

Master d'Informatique - Spécialité Androide
Module MAOA

Recherche Opérationnelle
et Optimisation Combinatoire

Partie E - Caractérisation

Pierre Fouilhoux

Sorbonne Université

2019-2020

1. Définitions
2. Outils de caractérisation
3. Le polytope du couplage

1. Définitions

2. Outils de caractérisation

3. Le polytope du couplage

Définitions

On appelle **caractérisation** (ou caractérisation complète) d'un polyèdre le fait de décrire l'ensemble des inégalités qui composent ce polyèdre.
Ainsi le PL composé par ces inégalités est entier.

Considérons un Problème d'Optimisation Combinatoire (\mathcal{P}).

L'expression *Formulation entière* pour (\mathcal{P}) est "dangereuse" :

- soit elle désigne un Programme linéaire en Nombres Entiers (PLNE) modélisant (\mathcal{P}) : ce qui est a priori NP-difficile à résoudre.
- soit elle désigne un Programme Linéaire dont tous les points extrêmes sont entiers, c'est-à-dire dont une caractérisation du polytope des solutions de (\mathcal{P}) : ce qui est a potentiellement polynomial.

On privilégiera ici l'expression "**formulation caractérisant le problème**" pour éviter cette ambiguïté.

Caractérisation et Algorithme

Considérons un Problème d'Optimisation Combinatoire (\mathcal{P})
pour lequel on connaît sa caractérisation par un ensemble d'inégalités $Ax \leq b$.

Résoudre (\mathcal{P}) revient à résoudre le PL composé par les inégalités $Ax \leq b$.
Mais il peut y avoir **un nombre exponentiel** d'inégalités dans $Ax \leq b$!

En fait (\mathcal{P}) est polynomial :

- si on connaît sa caractérisation $Ax \leq b$

ET

- soit on sait énumérer polynomialement tout $Ax \leq b$
- soit on sait séparer en temps polynomial toutes les inégalités de $Ax \leq b$

Caractérisation minimale

Etant donné un polyèdre P .

On a vu que :

- pour toute facette F de P , une des inéquations définissant F est nécessaire dans une caractérisation de P .
- Il existe une écriture unique d'un système linéaire à des multiplications par des scalaires près qui décrit les facettes de P (en fait c'est le cas si P est de pleine dimension).

On appelle **caractérisation minimale** un ensemble d'inégalités $Ax \leq b$ en nombre minimal caractérisant (P) .

Il s'agit alors d'un système où chaque inégalité correspond à exactement une facette de (P) .

On peut tout à fait obtenir des caractérisations non minimales : c'est-à-dire des caractérisations où il y a "trop" d'inégalités : c'est souvent le cas des systèmes qu'on a prouvé être entier par aspect TDI par exemple.

Caractérisation partielle

Remarque : Il a été montré que si un problème d'Optimisation Combinatoire est NP-difficile, à moins que $P=NP$, on ne peut pas “décrire” la caractérisation de (\mathcal{P}). (Cette preuve définit ce mot “décrire” de manière complexe).

Notez que le nombre d'inégalités du polytope du voyageur de commerce pour n villes a été estimé à 2^{2^n} inégalités par Groeschel.

On appelle “abusivement” **caractérisation partielle** le fait de décrire une partie des facettes d'un polyèdre.

Une caractérisation partielle, couplées à un algorithme de branchement, est la base de l'efficacité des algorithmes de **Branch-and-cut** permettant de résoudre les formulations PLNE.

On devrait uniquement appeler **caractérisation partielle** le fait de caractériser complètement le **polytope associé à un sous-problème** du problème d'optimisation combinatoire considéré.

Par exemple, on connaît la caractérisation du polytope du stable pour les graphes bipartis, les graphes planaires, les graphes d'intervalles,... mais certainement pas pour un graphe quelconque.

1. Définitions

2. Outils de caractérisation

3. Le polytope du couplage

Plusieurs outils de caractérisation

Considérons un problème d'optimisation combinatoire (\mathcal{P}) .

Considérons un ensemble d'inégalités $Ax \leq b$ qui sont valides pour (\mathcal{P}) et telles que tout point entier les vérifiant est une solution de (\mathcal{P}) , c'est-à-dire que $(Ax \leq b, x \text{ entier})$ forme un PLNE modélisant (\mathcal{P}) .

Il existe plusieurs techniques pour prouver que $Ax \leq b$ caractérise le polyèdre des solutions de (\mathcal{P}) :

- montrer que A est TU (voir chapitre correspondant)
- montrer que le système basé sur $Ax \leq b$ est TDI (voir chapitre correspondant)
- montrer qu'il n'y a pas de points extrêmes dans le polyèdre $Ax \leq b$ qui soit fractionnaire
- énumérer toutes les facettes du polyèdre et vérifier qu'il y a une inégalité pour chaque facette dans $Ax \leq b$
- et quelques autres : par lifting d'inégalités valides, décomposition des instances et recombinaison polyédrales, utilisation de formulations étendues (avec ou sans projection dans l'espace initial, étude des points extrêmes critiques,...

Cas particulier minimization : le dominant

Remarque : Dans le cas d'un problème (\mathcal{P}) de direction Minimisation, on peut noter que l'on peut seulement regarder le polytope des solutions dans la direction "minimisation" : seules les points extrêmes de ce "côté" du polytope peuvent être solution.

Si l'on nomme P le polytope des solutions de (\mathcal{P}), on appelle **dominant** de P le polyèdre $P^+ = P \cup R^+$: à chaque point du polytope P , on "ajoute" toutes les valeurs d'un cadran de repère.

Dans ce polyèdre, tous les points extrêmes de P potentiellement optimaux dans la direction minimisation sont conservés !

Minimiser sur P ou sur P^+ donnera les mêmes solutions.

Exemple :

Le polytope des coupes est inconnu : c'est normal le problème Max-Cut est NP-difficile.

En revanche, on sait résoudre Min-Cut en temps polynomial...

et on connaît le polyèdre défini par le dominant du polytope des coupes !

Caractériser “par absence de points fractionnaires”

Exemple du problème du couplage biparti

Soit un graphe biparti complet $G = (V_1 \cup V_2, E)$ associé à un poids $c \in \mathbf{N}^m$ associé aux arêtes de E .

On appelle **couplage** de G un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes. Le **problème du couplage biparti** consiste à déterminer un couplage qui maximise la somme des poids de ses arêtes.

Considérons le PL suivant

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\ & \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1 \quad \forall u \in V_1 \\ & \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1 \quad \forall u \in V_2 \\ & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

On a déjà montré que ce PL est TU.

Cela signifie que les inégalités de ce PL sont la caractérisation (complète) du problème du couplage dans les graphes bipartis.

Caractériser “par absence de points fractionnaires”

Exemple du problème du couplage biparti

Montrons à nouveau cette caractérisation mais en utilisant une preuve du type “par absence de points fractionnaires”.

Soit P le polytope associée à la formulation précédente, c'est-à-dire le polytope définie par les inégalités de cette formulation.

Soit x^* un point extrême de P

Posons $E_f = \{e \in E \mid 0 < x^*(e) < 1\}$ et supposons que E_f est non vide (on veut obtenir une contradiction).

Cas 1 : E_f contient un cycle.

On va montrer que x^* ne peut pas être un point extrême, c'est-à-dire que nous allons construire deux points y et z de P tels que $x^* = \frac{1}{2}(y + z)$.

Considérons un cycle C dans E_f .

En fait un graphe est biparti si et seulement si tous ses cycles sont de longueurs paires.

Donc comme G est biparti, C est de longueur paire.

Caractériser “par absence de points fractionnaires”

Exemple du problème du couplage biparti

Notons alors e_1, e_2, \dots, e_{2k} les arêtes de C . On pose alors

$$y(e) = \begin{cases} x^* + \epsilon & \text{si } e \in \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2k-1}\} \\ x^* - \epsilon & \text{si } e \in \{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\} \\ x^* & \text{otherwise} \end{cases} \quad z(e) = \begin{cases} x^* - \epsilon & \text{si } e \in \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2k-1}\} \\ x^* + \epsilon & \text{si } e \in \{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\} \\ x^* & \text{otherwise} \end{cases}$$

En prenant $\epsilon = \min\{x^*(e) \mid e \in E_f\}$, on voit que y et z sont positifs.

Donc y et z satisfont les inégalités triviales. De plus, $\epsilon > 0$ et y et z sont bien distincts et distincts de x .

De plus, on montre que y et z satisfont bien les autres inégalités :

Pour $u \in V_1$, prouvons que y satisfait $\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1$.

C'est trivialement vrai si u n'est pas dans le cycle C .

Si u est dans C , il y a deux arête e_i et e_{i+1} de C incidentes à u : on peut voir qu'alors

on a bien $\sum_{e \in \delta(u)} y(e) = \sum_{e \in \delta(u)} y(e) + \epsilon - \epsilon = \sum_{e \in \delta(u)} x^*(e) \leq 1$.

Par symétrie, on voit que y et z satisfont bien toutes les inégalités de la formulation.

Enfin, par construction, $x^* = \frac{1}{2}(y + z)$ donc x n'est pas un point extrême, une contradiction.

Caractériser “par absence de points fractionnaires”

Exemple du problème du couplage biparti

Cas 2 : E_f ne contient pas de cycle.

Dans ce cas, considérons le plus long chemin (en nombre d'arêtes) $\mu = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ de E_f .

On pose à présent $\epsilon = \min\{x^*(e), 1 - x^*(e) \mid e \in E_f\}$. On a bien $\epsilon > 0$ et pose alors les points y et z définis comme dans le Cas 1 qui sont distincts et distincts de x .

Montrons que y et z vérifient bien les inégalités de la formulation. De la même façon que dans le Cas 1, les inégalités triviales sont vérifiées ainsi que les inégalités de degré pour les sommets en dehors μ et pour les sommets intérieurs de μ .

On prouve également que les inégalités de degré sont vérifiées par y et z pour les extrémités de μ . En effet, notons u le premier sommet du chemin μ , incident à e_1 . z vérifie clairement l'inégalité de degré pour u . Remarquons à présent que u ne peut pas être incident à une autre arête de E_f car sinon μ ne serait pas un plus long chemin. De plus, comme $x^*(e_1) > 0$, u ne peut donc être incident à une arête f telle que $x^*(f) = 1$ donc u n'est incident qu'à des arête f telles que $x^*(f) = 0$. Donc y vérifie aussi l'inégalité de degré pour u (cas symétrique pour l'autre extrémité).

Similairement au Cas1, on peut conclure que cette formulation ne contient aucun point fractionnaire : elle est donc bien une caractérisation du problème du couplage dans les graphes bipartis. \square

Caractériser par preuve algébrique

Une autre technique de preuve, celle-ci très générique, est de prouver que toute inégalité définissant une facette est du type de l'une des contraintes de la formulation. Cette technique de preuve est à l'origine des approches polyédrales, mise au point pour le polytope du couplage (dans un graphe quelconque) par J. Edmonds [1965].

Soit (\mathcal{P}) un problème combinatoire consistant à rechercher une solution optimale dans un ensemble $\mathcal{S} \subset 2^E$ de solutions où E est un ensemble fini de taille n et valué par c , i.e. $(\mathcal{P}) : \max\{c(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$.

On pose alors χ^S le vecteur d'incidence de S tel que $\chi^S(e) = 1$ si $e \in S$ and $\chi^S(e) = 0$ si $e \in E \setminus S$.

Le polytope $P(\mathcal{S})$ associé à ce problème se définit comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des éléments de \mathcal{S} , i.

$$P(\mathcal{S}) = \text{conv}\{\chi^S \in \{0, 1\}^n \mid S \in \mathcal{S}\}.$$

Caractériser par preuve algébrique

Une conséquence du fait qu'une facette est une face maximale au sens de l'inclusion est le Lemme suivant.

Lemma

Soit $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette F de $P(S)$.

Soit $a'x \leq \alpha'$ une contrainte valide de $P(S)$ et soit F' la face associée à $a'x \leq \alpha'$.

Alors si $F \subset F'$ alors $F = F'$.

Ce lemme est une des clés de certaines preuves du fait qu'une face d'une contrainte est une facette.

Caractériser par preuve algébrique

Le lemme suivant, en revanche, est spécifique aux polytopes de pleine dimension. On utilise ce lemme sous les deux formes proposées i) et ii) qui ne sont en fait que la contraposée l'une de l'autre.

Lemma

Supposons que $P(S)$ soit de pleine dimension.

Soit $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P(S)$.

Posons S_a l'ensemble des solutions de S dont le vecteur d'incidence associé vérifie l'inégalité $ax \leq \alpha$ à l'égalité, i.e.

$$S_a = \{S \subset S \mid \text{et } ax^S = \alpha\}.$$

Soit $a'x \leq \alpha'$ une contrainte valide de $P(S)$.

i) Si pour toute solution $S \in S_a$, $a'x^S = \alpha'$, alors $ax \leq \alpha$ et $a'x \leq \alpha'$ sont identiques à un coefficient multiplicateur positif prêt.

ii) Si $ax \leq \alpha$ et $a'x \leq \alpha'$ ne sont pas identiques à un coefficient multiplicateur positif prêt, alors il existe $S \in S_a$ tel que $a'x^S < \alpha'$.

Le petit ii) de ce théorème est fréquemment la clef des preuves de caractérisation.

1. Définitions

2. Outils de caractérisation

3. Le polytope du couplage

3.1 Etude faciale

3.2 Caractérisation de $P_M(G)$

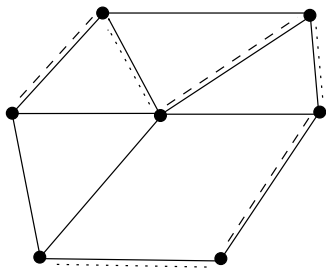
Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté quelconque.

Un **couplage** (*matching*, en anglais) est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes.

Si chaque arête e de G est munie d'un certain poids $c(e)$, le *problème du couplage maximum* dans G consiste à déterminer un couplage dont le poids total des arêtes est maximum, i.e. $\sum_{e \in E} c(e)$ maximum.

Dans le graphe suivant, les arêtes en pointillé propose un couplage de 3 arêtes et les arêtes en tiret un autre couplage de 3 arêtes.



----- 2 couplages

Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

Donnons tout d'abord une formulation du problème comme un programme linéaire en variables binaires.

Soit $x(e)$, $e \in E$, des variables binaires associées aux arêtes de G telle que

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ prise dans le couplage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme dans un couplage, il y a au plus une arête incidente à chaque sommet, le problème du couplage maximum est équivalent au PLNE \mathcal{P} suivant.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\ & \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, \quad \forall u \in V, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & 0 \leq x(e) \leq 1, \quad \forall e \in E, \\ & x(e) \text{ entier}, \quad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{2}$$

Notons \mathcal{P}^* le système d'inégalités (1)-(2) formées par les inégalités de degré et triviales ci-dessus.

Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

Considérons le polyèdre associé au problème du couplage maximum. On note $P_M(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des couplages de G , i.e.

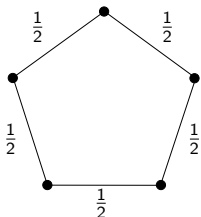
$$P_M(G) = \text{con}\{\chi^M \in \mathbf{R}^n \mid M \text{ couplage de } G\}.$$

On a vu (par deux techniques de preuves) que les inégalités (1)-(2) de la formulation précédente sont suffisantes pour caractériser le polytope $P(G)$ lorsque G est biparti, c'est-à-dire lorsqu'il ne contient pas de cycle impair.

Qu'en est-il pour un graphe quelconque ?

Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

Malheureusement, les inégalités \mathcal{P}^* (1)-(2) ne caractérisent pas le polytope $P_M(G)$. En effet, \mathcal{P}^* contient des points extrêmes fractionnaires dans le cas général. Par exemple, considérons l'exemple suivant.



Soient e_1, \dots, e_5 les 5 arêtes de ce graphe. Les valeurs fractionnaires représentent le vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ où toutes les composantes correspondent à une arête. Il est facile de voir que ce vecteur vérifie toutes les contraintes de \mathcal{P}^* . De plus, il vérifie à l'égalité les 5 contraintes de type (1) associée à chacun des 5 sommets. Comme de plus, ces contraintes sont linéairement indépendantes, ce point est bien un point extrême du domaine de définition de \mathcal{P}^* . Comme ce point est fractionnaire, il ne peut appartenir à $P_M(G)$. (Remarquons que si le poids était $c(e_i) = 1, i = 1, \dots, 5$, ce point serait même la solution maximale de \mathcal{P}^*).

Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

On veut donc “couper” ce point extrême fractionnaire pour “tendre” vers une caractérisation de $P_M(G)$.

Pour cela, on peut remarquer qu'un couplage dans ce cycle contient au plus deux arêtes. Par conséquent, l'inégalité $\sum_{i=1}^5 x(e_i) \leq 2$ est valide pour le polyèdre $P_M(G)$ du petit exemple. De plus, son ajout dans la description coupe ce point fractionnaire indésirable.

Tentons de généraliser cette contrainte.

En fait si on considère un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ avec $|S|$ impair. Alors il est clair qu'un couplage de G ne peut pas contenir plus de $\frac{|S|-1}{2}$ arêtes de $E(S)$. Par conséquent, considérons l'inégalité

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2}, \text{ pour tout } S \subseteq V \text{ avec } |S| \text{ impair} \quad (3)$$

qui est valide pour $P_M(G)$.

On peut remarquer que cette contrainte généralise bien la contrainte basée sur le cycle du petit exemple.

Le problème du couplage (dans un graphe quelconque)

On obtient alors l'ensemble d'inégalités (1)-(3)

$$\sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1 \quad \forall v \in V,$$

$$\sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \frac{|S| - 1}{2} \quad \text{pour tout } S \subseteq V \text{ avec } |S| \text{ impair}$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E,$$

Mais comment savoir si ces contraintes citées sont suffisantes pour décrire tout $P_M(G)$?

1. Définitions

2. Outils de caractérisation

3. Le polytope du couplage

3.1 Etude faciale

3.2 Caractérisation de $P_M(G)$

Etude faciale de $P_M(G)$

Nous allons approfondir l'étude faciale de $P_M(G)$.

Tout d'abord, étudions la dimension du polyèdre $P_M(G)$.

Theorem

$P_M(G)$ est de pleine dimension, i.e. $\dim(P_M(G)) = m$.

Preuve : On veut déterminer $m + 1$ vecteurs d'incidence de solutions affinement indépendants dans $P_M(G)$.

L'ensemble vide \emptyset est un couplage de G . Donc le vecteur d'incidence de \emptyset

$$\chi^\emptyset = (0, \dots, 0) \in P_M(G).$$

Les singletons arêtes $\{e\}$ de G . Alors $\{e\}$, $e \in E$, est un couplage de G . De plus, la matrice formé par les vecteurs-lignes $\chi^{\{e\}}$, $e \in E$, est la matrice identité. Donc les vecteurs $\chi^{\{e\}} - \chi^\emptyset$, $e \in E$, sont bien linéairement indépendants et les $m + 1$ points cités sont affinement indépendants.

Par conséquent, $P_M(G)$ est de pleine dimension. □

Etude faciale de $P_M(G)$

Nous connaissons trois familles, (2), (1) et (3), de contraintes valides pour $P_M(G)$, mais définissent-elles des facettes de $P_M(G)$?

Theorem

Les contraintes triviales $x(e) \geq 0$, $e \in E$, définissent des facettes de $P_M(G)$.

Preuve : Tout d'abord, il faut prouver que ces contraintes sont bien valides. Ce qui est évident dans ce cas présent.

Soit $e \in E$. Considérons la face $F = \{x \in P_M(G) \mid x(e) = 0\}$.

Nous montrons en premier que F est propre. En effet, $F \neq \emptyset$ car $\chi^\emptyset \in P_M(G)$ par exemple. De plus, $F \neq P_M(G)$ car $\chi^{\{e\}}(e) = 1$ et donc $\chi^{\{e\}} \in P_M(G) \setminus F$.

Enfin, nous exhibons m vecteurs affinement indépendants dans F . Ce sont par exemple, les vecteurs χ^\emptyset et $\chi^{\{e'\}}$, $e' \in E \setminus \{e\}$.

Ainsi, la dimension de F est $\dim(F) = m - 1$ et F est bien une facette.



Etude faciale de $P_M(G)$

Theorem

Les contraintes triviales $x(e) \leq 1$, $e \in E$ ne définissent pas des facettes.

Preuve : Soit $e \in E$.

L'inégalité $x(e) \leq 1$ peut-être obtenue à partir de l'inégalité de type (1) associée à l'un des sommets u incidents à e en lui additionnant les inégalités triviales $-x(e') \leq 0$ pour tout $e' \in \delta(u) \setminus \{e\}$.

Par conséquent, les contraintes triviales $x(e) \leq 1$, $e \in E$ ne définissent pas de facettes. □

On dit que les contraintes de type (1) **dominent** les contraintes triviales.

Par conséquent, en présence des inégalités de type (1), les inégalités triviales $x(e) \leq 1$, $e \in E$ peuvent être omises de toute formulation.

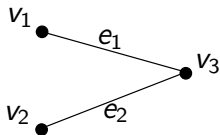
Etude faciale de $P_M(G)$

Pour les contraintes de type (1), il existe des cas où ces contraintes sont redondantes et ne définissent donc pas de facettes.

Theorem

Les contraintes de type (1) ne définissent pas en général de facettes.

Preuve : Il suffit de produire un contre-exemple. Considérons donc un graphe limité à deux arêtes adjacentes par une extrémité comme indiqué sur la figure suivante :



Si l'on prend les contraintes de type (1) associée aux sommets v_1 , v_2 et v_3 . On obtient le système

$$\begin{array}{rcl} x(e_1) & + & x(e_2) \leq 1 \\ x(e_1) & & \leq 1 \\ & & x(e_2) \leq 1 \end{array}$$

On voit donc que la première de ces trois contraintes domine les deux autres. Ces deux dernières ne définissent donc pas des facettes. □

└ Le polytope du couplage

└ Caractérisation de $P_M(G)$

1. Définitions

2. Outils de caractérisation

3. Le polytope du couplage

3.1 Etude faciale

3.2 Caractérisation de $P_M(G)$

- └ Le polytope du couplage
 - └ Caractérisation de $P_M(G)$

Caractérisation de $P_M(G)$

En fait, le système (1)-(3) d'inégalités caractérisent bien le polytope du couplage. Ce résultat donné par Edmonds en 1965 et redémontré de la façon suivante par Lovász en 1979.

Theorem

Pour tout graphe $G = (V, E)$, le polyèdre des couplages $P_M(G)$ est donné par les inégalités (2), (3) et (1) .

Caractérisation complète de $P_M(G)$

Pour prouver ce résultat, nous utilisons le lemme suivant, qui est l'adaptation au cas du couplage d'un lemme de la section précédent.

Pour $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$, on pose C_a l'ensemble des couplages dont le vecteur d'incidence associé vérifie l'inégalité $ax \leq \alpha$ à l'égalité, i.e.

$$C_a = \{C \in E \mid C \text{ couplage de } G \text{ et } a\chi^C = \alpha\}.$$

Lemma (Lemme de caractérisation)

Soit $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$. Soit $a'x \leq \alpha'$ une contrainte valide de $P_M(G)$.

i) Si pour tout couplage $C \in C_a$, $a'\chi^C = \alpha'$, alors $ax \leq \alpha$ et $a'x \leq \alpha'$ sont identiques à un coefficient multiplicateur positif prêt.

ii) Si $ax \leq \alpha$ et $a'x \leq \alpha'$ ne sont pas identiques à un coefficient multiplicateur positif prêt, alors il existe un couplage $C \in C_a$ tel que $a'\chi^C = \alpha'$.

Caractérisation complète de $P_M(G)$

[Technique de preuve très intéressante]

Avant de nous lancer dans la preuve du théorème, donnons quatre lemmes techniques, spécifiques au problème du couplage qui nous seront nécessaires pour la preuve.

Lemma

Supposons $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$ qui soit différente des contraintes triviales (2).

Alors $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$.

Notons que ce résultat indique que les seules inégalités utiles pour le polyèdre du couplage ont des coefficients positifs (en dehors de l'inégalité triviale $-x(e) \leq 0$).

Preuve : Soit $e_0 \in E$ et une inégalité $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$ qui soit différente de la contrainte triviale $x(e_0) \geq 0$. Par le théorème précédent il existe donc un couplage C un couplage de C_a tel que $e_0 \notin C$.

On pose alors $C' = C \setminus \{e_0\}$ qui est encore un couplage. Comme $ax \leq \alpha$ est une inégalité valide : $a\chi^{C'} \leq \alpha$. Or $a\chi^{C'} = a\chi^C - a(e_0)$ et donc $a\chi^C - a(e_0) \leq \alpha$.

Comme $a\chi^C = \alpha$, on en déduit que $-a(e_0) \leq 0$, c'est-à-dire $a(e_0) \geq 0$. □

Caractérisation complète de $P_M(G)$

Lemma

Supposons $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$ qui soit différente des contraintes de couplage (1).

Alors, pour tout sommet v , il existe un couplage C de C_a tel que C ne contienne pas d'arête incidente à v .

Preuve : Pour cela, nous allons montrer que, dans ce cas, $ax \leq \alpha$ est alors de type (1). Supposons qu'il existe un sommet $v_0 \in V$ tel que tout couplage de $c \in C_a$, C contient une arête incidente à v_0 . C'est-à-dire, $\chi^C(\delta(v_0)) = 1$. Ce qui revient à dire par le lemme de caractérisation que l'inégalité $ax \leq \alpha$ est de type (1). \square

Grphe support

On appelle **graphe support** G_a associé à l'inégalité $ax \leq \alpha$ le graphe composé des arêtes $e \in E$ telles que $a(0) > 0$.

Ce graphe peut-être vu comme la structure combinatoire de l'inégalité.

Lemma

G_a est connexe.

Preuve : Supposons que G_a soit l'union de deux graphes G_1 et G_2 disjoints. On pose alors a_1 (respectivement a_2) le vecteur obtenu depuis a en mettant à zéro les coefficients associés aux arêtes de G_1 (respectivement G_2). On note alors $\alpha_i = \max\{a_i \chi^C \mid C \text{ couplage de } G\}$, pour $i = 1, 2$.

Alors $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $a = a_1 + a_2$ donc $ax \leq \alpha$ s'obtient en sommant deux inégalités valides pour $P(G)$. Ce qui est impossible car elle définit une facette de $P(G)$. \square

Caractérisation complète de $P_M(G)$

Lemma

Soit $e = uv$ une arête de G telle que u et v soit dans G_a et telle qu'il existe un couplage $C \in C_a$ non incident à u et v . Alors l'arête e n'est pas dans G_a .

Preuve : Comme C n'est ni incident à u , ni à v , alors $C' = C \cup \{e\}$ est encore un couplage de G , donc, par validité, $a\chi^{C'} \leq \alpha$.

Or, comme $C \in C_a$, $a\chi^C = \alpha$ et $a\chi^{C'} = a\chi^C - a(e)$, on a $a(e) \leq 0$.

Or, par définition du graphe support, $a(e) > 0$, une contradiction. □

Caractérisation complète de $P_M(G)$

Revenons enfin au théorème d'Edmonds !

Theorem

Pour tout graphe $G = (V, E)$, le polyèdre des couplages $P_M(G)$ est donné par les inégalités (2), (3) et (1) .

Preuve du théorème :

Tout d'abord, notons que toutes les contraintes sont bien valides.

Soit $ax \leq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_M(G)$.

Le **schéma de la preuve** est le suivant :

- on suppose que $ax \leq \alpha$ définit une facette n'est pas de type (2) et (1), on va alors prouver que dans ce cas $ax \leq \alpha$ est de type (3)

- Pour prouver cela, on va exhiber un sous-ensemble $S_0 \subset V$ tel que

$\chi^C(\delta(S_0)) = \frac{|S_0| - 1}{2}$ pour tout couplage de $C \in C_a$: ce qui prouvera alors que $ax \leq \alpha$ est de type (3).

L'ensemble S_0 est en fait l'ensemble des sommets de V incidents aux arête e de G_a (i.e. telle que $a(e) > 0$). Considérons alors la contrainte (3) associée à S_0 , c'est-à-dire

$$x(E(S_0)) \leq \frac{|S_0| - 1}{2} \quad (4)$$

Caractérisation complète de $P_M(G)$

[La preuve est ici donnée à titre de culture générale]

Supposons donc que notre contrainte $ax \leq \alpha$ soit aussi différente de cette inégalité (4) associée à S_0 .

Donc il existe un couplage $C_1 \in C_a$ qui ne vérifie pas à l'égalité (4), i.e. tel que

$$\chi^{C_1} x(E(S_0)) < \frac{|S_0|-1}{2}.$$

Par conséquent, comme $\frac{|S_0|-1}{2}$ désigne le nombre de paires distinctes dans S_0 , S_0 contient au moins une paire u et v de sommets qui ne sont incidents à aucune arête de C_1 .

De plus, par le lemme de connexité du graphe support, G_a est connexe. On va supposer alors qu'on a choisi C_1 de manière à ce que la distance entre u et v dans G_a selon le poids a est la plus courte possible.

Par le lemme sur les arêtes de G_a , on sait aussi que u et v ne sont pas adjacents dans G_a .

Alors il existe un sommet z différent de u et v dans G_a sur la plus courte chaîne reliant u et v . Comme $ax \leq \alpha$ est différente des contraintes (1), par le lemme de caractérisation, il existe un couplage C_2 de C_a tel que C_2 ne contienne pas d'arête incidente à z .

Caractérisation complète de $P_M(G)$

[La preuve est ici donnée à titre de culture générale]

On peut alors montrer que C_2 est incident u et v . En effet, supposons que, par exemple, C_2 ne couvre pas u , dans ce cas, u et z sont deux sommets de G_a non couverts par C_2 . De plus, la chaîne qui les relie dans G_a est de taille strictement inférieure à celle reliant u et v (car $a(e) > 0$ pour tout e dans G_a), d'où contradiction. On obtient la même contradiction pour v .

Considérons alors l'ensemble d'arêtes $M = C_1 \cup C_2$. On peut déduire des deux paragraphes précédents que les sommets u , v et z sont de degré 1 dans le graphe G^* formé par les arêtes de M .

Sans perte de généralité, on peut supposer que la composante connexe de G^* contenant u consiste en une chaîne Q ne passant pas par z . Considérons alors les deux couplages

$$\bar{C}_1 = (C_1 \setminus Q) \cup (C_2 \cap Q)$$

et

$$\bar{C}_2 = (C_2 \setminus Q) \cup (C_1 \cap Q),$$

obtenus à partir de C_1 et de C_2 en permutant le statut "dedans" ou "dehors" des arêtes de Q pour chacun des couplages. Puisque $\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 = C_1 \cup C_2$, alors \bar{C}_1 et \bar{C}_2 sont dans C_a . Comme, \bar{C}_2 ne couvre ni u , ni z , cela contredit le choix de M_1 selon une chaîne minimale. \square

Caractérisation complète de $P_M(G)$

En plus de ce résultat de caractérisation, il existe un algorithme de séparation polynomial pour les inégalités (3).

Ainsi ce résultat plus cet algorithme prouve que le problème de couplage est polynomial !

Bon... on connaissait ce résultat de complexité depuis Koëning...

Mais ce résultat a ouvert la porte à de nombreux autres résultats sur des problèmes que l'on ne savait pas résoudre auparavant !

On considère ce résultat comme le père des travaux sur le voyageur de commerce qui a permis de résoudre exactement jusqu'à l'instance contenant toutes les villes de la planète (et aussi tous les pubs irlandais)... et de toute une théorie de la programmation mathématique bien vivante dans le monde de l'industrie.

Pour aller plus loin

Il y aurait d'autres titres de chapitres possibles sur ce thème :

- Les opérations de liftings dans les polyèdres très utilisées pour les problèmes "non-graphiques"
- Les techniques de décompositions de polyèdres qui permettent de prouver des cas polynomiaux nouveaux de problèmes classiques
- Les formulations étendues qui donnent des formulations compactes caractérisant certains problèmes classiques
- Certains polytopes célèbres comme celui des permutations (permutrons), des orbites de permutations (orbitopes)... qui sont la clef du traitement des symétries dans les PLNE
- Les inégalités dites de disjonction qui ont accéléré Cplex de manière importante
- ...