le cnam

cedric

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LIP6

Université Sorbonne Paris Nord

Proposition de stage de fin d'études - 1er semestre 2021

"Inégalités de dominance : programmation linéaire et optimisation combinatoire"

Contexte :

La programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) a permis de résoudre exactement de grandes instances de problèmes d'optimisation combinatoire variés provenant de l'ordonnancement ou de la théorie des graphes. Les solveurs PLNE génériques sont en effet capables de résoudre des PLNE en utilisant le principe central de branchement et d'évaluation (Branch&Bound). Le branchement consiste à diviser itérativement l'espace des solutions et l'évaluation a pour but d'éviter d'explorer toutes les solutions en s'appuyant sur des bornes encadrant la valeur optimale. En cas de minimisation, une borne supérieure est fournie par une solution du problème et une borne inférieure par une relaxation continue du PLNE.

Une borne supérieure est donnée par une solution qui peut être déterminée par des méthodes approchées. Les méthodes dites d'arrondis partent de la solution fractionnaire de la relaxation du PLNE. Les méthodes de recherche locale consistent à passer de solutions en solutions en utilisant un voisinage reposant sur des propriétés combinatoires du problème : par exemple en remplaçant un élément par un autre dans une solution.

Une borne inférieure peut être donnée par la relaxation linéaire du PLNE. Afin d'améliorer cette relaxation, les solveurs PLNE ajoutent aux PLNE des inégalités valides, c'est-à-dire des inégalités vérifiées par toutes les solutions réalisables. Leur but est de couper les solutions fractionnaires de la relaxation et ainsi d'augmenter la valeur de cette relaxation. La validité de ces inégalités est déduite de l'étude du polyèdre combinatoire $\mathcal{P}$ défini comme l'enveloppe convexe des solutions réalisables.

De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire sont efficacement résolus de manière exacte par des algorithmes dédiés : c'est bien entendu le cas de problèmes polynomiaux mais également de problèmes NP-difficiles. De tels algorithmes peuvent êtres issus de la programmation dynamique ou sont des algorithmes de Branch&Bound dédiés ne s'appuyant pas sur la programmation linéaire. C'est particulièrement le cas pour certaines classes de problèmes d'ordonnancement dont la particularité est d'avoir une combinatoire tout à la fois large et peu structurée. Pour ces problèmes, la difficulté repose souvent sur le calcul de la fonction objective. Une des clefs permettant de concevoir des algorithmes dédiés est alors d'utiliser des propriétés de dominance. Un ensemble de solutions S est dit dominant s'il contient au moins une solution optimale : ainsi il est possible de résoudre le problème en se limitant aux solutions de S.

Si les propriétés de dominance sont utilisées pour formuler des PLNE, elles sont peu utilisées pour résoudre des PLNE. Par exemple, les approches polyédrales classiques étudiant un polyèdre combinatoire $\mathcal{P}$ ne prennet pas en compte la fonction objective.

Dernièrement, un concept nouveau a été introduit dans [1] : les inégalité de dominance. Une inégalité de dominance traduisant la dominance de l'ensemble S est une inégalité coupant toutes les solutions hors de S et qui est vérifiée par toutes les solutions de S. Ainsi les inégalités de dominance ne sont pas des inégalités valides au sens classique, mais elles définissent une nouvelle validité par le fait qu'elles ne coupent aucune solution optimale.

Une façon de mettre en œuvre ces inégalités repose sur la définition suivante : au sein d'un voisinage de solutions (comme celui évoqué pour les méthodes de recherche locale ci-dessus), une solution est dite localement-optimale si elle est de plus petite valeur que toutes ses voisines. Une solution voisine d'une solution localement-optimale est ainsi dite dominée. Dans [1], ce concept a été utilisé pour le problème d'ordonnancement autour d'une date d'échéance commune qui consiste à déterminer des dates de début d'un ensemble de tâches qui doivent être traitées par une unique machine : le coût de traitement d'une tâche est linéaire par rapport à son avance ou à son retard vis à vis d'une date d'échéance commune. Pour ce problème, une formulation PLNE avait été proposée dans [2]. Dans [1], il est proposé des inégalités de dominance traduisant une optimalité locale pour des voisinages basés sur des opérations spécifiques à ce problème d'ordonnancement sur une machine (opération d'insertion ou d'échange de tâches). Ces inégalités ont considérablement accéléré la résolution d'instances du problème par PLNE.

Objectifs du stage :

L'objectif de ce stage est tout autant une mise en œuvre des inégalités de dominance locale sur plusieurs problèmes, qu'une étude théorique et expérimentale de cette nouvelle méthode.

Le stage étudiera les causes de l'efficacité des inégalités de dominance. Cette efficacité peut en effet être dûe à différents facteurs : une amélioration de la valeur de relaxation ; une amélioration des processus produisant automatiquement des inégalités valides au sein des solveurs PLNE ; ou un élagage de l'arbre de branchement par inférence. Une telle étude mêlera des aspects théoriques et expérimentaux. Une autre perspective du stage est de définir et tester les inégalités de dominance dans le cadre d'autres problèmes classiques que ce soit en ordonnancement ou en théorie des graphes (voyageur de commerce, stable...).

Compte tenu de la diversité des perspectives de ce stage, le contenu du stage peut être adapté pour un profil d'étudiant désirant une part importante de programmation ou désirant une part importante d'aspects théoriques.

Ce stage est réalisé dans le cadre d'une collaboration entre les laboratoires Cedric du CNAM, LIP6 de Sorbonne Université et LIPN de l'université Sorbonne Paris Nord. Suite à ce stage, une poursuite en thèse est envisageable sur ce sujet ou un sujet proche par candidature dans l'une des écoles doctorales des trois établissements concerncés.

Conditions matérielles :

Employeur :	Laboratoire LIP6 dans le cadre d'une convention de stage académique
Lieu du stage :	LIP6, 4 place Jussieu, 75005 Paris
Durée :	5-6 mois entre février et septembre 2021
Rémunération :	Gratification stage
Connaissances requises :	Deuxième année de Master Recherche ou troisième année d'école d'ingénieur
Profil :	Mathématiques appliquées, Informatique, Optimisation combinatoire, RO
Informatique :	Algorithmique, Programmation orientée objet

Encadrement :

Anne-Elisabeth Falq	(LIP6, Sorbonne Université)	`anne-elisabeth.falq@lip6.fr`
Pierre Fouilhoux	(LIPN, Sorbonne Paris Nord)	`pierre.fouilhoux@lipn.fr`
Safia Kedad-Sidhoum	(Cedric, CNAM)	`safia.kedad_sidhoum@cnam.fr`

Références

[1] Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux et Safia Kedad-Sidhoum. Linear inequalities for neighborhood based dominance properties for the common due-date scheduling problem. Congrés Roadef 2020. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02498985`

[2] Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux et Safia Kedad-Sidhoum. Mixed integer formulations using natural variables for single machine scheduling around a common due date. Discrete Applied Mathematics. To appear. Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux, Safia Kedad-Sidhoum

[3] Francis Sourd. New exact algorithms for one-machine earliness-tardiness scheduling. INFORMS Journal on Computing, 21(1) :167-175, 2009.