

## Proposition de stage de Fin d'étude - 1er semestre 2022

### “Approches polyédrales et ensembles bornants pour l'optimisation multi-objectif”

#### Contexte :

Les solutions d'un problème d'optimisation combinatoire ont fréquemment plusieurs évaluations possibles. Un premier contexte est celui de l'optimisation multi-agent, lorsque plusieurs personnes doivent collectivement décider de la meilleure solution à choisir: chacun évalue une solution en fonction de son propre point de vue. Un autre contexte est de celui de l'optimisation multi-critère lorsqu'une solution peut être évaluée selon plusieurs aspects: par exemple choisir un trajet en fonction de son prix ou de sa durée. On peut noter que les objectifs considérés dans un même problème sont parfois contradictoires. L'optimisation multi-objectif vise à aider le décideur à choisir une solution en lui proposant la liste des solutions non-dominées, c'est-à-dire de solutions telles qu'il n'existe pas une autre solution aussi intéressante sur chaque critère et plus intéressante sur au moins un critère: on appelle cela parfois “énumérer le front de Pareto des solutions possibles” (mais il existe plusieurs définitions du front de Pareto).

Un outil logiciel libre, appelé vOptSolver [4], codé en langage Julia, est un solveur multi-objectif: il permet, à l'image des solveurs classiques de Programmes Linéaires en Nombres Entiers (PLNE), de modéliser un problème d'optimisation combinatoire sous forme d'un PLNE qui aurait plusieurs fonctions objectifs linéaires. En retour, ce solveur propose la liste des solutions non-dominées. Il est à noter que cette liste est potentiellement de taille exponentielle et qu'il est attendu que l'utilisateur cible des intervalles de valeurs de solutions raisonnables. En tant que généralisation de la PLNE mono-objectif, la programmation mathématique multi-objectif est largement NP-difficile et demande une étude approfondie des concepts mathématiques et des algorithmes permettant d'améliorer les performances des outils logiciels. En effet, le solveur vOptSolver est récent et ce sujet de stage a pour ambition d'en améliorer les performances.

Afin de résoudre des programmes linéaires en variables entières, les solveurs se basent sur des méthodes d'énumération de type branchement (Branch&Bound). L'efficacité de ces méthodes repose sur un élagage des nœuds d'un arbre de branchement rendu possible par la comparaison des bornes supérieures et inférieures. Les solveurs PLNE mono-objectifs ont obtenu un gain important dans leurs performances grâce à des améliorations des bornes supérieures et inférieures utilisées. En minimisation, ces bornes supérieures sont obtenues par des heuristiques primales et ces bornes inférieures par la résolution de relaxations renforcées par des inégalités valides. Ces inégalités de renforcement proviennent de l'étude du polyèdre induit par les solutions admissibles.

Les méthodes de branchement ont récemment réalisé une percée dans le contexte multi-objectif grâce à la notion d'ensemble bornant [3]. Les versions multi-objectifs de plusieurs problèmes (dont la variante mono-objectif est déjà bien résolue) peuvent maintenant être résolues efficacement. Cependant, pour monter en taille sur des problèmes multi-objectifs génériques, un travail sur les ensembles bornants et sur l'étude des polyèdres est nécessaire pour l'implémentation d'un solveur. Déterminer l'ensemble des solutions non-dominées nécessite une exploration par un algorithme de branchement de l'espace de solutions en le croisant avec l'espace des objectifs. Des résultats issus de la théorie de la décision proposent une généralisation de l'élagage classique dans les arbres de branchement depuis le mono vers le multi-objectif. Les valeurs bornantes supérieures et inférieures sont remplacées par des ensembles bornants. Les performances d'un algorithme de branchement multi-objectif repose ainsi sur la qualité de ces ensembles.

## Objectifs du stage :

Après un état de l'art sur les ensembles bornants pour l'optimisation multi-objectif et sur les approches polyédrales, une étude sur les différentes possibilités d'intégration des inégalités valides sera menée et implémentée en pratique.

Le stage s'intéressera à plusieurs aspects polyédraux. En effet, pour le polytope combinant l'espace des solutions et l'espace des critères, la projection des facettes de ce polytope sur l'espace des critères est un polytope dont le dominant décrit des inégalités valides pour l'ensemble bornant. Une première approche est celle de l'étude des liens entre espace de solutions et espace des objectifs/critères dans le but de fournir des inégalités valides. Cette approche, bien que classique, n'a pas été approfondie dans la littérature [1]. Une autre approche possible (moins classique) concerne la combinatoire associée à la dominance entre solutions. En effet, une telle dominance a été récemment traduite par des inégalités linéaires en cas mono-objectif [2]. L'idée est ici d'étendre ce concept au cas multi-objectif.

Afin d'obtenir un ensemble bornant de bonne qualité, une mesure globale de l'impact de ces inégalités sera étudiée. Il sera également étudié des algorithmes de séparation efficaces basés, par exemple, sur les techniques de scalérisation. La mise en œuvre informatique sera intégrée au sein du projet VoptSolver [4] qui propose un cadre de logiciel libre pour la résolution de programmes linéaires multi-objectifs. Les algorithmes et les inégalités proposées par ces travaux pourront ainsi être testés dans le contexte de cet outil sur des bases d'instances utilisées par la communauté scientifique.

## Conditions matérielles :

Employeur :	Laboratoire LIPN dans le cadre d'une convention de stage académique
Lieu du stage :	LIPN (Laboratoire d'Informatique de Paris Nord), UMR CNRS 7030 Université Sorbonne Paris Nord 99 avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse
Durée :	5-6 mois entre février et septembre 2022
Rémunération :	Gratification stage
Connaissances requises :	Deuxième année de Master Recherche ou troisième année d'école d'ingénieur
Profil :	Mathématiques appliquées, Informatique, Optimisation combinatoire, RO
Informatique :	Programmation, Algorithmique

## Encadrement :

Pierre Fouilhoux	(LIPN, Sorbonne Paris Nord)	pierre.fouilhoux@lipn.fr
Lucas Létocart	(LIPN, Sorbonne Paris Nord)	lucas.letocart@lipn.fr

## References

- [1] Cerqueus A. Bi-objective branch-and-cut algorithms applied to the binary knapsack problem : surrogate bound sets, dynamic branching strategies, generation and exploitation of cover inequalities. *Rapport de thèse*, 2015.
- [2] Falq A-E, Fouilhoux P. and Kedad-Sidhoum S., Linear inequalities for neighborhood based dominance properties for the common due-date scheduling problem *European Journal of Operational Research* 296:2(453-464), 2022.
- [3] Przybylski A., Gandibleux X. Multi-objective branch and bound. *European Journal of Operational Research* 260:3(856-872), 2017.
- [4] VoptSolver project <https://github.com/vOptSolver>