Programmes et Preuves - TD1/2

Master 2 -Programmation et Logiciels Sûrs
v. 01/02/2010

Stefano Guerrini

1. Donner des preuves en LK pour les séquents suivants :
   (a) $\vdash A \to B \to A$
   (b) $\vdash B \to A \to A$
   (c) $\vdash A \to A \to A$ (donner deux preuves)
   (d) $\vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
   (e) $\neg\neg A \vdash A$

2. Démontrer que, en LK :
   (a) $\Gamma \vdash A \to B, \Delta$ ssi $\Gamma, A \vdash B, \Delta$
   (b) $\Gamma \vdash A \land B, \Delta$ ssi $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma \vdash B, \Delta$
   (c) $\Gamma \vdash A \lor B, \Delta$ ssi $\Gamma \vdash A, B, \Delta$
   (d) $\Gamma \vdash \neg A, \Delta$ ssi $\Gamma, A \vdash \Delta$
   (e) $\Gamma, A \to B \vdash \Delta$ ssi $\Gamma, B \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$
   (f) $\Gamma, A \land B \vdash \Delta$ ssi $\Gamma, A, B \vdash \Delta$
   (g) $\Gamma, A \lor B \vdash \Delta$ ssi $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma, B \vdash \Delta$
   (h) $\Gamma, \neg A \vdash \Delta$ ssi $\Gamma \vdash A, \Delta$
   (i) Donner un contre-exemple au fait que $\Gamma \vdash A \lor B, \Delta$ implique $\Gamma \vdash A, \Delta$ ou $\Gamma \vdash B, \Delta$.

3. Soient σ_1 et σ_2 les deux preuves de $\vdash A \to A \to A$ et

$$\pi \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \Gamma_1 \vdash A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \Gamma_2 \vdash A\end{array} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,\texttt{ax}}{\Gamma_2, A \to A \vdash A}\,\to\!\texttt{L}}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \to A \to A \vdash A}\,\to\!\texttt{L}$$

Éliminer la coupure des preuves ($i = 1, 2$)

$$\xi_i \quad = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\sigma_i\\ \vdash A \to A \to A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi\\ \Gamma_1, \Gamma_2, A \to A \to A \vdash A\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A}\,\texttt{cut}$$

4. On définit, par induction sur la structure des formules, le dual A^d de chaque formule A (on ne consider pas l'implication) :

$$\begin{aligned} X^d &= X \\ (B \wedge C)^d &= B^d \vee C^d \\ (B \vee C)^d &= B^d \wedge C^d \\ (\neg A)^d &= \neg A^d \end{aligned}$$

   On étend la définition aux multiensembles de formules par $\Gamma^d = A_1^d, \ldots, A_k^d$ si $\Gamma = A_1, \ldots, A_k$.
   Démontrer que
   (a) $A^{dd} = A$
   (b) $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable ssi $\Delta^d \vdash \Gamma^d$ est démontrable.

5. On définit $A^\perp$ par induction (on ne consider pas l'implication)

$$\begin{aligned} X^\perp &= \neg X \\ (B \wedge C)^\perp &= B^\perp \vee C^\perp \\ (B \vee C)^\perp &= B^\perp \wedge C^\perp \\ (\neg A)^\perp &= \begin{cases} A & \text{si } A \text{ est un atome} \\ \neg A^\perp & \text{autrefois} \end{cases} \end{aligned}$$

   Démontrer que
   (a) $\vdash A, A^\perp$ (au même temps que $A, A^\perp \vdash$)
   (b) en utilisant les points précédents, on a $\vdash \neg A \to A^\perp$ et $\vdash A^\perp \to \neg A$
   (c) $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable ssi $\vdash \Gamma^\perp, \Delta$