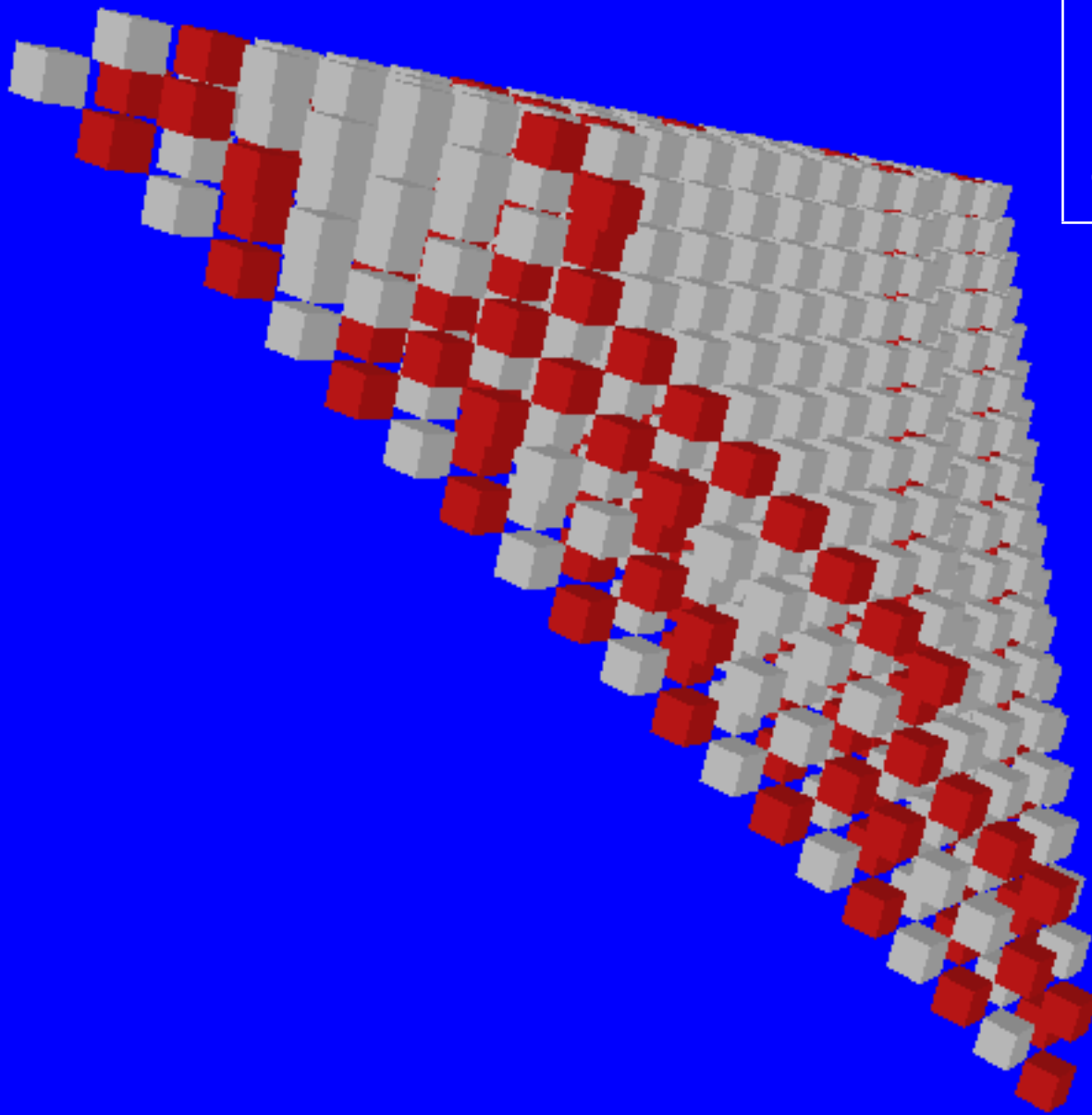


Représentation 3D des premières étapes



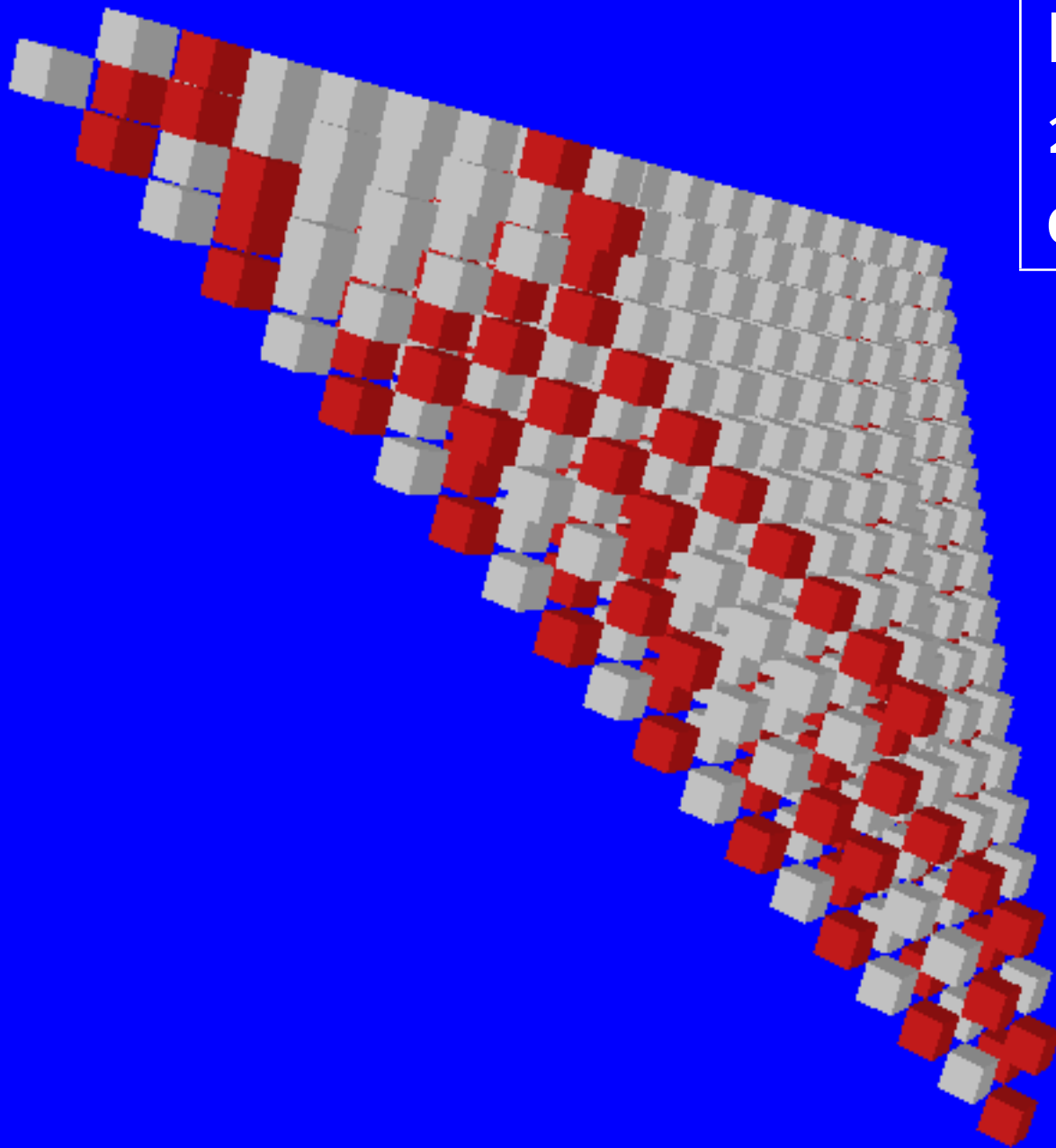
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



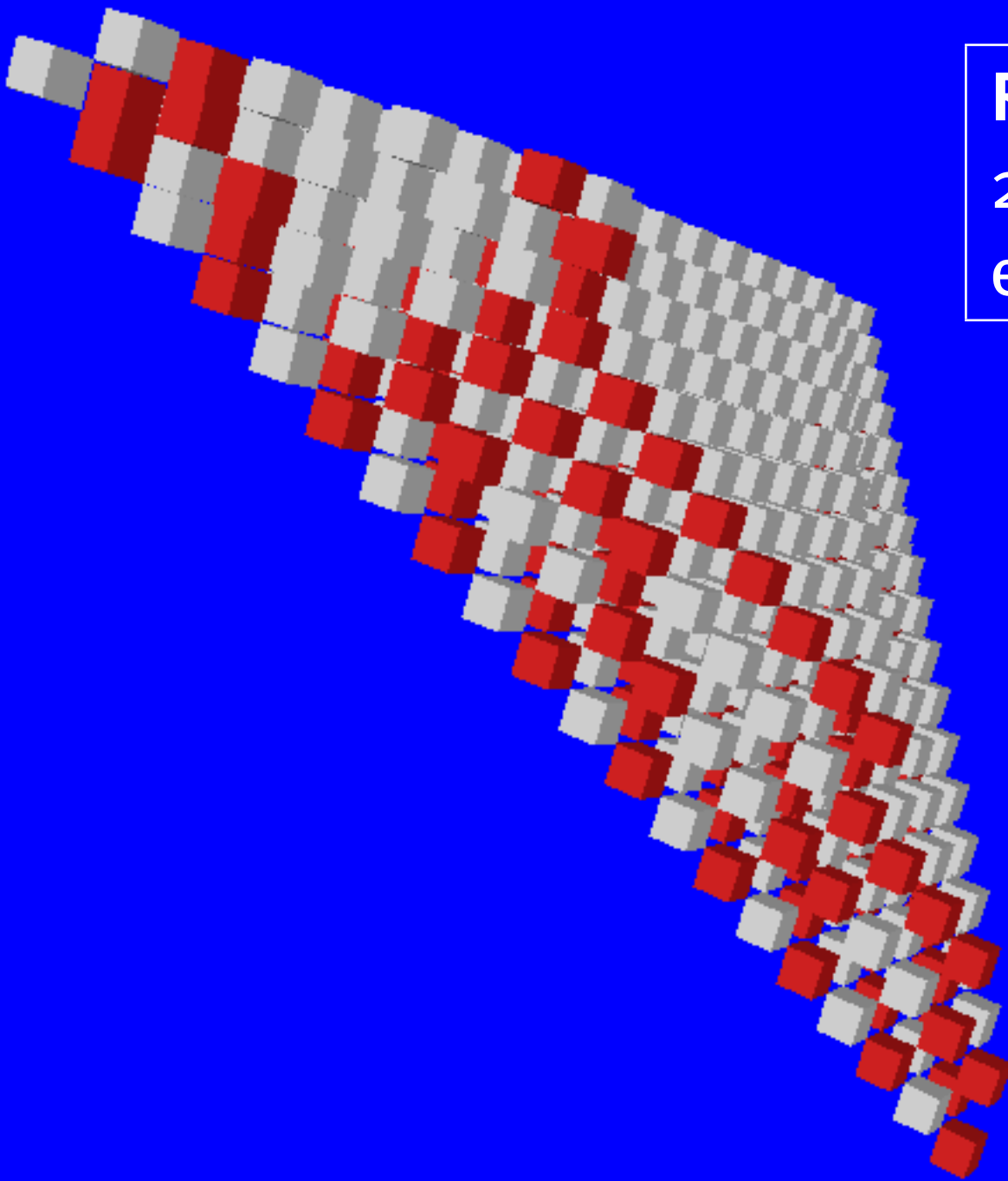
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



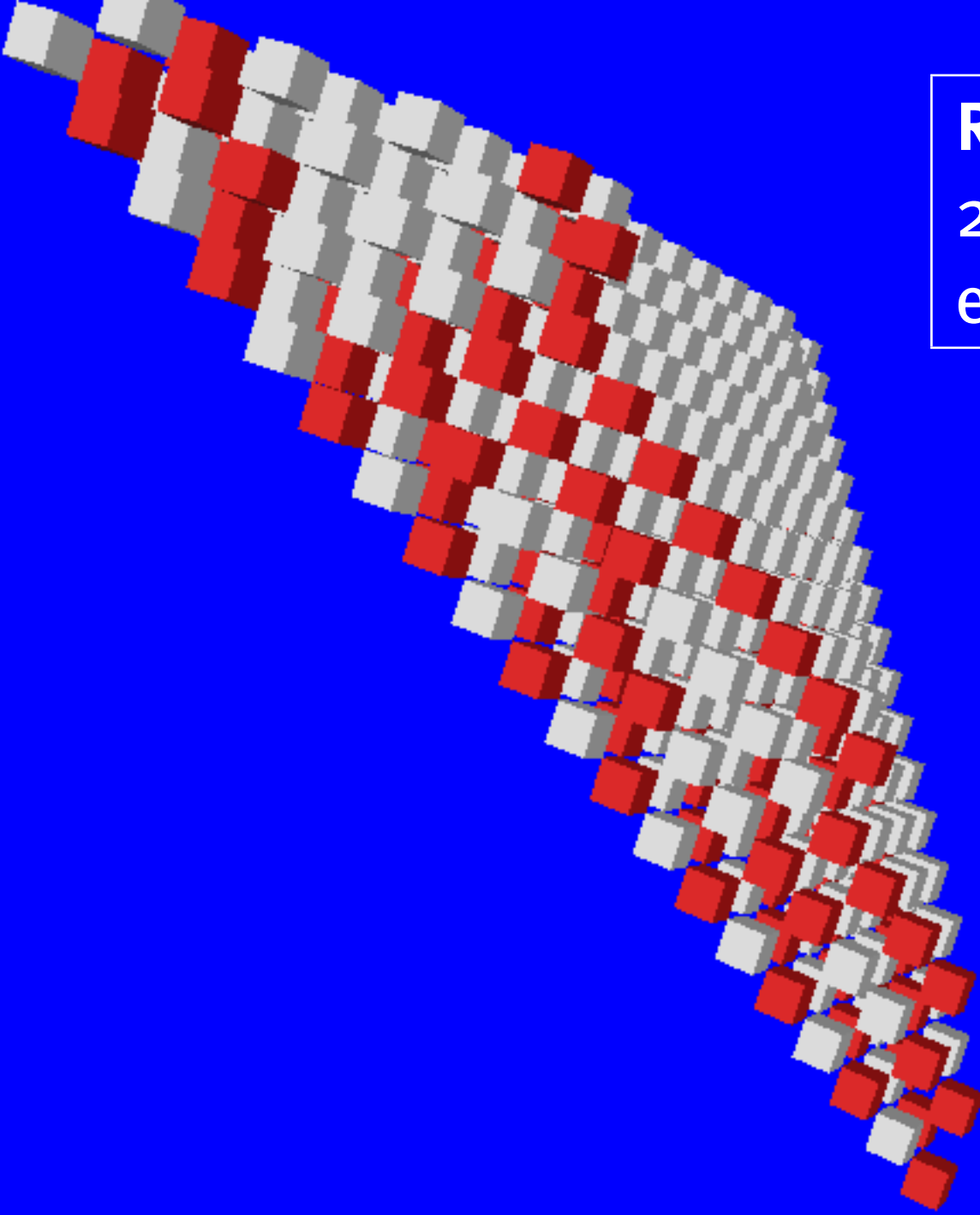
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



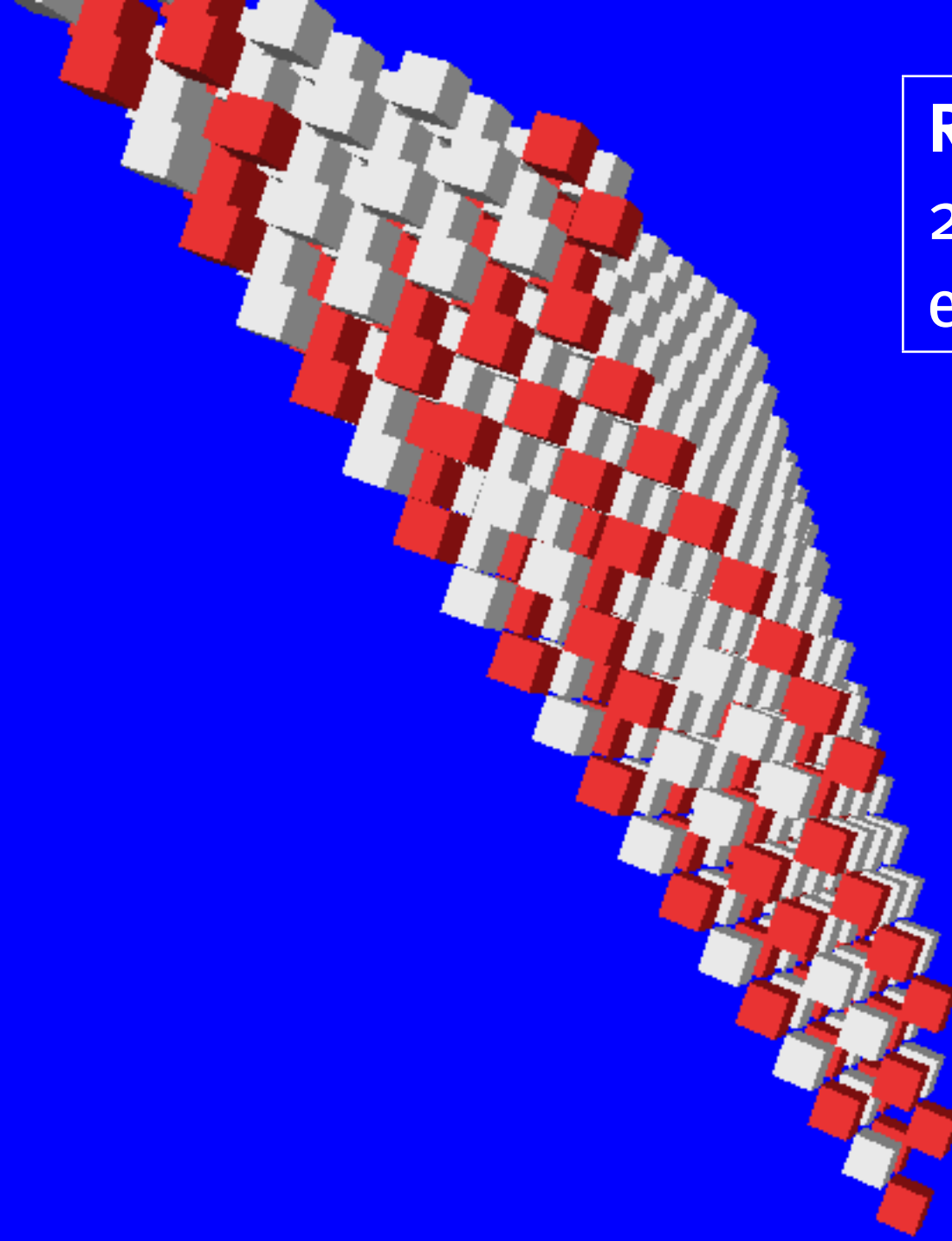
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



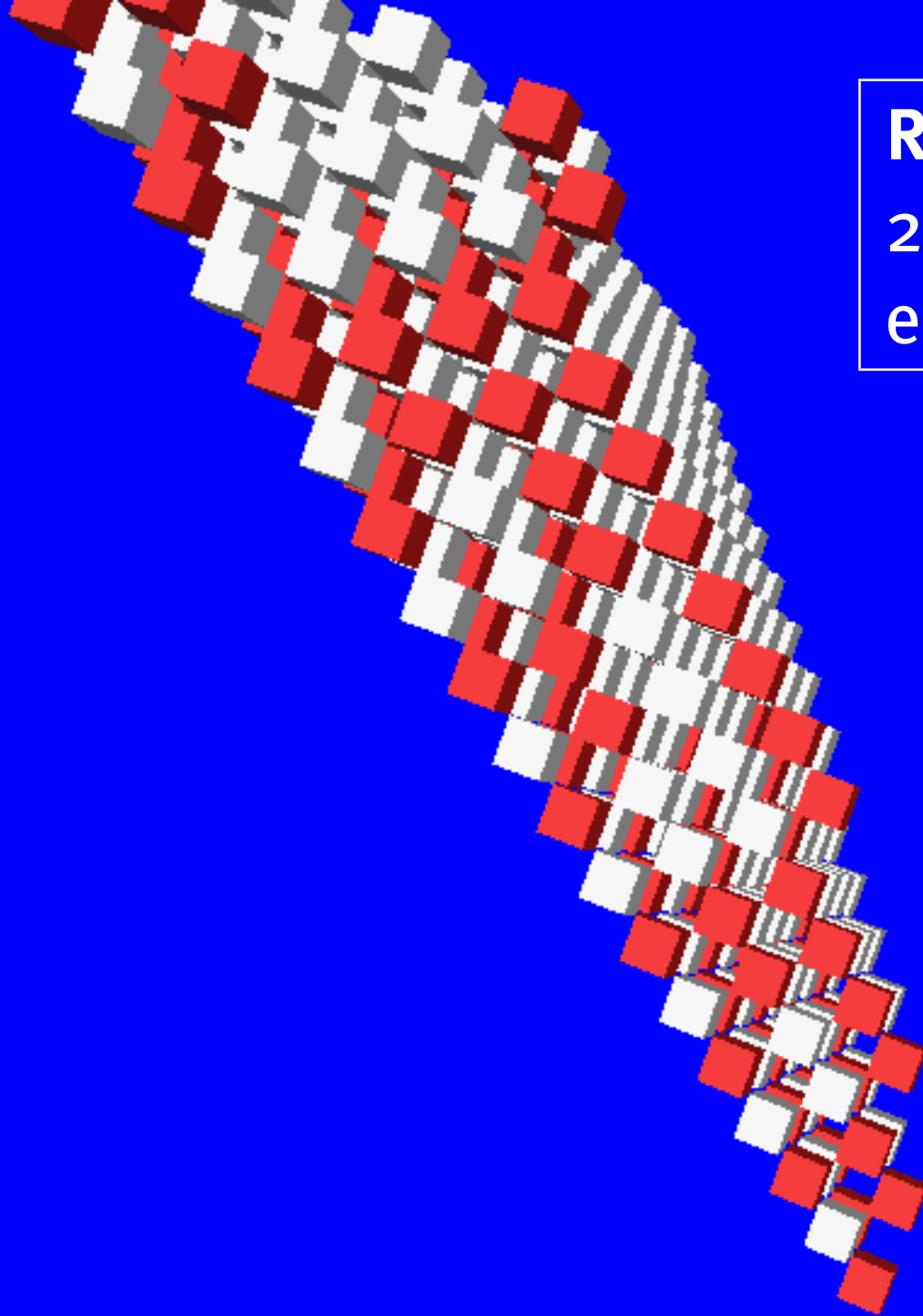
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



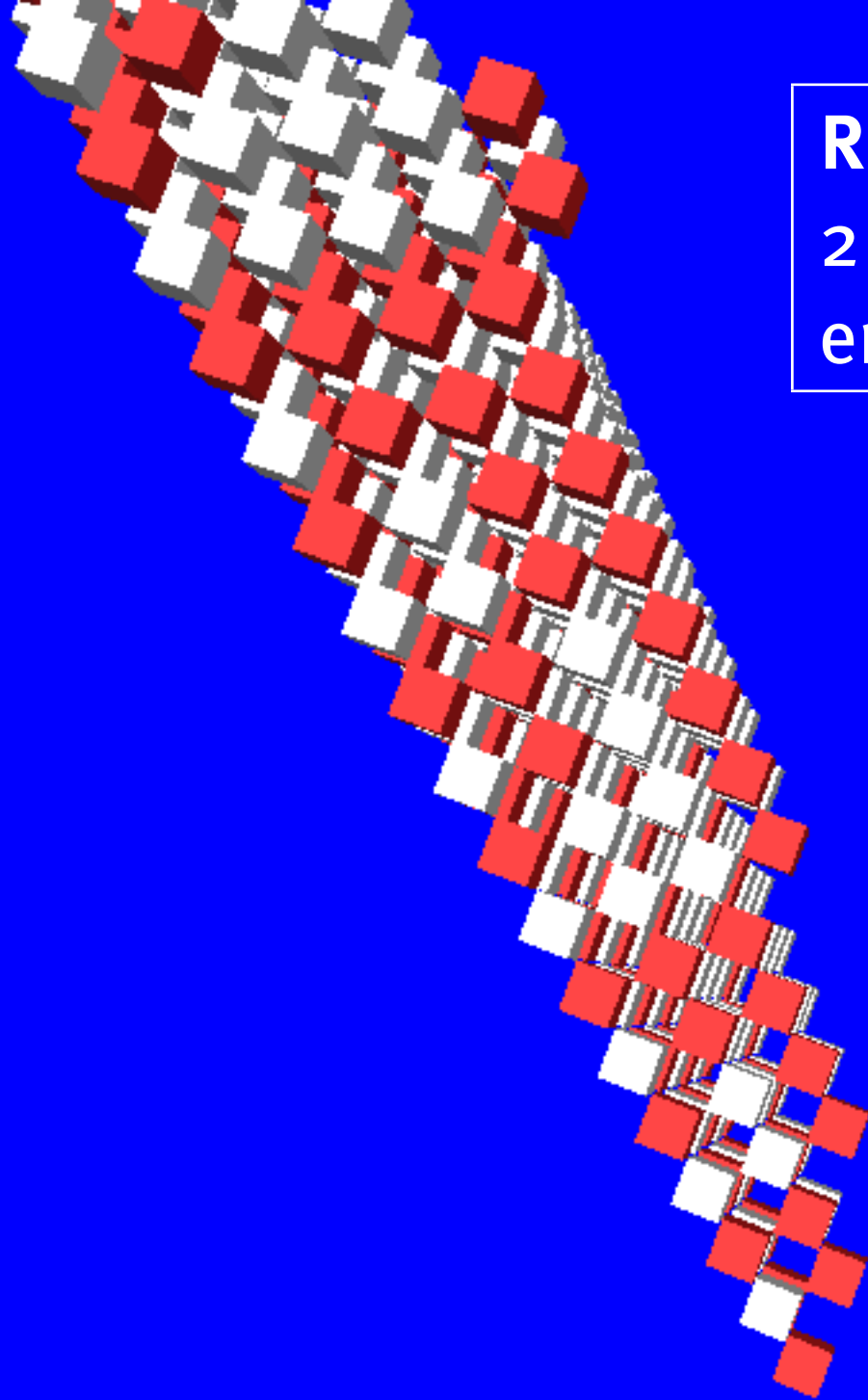
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



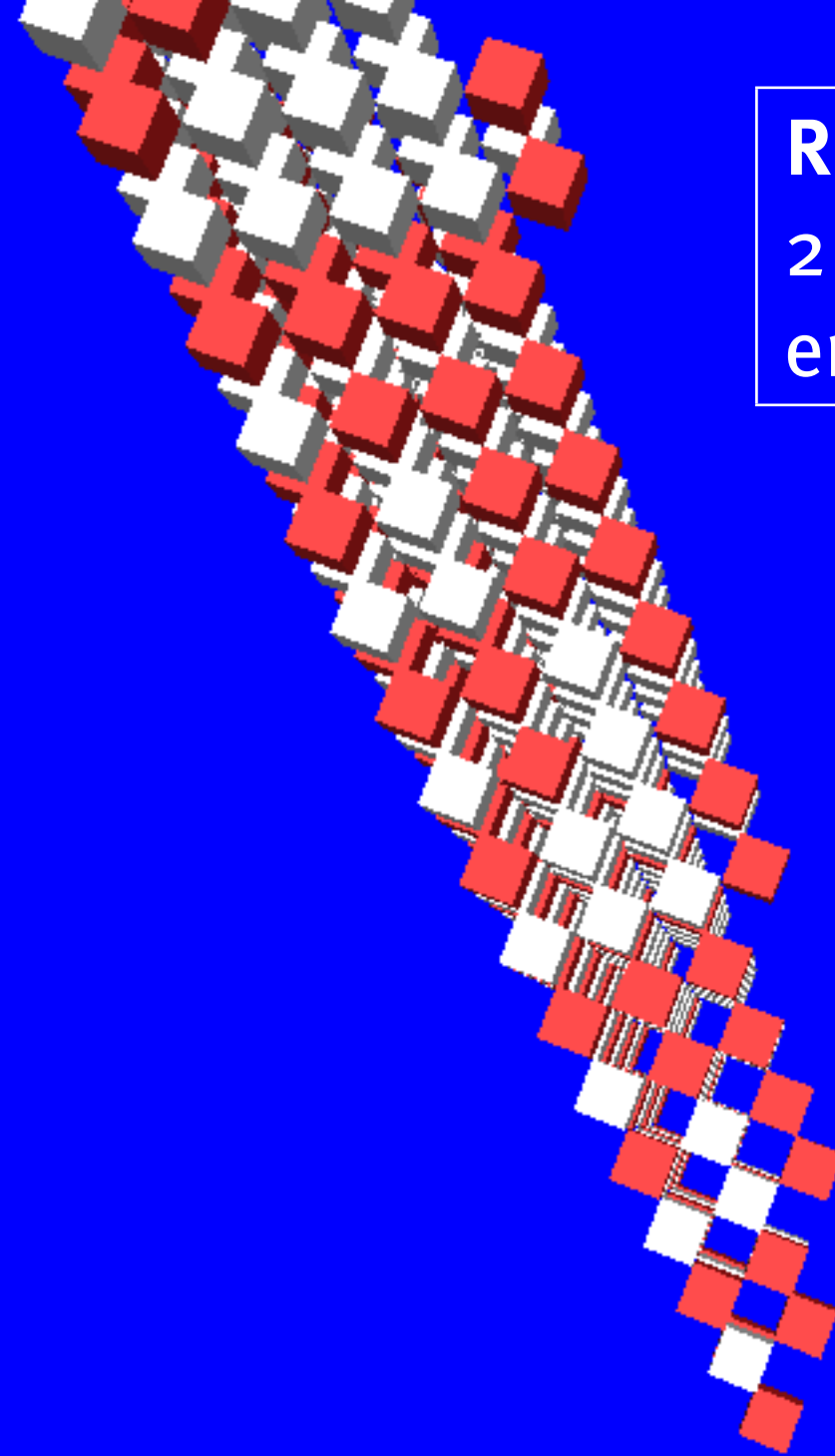
Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



Représentation 3D des premières étapes

Résultat optimal :
2 états \Rightarrow impossible
en dimension 2 ou 1



Représentation 3D des premières étapes

Amélioration : base quelconque

⇒ Soient x et y premiers entre eux.

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$	Règle n°
λ	λ	λ	λ	λ	#0
Rules for $l = 0$					
π_j	λ	λ	λ	π_{j+1} (or π_1 if $j = k$)	#1
π_x	λ	π_k	κ_*	π_0 ($k \neq x$)	#2
π_j	λ	π_k	κ_*	π_j ($j, k \neq x$)	#3
π_x	λ	π_x	κ_k	π_0 ($k \neq y - 1$)	#4
π_j	λ	π_x	κ_k	π_j ($j \neq x, k \neq y - 1$)	#5
π_j	λ	π_x	κ_{y-1}	π_{j+1} (or π_1 if $j = k$)	#6
λ	λ	π_x	κ_{y-1}	π_1	#7
Rules for $l = 1$					
κ_{y-1}	π_x	λ, κ_y	λ	κ_y	#8
κ_{y-1}	π_k	λ, κ_y	λ	κ_0 ($k \neq x$)	#9
κ_y	π_*	λ, κ_y	λ	κ_1	#10
κ_j	π_*	λ, κ_y	λ	κ_{j+1} ($j \neq y - 1, y$)	#11
κ_y	π_*	κ_k	λ	κ_0 ($k \neq y$)	#12
κ_j	π_*	κ_k	λ	κ_j ($j \neq y, k \neq y$)	#13
λ	π_1	λ, κ_y	λ	κ_1	#14
$*$	$*$	$*$	$*$	λ	#15

Fonction \log_{xy}
en $\max(x, y) + 2$
états (avec une
amélioration
mineure).

⇒ Gain énorme
sur 1D ($xy + 1$
états mini-
mum).

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;
- Conjecture : le nombre d'états nécessaires pour construire \log_a est lié à la décomposition de a en nombres premiers ;

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;
- Conjecture : le nombre d'états nécessaires pour construire \log_a est lié à la décomposition de a en nombres premiers ;
- Lien entre reconnaissance de langages et construction de signaux.

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;
- Conjecture : le nombre d'états nécessaires pour construire \log_a est lié à la décomposition de a en nombres premiers ;
- Lien entre reconnaissance de langages et construction de signaux.
- Fonctions équivalentes au logarithme, mais qui n'en sont pas :

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;
- Conjecture : le nombre d'états nécessaires pour construire \log_a est lié à la décomposition de a en nombres premiers ;
- Lien entre reconnaissance de langages et construction de signaux.
- Fonctions équivalentes au logarithme, mais qui n'en sont pas :
 - Systèmes de numérations exotiques,

Conclusion

- Signaux inconstructibles indépendamment de la dimension ;
- Conjecture : le nombre d'états nécessaires pour construire \log_a est lié à la décomposition de a en nombres premiers ;
- Lien entre reconnaissance de langages et construction de signaux.
- Fonctions équivalentes au logarithme, mais qui n'en sont pas :
 - Systèmes de numérations exotiques,
 - Fonctions autres (réciproque du ppcm) ;

Le mot de la fin

Merci à tous ceux qui m'ont aidé à faire cet exposé :

- Véronique Terrier, co-auteur, pour son apport scientifique extrêmement précieux ;
- Juliette et d'autres, pour leur soutien et leurs encouragements ;
- L'auteur de pdf \LaTeX , celui de **PPower4**, celui de **Me-tapost** et les auteurs de paquets comme `esopic` pour leurs outils techniques.