Programmes et Preuves - TD4

Master 2 -Programmation et Logiciels Sûrs

Corrigés

Stefano Guerrini

19 mars 2010

1. Donner une démonstration en calcul des séquents LK de la formula de Peirce

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$$

Est-ce que c'est une démonstration pour LJ ?

Corrigé Une preuve en LK de la formule de Peirce c'est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \vdash B, A}\,WR}{\vdash A \to B, A}\,\to R \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{(A \to B) \to A \vdash A, A}\,\to L}{(A \to B) \to A \vdash A}\,CR}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}\,\to R$$

La démonstration n'est pas une démonstration de LJ, car après la règle $\to L$ le séquent contient deux formules à droite.

Quelques remarques sur comment on a trouvée la démonstration.

(a) En analysent le séquent $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$, on voit que la dernière règle d'une démonstration de ce séquent est soit une $\to R$, soit une CR (il n'y a pas des autres possibilités). Dans la recherche de la preuve on a donc commencé avec l'hypothèse que la dernière règle c'est une $\to R$.

(b) Pour construire une démonstration $(A \to B) \to A \vdash A$ on a encore deux possibilités : la dernière règle c'est une $\to L$, ou la dernière règle c'est une CR, ou la dernière règle c'est une CL.

(c) Si on prend comme dernière règle de la démonstration de $(A \to B) \to A \vdash A$ une $\to L$, alors il faut démontrer les deux séquents

$$\vdash A \to B \qquad \text{et} \qquad A \vdash A$$

ou les deux séquents

$$\vdash A \to B, A \qquad \text{et} \qquad A \vdash$$

mais dans le premier cas, les séquences $\vdash A \to B$ n'est pas démontrable et dans le deuxième cas $A \vdash$ n'est pas démontrable—observer que ces deux séquents ne sont pas valides car il disent que la formule $\vdash A \to B$ est vrai pour toutes les valeur de A et B (qui est faux) et que la formule A est faux pour toutes les valeurs de A (qui est faux).

(d) Pourtant, on observe que

$$\vdash A \to B, A \qquad \text{et} \qquad A \vdash A$$

sont dérivables et que à partir de ces deux séquents, par une règle $\to L$, on obtient

$$(A \to B) \to A \vdash A, A$$

et, en utilisant une RC on obtient enfin

$$(A \to B) \to A \vdash A$$

2. Démontrer en calcul des séquents LK l'équivalence entre $A \to B$ et $\neg A \vee B$. Démontre la même équivalence en déduction naturelle NK.

Corrigé Pour démontrer que deux formules C et D sont équivalentes il faut démontrer que on a $C \vdash D$ et $D \vdash C$.
On commence avec la démonstration que $\neg A \vee B \vdash A \to B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\neg A, A \vdash}\neg L \qquad \dfrac{}{B \vdash B}}{\neg A \vee B, A \vdash B}\vee L}{\neg A \vee B \vdash A \to B}\to R$$

On démontrera après que $A \to B \vdash \neg A \vee B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \quad \dfrac{}{B \vdash B}}{A, A \to B \vdash B}\to R}{A \to B \vdash \neg A, B}\neg R}{A \to B \vdash \neg A \vee B, \neg A}\vee R}{A \to B \vdash \neg A \vee B, \neg A \vee B}\vee R}{A \to B \vdash \neg A \vee B}CR$$

Les correspondantes demonstrations en déduction natrurelle NK ce sont [1] :cc

$$\dfrac{\neg A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_2 \qquad [A]_1}{\bot}\to E}{B}\bot}{A \to B}\to I_1 \qquad \dfrac{[B]_2}{A \to B}\to I}{A \to B}\vee E_2$$

1. Dans les démonstrations en NK les prémisses fermées ou déchargées seront écrites entre accolades et une index a coté de chaque formule et de chaque règle qui prévoit des décharges de prémisses notera la règle dans laquelle une formule est déchargée.

$$
RAA_2\,\dfrac{\to E\,\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_2 \qquad \vee I\,\dfrac{\to I_1\,\dfrac{\to E\,\dfrac{[\neg(\neg A \vee B)]_2 \qquad \vee I\,\dfrac{\to E\,\dfrac{A \to B \qquad [A]_1}{B}}{\neg A \vee B}}{\bot}}{\neg A}}{\neg A \vee B}}{\bot}}{\neg A \vee B}
$$

3. En utilisant la règle du cross-cut (c'est-à-dire, la technique utilisée dans le lemme principal reporté dans la section 13.2 du livre "Proofs and types") éliminer la coupure finale de la démonstration :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A, A \vdash A}}{A \to A \vdash A \to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A, A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A, A \to A, A \vdash A}}{A \to A, A \vdash A}
$$

Corrigé Le but c'est éliminer la coupure entre

$$
\pi_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A, A \vdash A}}{A \to A \vdash A \to A^*} \qquad \pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A^+, A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to A^*, A \to A^*, A \vdash A}
$$

en utilisant la règle du cross-cut (voire le support du cours). Notamment, il faut trouver une preuve qui élimine au même temps toutes les formules marquées avec une *. La dernière règle de π_1 et π_2 c'est une règle du connectuer $\to$ qui introduit une des formules à couper. Il faut donc utiliser le dernier cas du théorème du cross-cut.

Les sous-preuves qu'on utilise ce sont :

$$
\pi_1^1 = \dfrac{\dfrac{}{A^\circ \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A^\circ}}{A \to A, A^\circ \vdash A^\circ} \qquad \pi_2^1 = \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A^\circ}}{A \to A^+, A \vdash A^\circ} \qquad \pi_2^2 = \dfrac{}{A^\circ \vdash A}
$$

Dans lesquelles on a marquées avec une $^\circ$ les sous-formules de $A \to A$ utilisées dans les dernières règles de π_1 et π_2 et leurs copie dans le reste des démonstrations. La formule marquée avec $^+$ est ce qui reste de l'ensemble des formules à couper dans le séquent finale de π_2

Les preuves π_1^1 et π_2^2 ne contient aucun occurrence des formules à couper. Seulement dans π_1^1 on trouve une formule qui vient de l'ensemble de formules à couper (la formule marquée par $^+$).

La technique générale nous dit qu'il faut appliquer récursivement la procédure du cross-cut aux pairs (π_1^1, π_2), (π_1, π_2^1) et (π_1, π_2^2).

(a) Cas (π_1^1, π_2). Le séquent final de π_1^1 ne contient aucun formule à couper. Donc, on obtient directement comme résultat $\sigma_1 = \pi_1^1$ (on ajoutera des formule par affaiblissement si nécessaire après).

(b) Cas (π_1, π_2^1). Le séquent final de π_1 et π_2^1 contiennent une formule à couper (marquée avec * dans π_1 et avec $^+$ dans π_2^1). Ce sont deux formules principales et par réduction on obtient tout de suite

$$\text{cut}\,\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A}}{A\to A, A\vdash A}}{\text{cut}\,\dfrac{A\to A, A\vdash A}{A\to A, A\vdash A^\circ}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}$$

Toutes les coupures dans cette preuve contient des axiomes et donc on peut réduire la démonstration à

$$\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}{A\to A, A\vdash A^\circ}$$

c'est-à-dire, à $\tau_1 = \pi_1^1$.

(c) Cas (π_1, π_2^2). Le séquent final de π_2^2 ne contient aucun formule à couper. Donc on obtient directement comme résultat $\tau_2 = \pi_2^2$ (on peut ajouter des formule par affaiblissement si nécessaire après).

On a donc trois démonstrations

$$\sigma_1 = \dfrac{\dfrac{}{A^\circ\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}{A\to A, A^\circ\vdash A^\circ}\qquad \tau_1 = \dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}{A\to A, A\vdash A^\circ}\qquad \tau_2 = \dfrac{}{A^\circ\vdash A}$$

dont il faut éliminer les formules marquées avec $^\circ$ (de façon équivalent, on peut aussi reconstruire les formules $A\to A$ avec une règle $\to L$ sur σ_1 et avec une règle $\to R$ sur τ_1 et τ_2, couper les deux formules $A\to A$ obtenues et après éliminer cette coupure principale). On a donc

$$\text{cut}\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}{A\to A, A\vdash A^\circ}\quad\dfrac{\dfrac{}{A^\circ\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A^\circ}}{A\to A, A^\circ\vdash A^\circ}}{\text{cut}\,\dfrac{A\to A, A\to A, A\vdash A^\circ}{CL\,\dfrac{A\to A, A\to A, A\vdash A}{A\to A, A\vdash A}}\quad\dfrac{}{A^\circ\vdash A}}$$

A la fin de la preuve, après la coupure, on ajoute une contraction pour réduire les formules $A\to A$ au nombre cherché.

La coupure multiple sur les formules $A\to A$ a été éliminée et replacée avec des coupure sur les formules A°.

La substitutions de la coupure finale est terminée.

Pour terminer ces notes, on ajoute que les coupures qui restent peuvent être aisément éliminées, en obtenant la démonstration sans coupures :

$$CL\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A}}{A\to A, A\vdash A}\quad\dfrac{}{A\vdash A}}{A\to A, A\to A, A\vdash A}}{A\to A, A\vdash A}$$

4. Donner la démonstration en déduction naturelle que correspond au λ-terme

$$\lambda x^{A\to A}\lambda y^A.x(xy) : (A\to A)\to A\to A$$

Chercher une démonstration équivalente en calcul des séquents.

Corrigé Le λ-terme correspond à la démonstration de NK :

$$\to I_2\,\dfrac{\to I_1\,\dfrac{\to E\,\dfrac{[y : A \to A]_1 \qquad \to E\,\dfrac{[y : A \to A]_1 \qquad [x : A]_2}{yx : A}}{y(yx) : A}}{\lambda y.y(yx) : A \to A}}{\lambda x.\lambda y.y(yx) : (A \to A) \to A \to A}$$

Une correspondante preuve en LK c'est :

$$\to R\,\dfrac{\to R\,\dfrac{CR\,\dfrac{\to L\,\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \to L\,\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A, A \to A \vdash A}}{A \to A, A \to A, A \vdash A}}{A \to A, A \vdash A}}{A \to A \vdash A \to A}}{\vdash (A \to A) \to A \to A}$$