Master d'Informatique - Spécialité Androide
Module MAOA

Recherche Opérationnelle et Optimisation Combinatoire

Partie D - Approches Polyédrales

Pierre Fouilhoux

Sorbonne Université

2019-2020

Rappels : polyèdre et points extrêmes

Dans $\boldsymbol{R}^n$, on appelle *hyperplan* H un sous-espace de $\boldsymbol{R}^n$ défini comme l'ensemble des points vérifiant une équation linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $a_1, ..., a_n, b \in R$ tels que $H = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}$.

Un *polyèdre* $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires, i.e.,

$$P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

où A est une matrice $m \times n$ (m et n entiers positifs) et $b \in \boldsymbol{R}^m$.
On dit alors que le système $Ax \leq b$ **définit** ou **caractérise** le polyèdre P.

Ainsi, un polyèdre est tout simplement une figure géométrique définie comme la partie délimitée par des "plans".

En dimension 1 : les hyperplans sont des points
les polyèdres sont des intervalles.
En dimension 2 : les hyperplans sont des droites
les polyèdres sont des carrés, des rectangles,...
En dimension 3 : les hyperplans sont des plans
les polyèdres sont des cubes, des dodécaèdres,...

Rappels : polyèdre et points extrêmes

Un **polytope** est un polyèdre borné, c'est-à-dire qu'un polyèdre $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est un polytope s'il existe $x^1, x^2 \in \boldsymbol{R}^n$ tel que $x^1 \leq x \leq x^2$, pour tout $x \in P$.

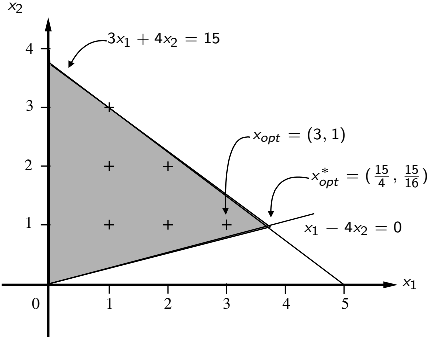
Un **point** d'un polyèdre est donc défini par des coordonnées $\tilde{x} \in \boldsymbol{R}^n$ tel que $A\tilde{x} \leq b$.

Un point x d'un polyèdre P est dit **point extrême** (ou parfois *sommet*) (vertex) de P s'il n'existe pas deux solutions x^1 et x^2 de P, $x^1 \neq x^2$, telles que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$. En d'autre terme, un point extrême de P est un point de P qui n'est pas le milieu d'un segment contenu dans P.

THEOREME : Un point $\tilde{x}$ d'un polyèdre P est un point extrême de P **si et seulement** on peut produire n inégalités de la matrice A qui sont vérifiées par $\tilde{x}$ à l'égalité **et** qui sont linéairement indépendantes.

Considérer le cas très simple de ce PLNE (P) à 2 variables

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\ z = 2x_1 + x_2\\
&x_1 - 4x_2 \leq 0,\\
&3x_1 + 4x_2 \leq 15,\\
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

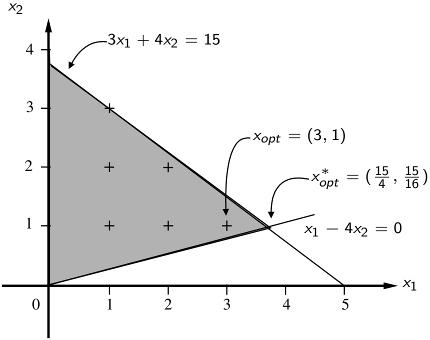


On note (P^*) sa relaxation linéaire (obtenue en enlevant la contrainte d'intégrité.)

En deux dimensions, on peut visualiser le domaine de définition de (P^*) : il est donné par les 4 contraintes du programme : c'est un polyèdre (dessiné en gris sur la figure.)

Considérer le cas très simple de ce PLNE (P) à 2 variables

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z = 2x_1 + x_2\\
&x_1 - 4x_2 \leq 0,\\
&3x_1 + 4x_2 \leq 15,\\
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0,\\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

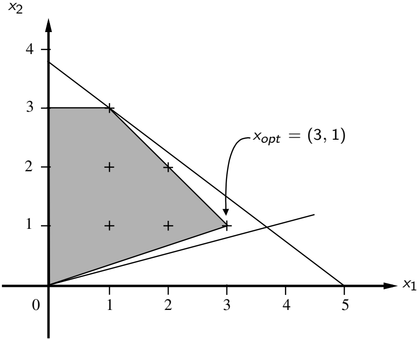


Notons
x_{opt} solution entière optimale de (P).
x^*_{opt} solution "fractionnaire" optimale de (P^*).
La solution optimale de (P^*) est ici un des sommets de ce polyèdre pour une valeur fractionnaire x^*_{opt} associée à la valeur $z^*_{opt} = 8 + \frac{7}{16}$.

Les points entiers contenus dans le polyèdre gris forment donc l'ensemble des solutions possibles pour (P). La solution optimale est ici unique, c'est le point x^{opt} de valeur $z_{opt} = 7$.

Regardons les points extrêmes qui sont entiers par construction).

$$\mathrm{Max}\ z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 0,$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 15,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$



Prenons un élastique circulaire assez serré et lâchons-le "autour" des points entiers : on obtient un nouveau polyèdre (en gris sur le dessin) : ce polyèdre est **l'enveloppe convexe** des points entiers solutions.

Prenons x_{opt} point extrême optimale de l'enveloppe convexe des solutions entières de (P) : **il est par construction entier !**

Remarques importantes :

• Des solutions optimales de (P) (donc entières) peuvent être prises parmi les points extrêmes (*i.e.* les sommets) de ce polyèdre qu'est l'enveloppe convexe des solutions de (P).
Connaissant l'enveloppe convexe, trouver un point extrêmes optimales (donc entier) de l'enveloppe convexe revient à résoudre un PL !
• On peut remarquer que le polyèdre convexe des points entiers est bien entendu contenu dans le polyèdre défini par les inégalités de la formulation du programme (appelé souvent domaine de définition du programme linéaire).

• Dans le cas d'une maximisation, on a naturellement $z_{opt} \leq z^*_{opt}$.

• Ces remarques sont toujours vraies quelque soit la dimension du problème.

Contourner l'énumération des solutions

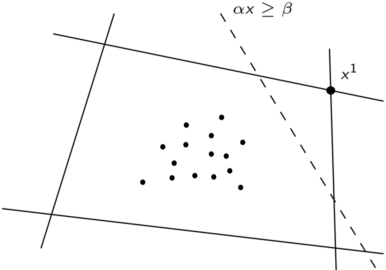
Plutôt que chercher une solution optimale, on recherche alors l'enveloppe convexe !

L'enveloppe convexe est alors l'inconnue ! Une fois déterminée, résoudre le programme linéaire associée à ce polyèdre donne la solution optimale de (P).

Dans le schéma suivant, les droites schématisent les contraintes connues dans le programme (P) :
- les contraintes $Ax \leq B$ de la formulation,
- les inégalités $\alpha x \leq \beta$ valides ajoutées.

Les points noirs schématisent les solutions entières (inconnues a priori) dont on recherche l'enveloppe convexe (inconnue de même).

$$(P_2) \begin{cases} \text{Max } cx \\ Ax \leq B \\ \alpha x \leq \beta \\ x \text{ entier} \end{cases}$$



Contourner l'énumération des solutions

Toute la problèmatique d'une **approche polyédrale** pour un problème d'optimisation combinatoire est de savoir quelles sont les "meilleures" inégalités à ajouter pour s'approcher de l'enveloppe convexe des solutions du problème.

Si on connaît les inégalités linéaires définissant l'enveloppe convexe, résoudre un PLNE revient à résoudre un simple PL (par un algorithme polynomial !)
On coutourne ainsi l'explosion combinatoire de l'énumération des solutions

Malheureusement si en petites dimensions le calcul de l'enveloppe convexe des points entiers est réalisable, on ne sait pas déterminer l'enveloppe convexe autrement que par des algorithmes exponentiels ! Cette approche ne peut être "automatiser".
A moins que $P = NP$, on ne peut pas connaître et énumérer l'enveloppe convexe d'un problème NP-difficile.

Heureusement il y a plein de cas où l'on sait quand même déterminer toute ou partie de l'enveloppe convexe et améliorer fortement la résolution des PLNE par une approche polyédrale **dédiée** et **partielle**.

Combinaison convexe

• Un ensemble $S \subset \boldsymbol{R}^n$ est **convexe** si, pour deux points quelconques x_1 et x_2 pris dans S, le segment $[x_1, x_2]$ est tout entier contenu dans S, *i.e.*

$$\forall x_1 \in S, \forall x_2 \in S, \forall \lambda \in [0,1], \text{ alors } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S.$$

• Soient p points $x^1, ..., x^p$ dans $\boldsymbol{R}^n$.
Un point $x \in \boldsymbol{R}^n$ est une **combinaison convexe** des points $x^1, ..., x^p$ s'il existe p scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \boldsymbol{R}_+$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

Par exemple, pour $p = 2$, tout point du segment $[x^1 x^2]$ est une combinaison convexe de x^1, x^2.

Remarque :
Etant donné un ensemble de points $S = \{x^1, ...x^p\}$, on peut avoir besoin de tester si un point donné x^* appartient ou non à $conv(S)$. Ce problème se ramène à vérifier si x^* est combinaison convexe des points $x^1, ..., x^p$, c'est-à-dire, s'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = x^*, \\ \lambda_i \geq 0, \text{pour } i = 1, ..., p. \end{array}$$

C'est-à-dire vérifier que ce système d'égalités et d'inégalités contient une solution : cela peut se faire en temps polynomial (par exemple par un PL avec une fonction objective quelconque).

Enveloppe convexe

• Soit S un ensemble non vide de points de $\boldsymbol{R}^n$.
L'**enveloppe convexe** des points de S, notée *conv(S)*, est l'ensemble de tous les points de $\boldsymbol{R}^n$ qui peuvent s'écrire comme combinaison convexe de points de S.

Remarque : l'enveloppe convexe d'un ensemble de points S peut être vue également comme le plus petit ensemble convexe contenant S.

• En fait, un ensemble $C \subset \boldsymbol{R}^n$ est convexe si et seulement si tout point pouvant s'écrire comme une combinaison convexe des points de C est dans C.
En d'autres termes, un ensemble C est convexe si et seulement si $C = conv(C)$.

Remarque : toute intersection d'un nombre fini d'ensemble convexe est encore convexe.

Les résultats donnés dans ce chapitre s'appliquent pour un polyèdre quelconque. Mais l'objectif de ce document est d'étudier plus particulièrement les polyèdres définis à partir d'un problème d'optimisation combinatoire.

Soient $\mathcal{P}$ un **problème d'optimisation combinatoire** sur n décisions (ou variables).
Notons S l'ensemble des vecteurs d'incidence de toutes les solutions de $\mathcal{P}$.
Notons c une fonction coût associée aux variables du problème.

Le problème $\mathcal{P}$ s'écrit

$$\max \{c\chi \mid \chi \in S\}$$

Regardons l'enveloppe convexe $conv(S)$ des solutions S de $\mathcal{P}$.

Un exemple en dimension 3 :

Considérons le problème du sous-graphe acyclique induit, c'est-à-dire dont les solutions sont les ensembles de sommets n'induisant aucun cycle.

Considérons le cas très simple d'un graphe limité à un cycle de 3 sommets (un triangle).
Notons $1, 2$ et 3 les 3 sommets de cycle.

Considérons les solutions de ce problème, c'est-à-dire des ensembles de sommets induisant des graphes sans cycle :

$$\emptyset \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{2,3\}$$

Quels sont leurs vecteurs d'incidence ?

$$\begin{array}{rl}
\chi^{\emptyset} = & [\ 0\ \ 0\ \ 0\ ] \\
\chi^{\{1\}} = & [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ] \\
\chi^{\{2\}} = & [\ 0\ \ 1\ \ 0\ ] \\
\chi^{\{3\}} = & [\ 0\ \ 0\ \ 1\ ] \\
\chi^{\{1,2\}} = & [\ 1\ \ 1\ \ 0\ ] \\
\chi^{\{1,3\}} = & [\ 1\ \ 0\ \ 1\ ] \\
\chi^{\{2,3\}} = & [\ 0\ \ 1\ \ 1\ ]
\end{array}$$

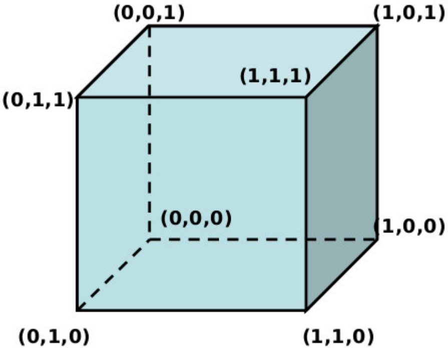
Par contre le point

$$\chi^{\{1,2,3\}} = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]$$

n'est pas solution.

Un exemple en dimension 3 :

Quelle est l'enveloppe convexe de ces 7 points ?



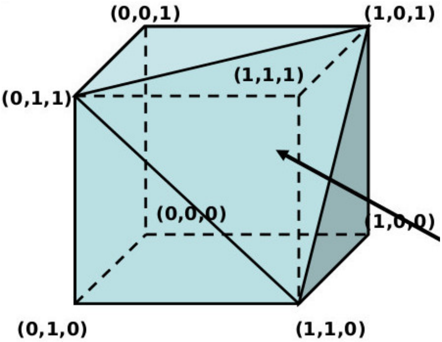
Cette enveloppe convexe est incluse dans l'hyper-cube de dimension 3.

Qui est simplement donnée par :

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 1 \\
x_2 &\leq 1 \\
x_3 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Un exemple en dimension 3 :

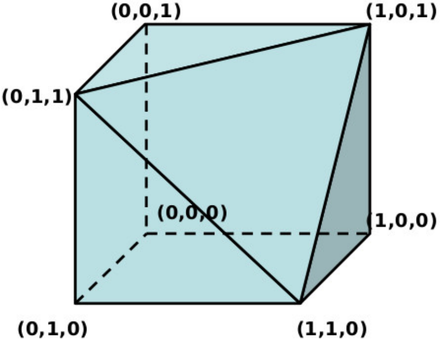
Quelle est l'enveloppe convexe de ces 7 points ?



$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

Un exemple en dimension 3 :

Quelle est l'enveloppe convexe de ces 7 points ?



L'enveloppe convexe de ces 7 points est donnée (caractérisée) par :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

S versus $conv(S)$

Soient $\mathcal{P}$ un problème d'optimisation combinatoire sur n décisions (ou variables).
Notons S l'ensemble des vecteurs d'incidence de toutes les solutions de $\mathcal{P}$.
Notons c une fonction coût associée aux variables du problème.
Le problème $\mathcal{P}$ est

$$\max \{c\chi \mid \chi \in S\}$$

Considérons l'enveloppe convexe $conv(S)$ des solutions de $\mathcal{P}$.

Regardons le problème suivant

$$\max \{c\chi \mid \chi \in conv(S)\}$$

Deux remarques essentielles :

- Tous les points extrêmes de l'enveloppe convexe $conv(S)$ sont entiers par construction.
- Des points optimaux de S sont parmi les points extrêmes de l'enveloppe convexe $conv(S)$.

Mais qu'est-ce que conv(S) ?

Une enveloppe convexe est un polyèdre

Theorem (*de Minkowski*)

Un ensemble (non vide) de points $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ *est un polytope si et seulement s'il existe un ensemble de points* S *tel que* $P = conv(S)$.

Conséquences essentielles :

- $conv(S)$ est un polytope (ce que nous avions déjà constaté sans le prouver).
- donc $conv(S)$ peut être décrit par un système fini d'inégalités linéaires
- et $\max \{c\chi \mid \chi \in conv(S)\}$ est un programme linéaire.

Optimiser sur $conv(S)$

La proposition suivante établit la relation entre :
- optimiser sur l'ensembe discret S
- optimiser sur l'enveloppe convexe (continue) $conv(S)$.

Theorem

Soient $S \subseteq \boldsymbol{R}^n$ un ensemble de points et c un vecteur de $\boldsymbol{R}^n$. Alors

$$max\{cx \mid x \in S\} = max\{cx \mid x \in conv(S)\}.$$

Preuve. Soient $\bar{x} \in S$ tel que $c\bar{x} = \max\{cx \mid x \in S\}$ et $x^* \in conv(S)$ tel que $cx^* = \max\{cx \mid x \in conv(S)\}$. Comme $\bar{x} \in S \subseteq conv(S)$, alors $c\bar{x} \leq cx^*$. De plus, comme x^* est un point optimal sur un polyèdre , x^* est un point extrême de $conv(S)$. Par conséquent $x^* \in conv(S)$. Ce qui implique que $cx^* \leq c\bar{x}$, et alors $cx^* = c\bar{x}$. $\square$

Polytope des solutions

• Le théorème précédent établit le lien entre optimiser sur un ensemble de points et optimiser sur un ensemble convexe.
Optimiser $\mathcal{P}$ correspond à optimiser sur $conv(S)$.

• Par la programmation linéaire, on sait que les points extrêmes de $conv(S)$ sont des solutions optimales de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire précisément les solutions de S.
Optimiser sur $conv(S)$, c'est résoudre un PL !

Une approche polyédrale pour un problème d'optimisation combinatoire consiste à rechercher l'enveloppe convexe de ses solutions. Car si l'on sait caractériser le polyèdre $conv(S)$ par un système d'inégalités linéaires, alors on a ramené le problème $\mathcal{P}$ à la résolution d'un programme linéaire !

Cette enveloppe convexe est appelée le polytope associé au problème
ou encore **polytope des solutions du problème**.

Exemple : Le polytope du stable

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
Considérons les solutions possibles pour le problème du stable de poids maximum **quelque soit le coût associé aux sommets**.

Les solutions du problème du stable maximum sont les sous-ensembles de sommets $S \subset V$ qui sont des stables (c'est-à-dire n'ayant pas d'arêtes les reliant dans G). Notons $stab(G)$ l'ensemble des stables de G, ainsi $stab(G)$ est l'ensemble des solutions du problème du stable maximum.

Regardons quelques exemples :
- $\emptyset \in stab(G)$: l'ensemble vide est un stable.
- $\{u\} \in stab(G)$ pour chaque sommet u : les singletons sont des stables.
- $\{u, v\} \in stab(G)$ pour toute paire u, v de sommets telle que $uv \notin E$: chaque non-arête est un stable.

Exemple : Le polytope du stable

A chaque stable $S \in stab(G)$, on fait correspondre un **vecteur d'incidence** χ^S tel que

$$\chi^S[u] = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.

- Pour $\emptyset \in stab(G)$

$$\chi^{\emptyset} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\{u\} \in stab(G)$ pour chaque sommet u :

$$\chi^{\{u\}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ u \end{array}$$

- $\{u, v\} \in stab(G)$ si u, v non-arête de G.

$$\chi^{\{u,v\}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ u v \end{array}$$

Exemple : Le polytope du stable

On note alors $P(G)$ **le polytope des stables** de G l'enveloppe convexe des des vecteurs d'incidence des solutions du problèmes du stable, *i.e.*

$$P(G) = conv\{\chi^s \mid S \text{ est un stable de } G\}.$$

On sait que tous les points extrêmes de $P(G)$ sont des vecteurs d'incidence d'un stable de G : on ne peut pas polynomialement décrire $P(G)$ par ces points extrêmes.

Peut-on le décrire autrement ?

Quelle est déjà sa dimension : est-il dans $\boldsymbol{R}^3$?... non bien sûr.

On sait que les vecteurs d'incidence d'un stable sont dans $\boldsymbol{R}^n$ avec $n = |V|$ le nombre de sommets de G : mais il peut être plus petit ? Répondons à cette question.

Combinaison linéaire

Definition

Prenons un vecteur dans l'espace $x \in \boldsymbol{R}^n$.
On dit que le vecteur x est une **combinaison linéaire** des k vecteurs $x^1, ..., x^k \in \boldsymbol{R}^n$ s'il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \boldsymbol{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$.

Exemples :

Dans $\boldsymbol{R}^2$: un vecteur x^1 est combinaison linéaire d'un vecteur x^2 s'il existe un réél quelconque λ tel que $x^1 = \lambda x^2$: c'est-à-dire que les vecteurs représentent la même "direction".

Dans $\boldsymbol{R}^3$: un vecteur x^3 n'est pas combinaison linéaire de deux autres vecteurs x^1, x^2 si x^3 n'est pas dans le plan formé par x^1 et x^2 (s'ils ne sont pas coplanaires).

Dans $\boldsymbol{R}^n$: parmi $n+1$ vecteurs, l'un d'entre eux est nécessairement combinaison linéaire de n autres.

Indépendance linéaire

Definition

Des vecteurs $x^1, ..., x^k \in \boldsymbol{R}^n$ sont dits **linéairement indépendants** si le système

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0$$

admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, ..., k$.

Exemple dans $\boldsymbol{R}^3$

- Deux vecteurs linéairement indépendants x^1 et x^2 forment un repère à 2 dimensions, c'est-à-dire qu'ils engendrent un espace vectoriel de dimension 2 formé par tous les vecteurs qui s'écrivent $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$ pour toutes les valeurs réelles λ_1 et λ_2.
- Tout vecteur x^3 qui n'est pas dans cet espace vectoriel de dimension 2 engendrera alors tout l'espace $\boldsymbol{R}^3$ en formant un repère à 3 dimension.

Remarque essentielle :

Si un polyèdre contient un repère vectoriel à p dimension,
ce polyèdre est au moins un objet géométrique de dimension p.

Boîte à outil de l'algèbre linéaire :

Considérons k vecteurs $x^1, ..., x^k \in \boldsymbol{R}^n$.
Posons la matrice M dont les lignes (ou colonnes) sont les coordonnées de ces k vecteurs.

On appelle **rang de** M, noté rang(M), le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) de M linéairement indépendantes.
Conséquemment, si rang(M)=k, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Si la matrice est carrée, $k = n$, alors les n vecteurs sont linéairement indépendants si et seulement si le *déterminant* de la matrice M est non-nul.

Quelques cas classiques de matrice à déterminant non-nul.

La matrice Identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire à "diagonale de produit non nul"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice à "diagonale faite de matrices à déterminant non nul"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs et points...

En prenant un ensemble S de solutions dans l'espace $\boldsymbol{R}^n$,
on regarde un ensemble de **points** de l'espace :
donc la connaissance des polytopes des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire vient de points et non de vecteurs !

Le vecteur d'incidence χ^s d'une solution $s \in S$
donne les coordonnées du point s dans $\boldsymbol{R}^n$.

Pour deux points s_1 et s_2 de S,
les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{s_1 s_2}$ dans $\boldsymbol{R}^n$ sont $\chi^{s_2} - \chi^{s_1}$.

Remarque :
Pour avoir d vecteurs, il faut $d+1$ points.

Par exemple $d+1$ points $x^1, \ldots, x^{d+1}$ forment d vecteurs
$x^2 - x^1, x^3 - x^1, \ldots, x^d - x^1, x^{d+1} - x^1$.

Indépendance affine

Definition

Des points $x^1, ..., x^k \in \boldsymbol{R}^n$ sont dits **affinement indépendants**
si $x^2 - x^1, ..., x^k - x^1$ sont $k - 1$ vecteurs linéairement indépendants.

la combinaison linéaire concerne des vecteurs et la combinaison affine des points de l'espace.

Exemple :
Dans $\boldsymbol{R}^2$, considérons trois points A, B, C dont les coordonnées des points sont x_A, x_B et x_C. On peut considérer les vecteurs $x_B - x_A$ et $x_C - x_A$.

Demander *"Les trois points A, B, C sont-ils non-alignés ?"*
revient à demander "*les 3 points sont-ils affinement indépendants ?*"

Demander *"Les 2 vecteurs $x_B - x_A$ et $x_C - x_A$ sont-ils non-parallèles ?"*
revient à demander *"Les 2 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?"*

Ces **4 questions sont indentiques** d'un point de vue "indépendance" des coordonnées !

Indépendance affine

Theorem

Des points $x^1, ..., x^k \in \boldsymbol{R}^n$ sont affinement indépendants si et seulement si le système

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, ..., k$.

Preuve.
($\Rightarrow$) Soient $x^1, \dots, x^k \in R^n$ des points affinement indépendants. Considérons le système, $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$. Par la 2nde équation, on obtient $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^k \lambda_i$. Donc on peut en déduire que $\sum_{i=2}^k \lambda_i x^i - (\sum_{i=2}^k \lambda_i)x_1 = 0$ et ainsi $\sum_{i=2}^k \lambda_i (x^i - x_1) = 0$. Or par définition, $x^2 - x^1, \dots, x^k - x^1$ sont $k-1$ vecteurs linéairement indépendants. Donc le système $\sum_{i=2}^k \lambda_i' (x^i - x_1) = 0$ admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour $i = 2, \dots, k$ et par conséquent $\lambda_1 = 0$.
($\Leftarrow$) Soient $x^1, \dots, x^k$ des points de $\in R^n$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$. Considérons alors le système $\sum_{i=2}^k \lambda_i' (x^i - x_1) = 0$. Ce système s'écrit également $\sum_{i=2}^k \lambda_i' x^i - (\sum_{i=2}^k \lambda_i')x_1 = 0$ et notons que la somme des coefficients des coordonnées du système est nulle. Donc par hypothèse ce système admet pour solution unique $\lambda_i' = 0$ pour $i = 2, \dots, k$ (et $-\sum_{i=2}^k \lambda_i' = 0$). Ainsi les vecteurs $x^2 - x^1, \dots, x^k - x^1$ sont linéairement indépendants et les points sont donc $x^1, \dots, x^k$ affinement indépendants. □

Indépendance linéaire ou affine ?

Remarque algébrique : Les coordonnées d'un point x peuvent être vues comme les coordonnées d'un vecteur (par exemple en considèrant le vecteur allant de l'origine au point x qui est de coordonnées x).
Si l'on considère des éléments $x^1, ..., x^k$ de $\mathbb{R}^n$, on peut donc les voir comme des points ou des vecteurs !

Remarque utile 1 :
Par le théorème précédent, si les éléments $x^1, ..., x^k$ sont linéairement indépendant alors ils sont affinement indépendants.

Par contre la réciproque n'est pas vraie.

Remarque utile 2 :
Si on veut montrer que $0, x^1, ..., x^n$ sont affinement indépendants,
alors il suffit de montrer que $x^1, ..., x^n$ linéairement indépendants !

Dimension d'un polyèdre

Definition

Un polyèdre P de $\boldsymbol{R}^n$ est de **dimension** d s'il y a au maximum $d+1$ points affinement indépendants dans P.
On écrit alors $dim(P) = d$.
Un polyèdre P est dit de **pleine dimension** si $dim(P) = n$.

Quelques polyèdres :
- une droite est de dimension 1.
- une droite dans $\boldsymbol{R}^2$ n'est donc pas de pleine dimension.
- une droite dans $\boldsymbol{R}^1$ est de pleine dimension.
- une droite est de dimension 1 est de petite dimension quand elle est plongée dans un espace de dimension $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 1$.
- un plan (de $\boldsymbol{R}^2$) plongé dans l'espace $\boldsymbol{R}^3$ est de dimension 2 et n'est donc pas de pleine dimension.
- un cube est $[0,1]^3$ où $[0,1]$ désigne le segment continue de 0 à 1.
- un cube est de dimension 3 est de pleine dimension dansR^3.
- un cube n'est pas de pleine dimension dans $\boldsymbol{R}^4$.
- un hypercube $[0,1]^n$ est de pleine dimension dans $\boldsymbol{R}^n$.

Exemple : le polytope du stable

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté avec $n = |V|$.
Soit $P(G)$ le polytope des stables de G, i.e.,

$$P(G) = conv\{\chi^s \mid S \text{ est un stable de } G\}.$$

On sait que $P(G) \subset \boldsymbol{R}^n$.
Et même que $P(G) \subset [0,1]^n$ en notant $[0,1]$ le segment continu de 0 à 1.

Montrons que $P(G)$ est de pleine dimension, c'est-à-dire que $dim(P(G)) = n$.

Réponse :
Il suffit de produire $n+1$ points de $\boldsymbol{R}^n$ affinement indépendants qui sont dans $P(G)$.
Pour cela on pourrait produire des points fractionnaire quelconques de cet espace "continu" qu'est un polytope...
Mais on peut se limiter à énumérer des points entiers... qui sont ici des vecteurs d'incidence de stables !

Exemple : le polytope du stable

Par exemple, les vecteurs d'incidence :
- de l'ensemble vide $\emptyset$
- et des singletons $\{u\}$, $u \in V$.

En effet, ces ensembles sont bien tous des stables et il y en a bien $n+1$.

De plus, les vecteurs $\chi^{\{u\}} - \chi^{\emptyset}$ sont bien linéairement indépendants. En effet la matrice dont les lignes sont ces vecteurs est la matrice identité qui est bien de plein rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les $n+1$ points $\chi^{\emptyset}, (\chi^{\{u\}})_{u \in V}$ sont affinement indépendants.

Par conséquent, $P(G)$ est de pleine dimension. $\square$

Points intérieurs

Considérons maintenant un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ et considérons une description de P par un système de m_1 inéquations et m_2 équations, ainsi :

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} A_i x \leq b_i, & i = 1, ..., m_1 \\ B_j x = d_j, & j = 1, ..., m_2 \end{array} \right\}.$$

Cette écriture implique que, pour toute inéquation $A_i x \leq b_i$, $i \in \{1, ..., m_1\}$, il existe une solution $\tilde{x}$ de P telle que $A_i \tilde{x} < b_i$ (sinon, elle serait rangée parmi les équations). On note dans cette section A, B, b et d les matrices et vecteurs correspondant à cette écriture de P.

Un point $x^* \in P$ est appelé **point intérieur** de P si $A_i x^* < b_i$ pour $i = 1, ..., m_1$.

Lemma

Si P est non vide, alors P contient un point intérieur.

Preuve. Pour $i = 1, \ldots, m_1$, soit $x^i \in P$ tel que $A_i x^i < b_i$. Posons $\bar{x} = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} x^i$. Pour $i = 1, \ldots, m_1$,$A_i \bar{x} = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} A_i x^i < \frac{1}{m_1} m_1 b_i < b_i$. De plus, pour $j = 1, \ldots, m_2$, $B_j \bar{x} = d_j$. Donc $\bar{x}$ est un point intérieur. $\square$

Rang et Dimension

Rappel : pour une matrice donnée M, on appelle *rang de M*, noté $\text{rang}(M)$, le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) de M linéairement indépendantes.

Theorem

Si $P \neq \emptyset$, alors $\dim(P) = n - \text{rang}(B)$ (où B est la matrice des égalités).

Preuve. On peut remarquer que si M est de rang r et s'il existe un vecteur l tel que $\{x \in R^n \mid Mx = l\} \neq \emptyset$, alors le nombre maximum de points affinement indépendants dans l'ensemble $\{x \in R^n \mid Mx = l\}$ est $n - r + 1$. Posons $k = \mathrm{rang}(B)$. Par la remarque précédente, le système $Bx = 0$ admet $n - k + 1$ solutions $x^1, \ldots, x^{n-k+1}$ affinement indépendantes. Comme $P \neq \emptyset$, par le lemme sur les points intérieurs, P contient un point intérieur $\bar{x}$, donc $A_i\bar{x} < b_i$ pour $i = 1, \ldots, m_1$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $A_i\bar{x} + \epsilon A_i x^j \leq b_i$, pour tout $i = 1, \ldots, m_1$ et $j = 1, \ldots, n - k + 1$. On considère alors les points $y^j = \bar{x} + \epsilon x^j$ pour $j = 1, \ldots, n - r + 1$. Nous avons $y^j \in P$ pour $j = 1, \ldots, n - r + 1$. De plus, comme les points $x^1, \ldots, x^{n-k+1}$ sont affinement indépendants, les points $y^1, \ldots, y^{n-k+1}$ le sont aussi. Ce qui implique que $\dim(P) \leq n - k$. Par conséquent, $\dim(P) = n - k$. □

Corollaire : En conséquence de ce théorème, un polyèdre est de pleine dimension si et seulement s'il contient un point vérifiant toutes les contraintes du polyèdre avec inégalité stricte.

Ce résultat est néanmoins difficile à appliquer en général car les égalités du polytope sont parfois difficiles à déterminer.

Pas de théorème “fort” de Carathéodory

Soit un ensemble de points S et le polytope défini par son enveloppe convexe $conv(S)$. On peut se demander combien de points sont nécessaires pour définir par combinaison tous les points d'une enveloppe convexe...

On a le résultat suivant connu sous le nom de théorème de Carathéodory pour les ensembles convexes.

Theorem

Soient $S \subseteq \boldsymbol{R}^d$ un ensemble de points de $\boldsymbol{R}^n$ et x un point donné de $conv(S)$. Alors x peut être écrit comme une combinaison convexe de $d' \leq n+1$ points affinement indépendants dans $conv(S)$.

Ce théorème de Carathéodory peut se lire comme le fait que tout point $x \in \boldsymbol{R}^n$ dans l'enveloppe convexe de d points peut s'écrire comme la combinaison convexe d'au plus $n+1$ points affinement indépendants de S. Or $n+1$ est bien souvent petit devant d (dans notre cas de polytope de solutions, d est exponentiel).

Malheureusement, ceci ne signifie aucunement qu'il existe une sorte de “base convexe” de taille réduite (c'est-à-dire trouver un ensemble générateur) ! En effet, cet ensemble de points générateurs est spécifique à chaque point x !

Comment décrire le polytope des solutions ?

Dans le cadre des polytope des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire, le nombre d des solutions de S est souvent exponentiel !

Le théorème précédent n'indique en rien que l'on puisse se passer de certains de ces points solutions.
En fait, il semble naturel (et on le montre un peu plus loin) que tous les points extrêmes de $conv(S)$ sont nécessaires à décrire tout $conv(S)$... or on peut facilement construire des polytope où tous les points de S sont points extrêmes de $conv(S)$: c'est par exemple le cas lorsque S est un sous-ensemble des points extrêmes 0-1 d'un hypercube !

Alors comment décrire le polytope des solutions ?
Par ses faces !

Si on arrive à donner la dimension d'un polyèdre, on ne connaît pas forcément les inégalités qui le décrivent.
Etudions déjà les propriétés de ces inégalités.

On considère dans cette section un polyèdre $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$, et supposons que nous connaissons un système qui décrit P et qui est écrit comme dans la section précédente. Nous allons étudier quelles sont les inégalités de ce système essentielles à la description de (P).

Rappel : Inégalités valides

Une inégalité $ax \leq \alpha$ est **valide** pour pour un polyèdre P si tout point de P la vérifie, *i.e.* $a\chi \leq \alpha$ pour tout point $\chi \in P$: ces points peuvent être n'importe quel point (fractionnaire ou non) du polyèdre.

Si un point ne vérifie pas une inégalité, on dit que ce point **viole** l'inégalité.

Exemple du le polyèdre du stable
Sur un graphe $G = (V, E)$ non-orienté.

- Pour un sommet donné $u \in V$, les deux inégalités triviales
  $x(u) \geq 0$ et $x(u) \leq 1$ sont valides pour $P(G)$.

- Pour une arête donnée $uv \in E$, l'inégalité d'arête
  $x(u) + x(v) \leq 1$ est valide pour $P(G)$.

- Pour un cycle C donné, l'inégalité de cycle

$$\sum_{u \text{ dans } C} x(u) \leq \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor$$

est valide pour $P(G)$. (voir preuve dans la partie D).

Face

Definition

Soit $ax \leq \alpha$ une inégalité valide pour P.
Le sous-ensemble $F = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$ est appelé **face** de P.
On dit aussi que F est la face définie par $ax \leq \alpha$.
Si $F \neq \emptyset$ et $F \neq P$, on dit que la face F est **propre**.

Par convention, l'ensemble vide et le polytope P lui-même sont considérés comme des faces de P.

Exemple du le polyèdre du stable
Pour le polyèdre $P(G)$ associée à un graphe $G = (V, E)$ non-orienté.
Pour un sommet u donné, la face associée à l'inégalité triviale $x(u) \geq 0$ est

$$F_0(u) = \{\chi \in P(G) \mid \chi[u] = 0\}$$

Donc la face $F_0(u)$ contient tous les vecteurs d'incidence des stables ne contenant pas le sommet u.

Face

Le résultat suivant montre que, dans toute description d'une face, il existe un sous-sytème d'inégalités correspondant à cette face.

Theorem

Soit P un polyèdre caractérisé par les inégalités $Ax \leq b$.
Un sous-ensemble F non vide de P est une face de P si et seulement s'il existe un sous-système $A'x \leq b$ de $Ax \leq b$ tel que $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$.

Preuve. ($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe un sous-système $A'x \leq b$ tel que $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$. Alors, par la convention d'écriture du système $Ax \leq b$, pour tout point $x \in P \setminus F$, il existe au moins une contrainte parmi les inégalités de $A'x \leq b'$ qui ne soit pas vérifiée à l'égalité par x. Considérons l'inégalité $ax \leq \alpha$ obtenue en sommant les inégalités de $A'x \leq b'$. Il est clair que $ax = \alpha$ pour tout $x \in P \setminus F$.
($\Rightarrow$) Soit F une face non vide de P. On veut produire le sous-système composé des inégalités de $Ax \leq b$ telles que tout point de F vérifie ces inégalités à l'égalité. Pour cela, considèrons $ax \leq \alpha$ une inégalité valide pour P telle que $F = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$. On considère alors le programme linéaire $max\{ax \mid x \in P\}$. Les solutions optimales de ce programme linéaire sont précisément les éléments de F. Soit (y^1, y^2) une solution optimale duale de ce programme linéaire où y_1 et y_2 sont les vecteurs duaux correspondant respectivement aux systèmes $Ax \leq b$ et $Bx = d$. Par les conditions des écarts complémentaires en programmation linéaire, le sous-système $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$ dont les variables duales ont une valeur positive est précisément le sous-système recherché, i.e. tel que $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$. □

Donc une face est un polyèdre !

Face de dimension 0

Un point extrême d'un polyèdre peut être aussi défini comme étant une face.

Theorem

Un point $\bar{x} \in P$ est un point extrême de P si et seulement si $\bar{x}$ est une face de dimension 0.

Preuve. Soit $\bar{x}$ un point quelconque de P. On associe à $\bar{x}$ le polyèdre $\bar{P}$ obtenu à partir de P en transformant toute inéquation vérifiée à l'égalité par $\bar{x}$ en une égalité. Notons alors $\bar{A}x \leq \bar{b}$, $\bar{B}x = \bar{d}$ le système des inéquations et des équations décrivant $\bar{P}$. Remarquons qu'alors $\bar{A}\bar{x} < \bar{b}$.
($\Rightarrow$) Supposons par contraposée que $\bar{x}$ n'est pas une face de dimension 0, alors $dim(\bar{P}) > 0$ et,ainsi, par la proposition 9, $rang(\bar{B}) < n$. Par conséquent, il existe un point $y \neq 0$ tel que $\bar{B}y = 0$. Comme $\bar{A}x < \bar{b}$, il existe un scalaire $\epsilon > 0$ tel que $\bar{A}y + \epsilon\bar{A}y \leq \bar{b}$, et ainsi $\bar{x}^1 = \bar{x} + \epsilon y \in \bar{P} \subset P$. Aussi, ϵ peut être choisi suffisamment petit pour que $\bar{x}^2 = \bar{x} - \epsilon y \in P$. Comme ainsi $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}^1 + \bar{x}^2)$, $\bar{x}$ n'est pas un point extrême de P.
($\Leftarrow$) Si $\bar{x}$ est une face de dimension 0, alors $\bar{P}$ est un polyèdre de dimension 0 et ainsi $rang(\bar{B}) = n$. Alors $\bar{x}$ est la solution unique du système $\bar{B}x = d$. Supposons qu'il existe $\bar{x}^1$ et $\bar{x}^2$ dans P tels que $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}^1 + \bar{x}^2)$. Or $\bar{x}^1$ et $\bar{x}^2$ sont des solutions de $\bar{B} = \bar{d}$. (En effet, on peut le déduire de $\bar{B}\bar{x}^1 \leq \bar{d}$, $\bar{B}\bar{x}^2 \leq \bar{d}$ et $\bar{B}\bar{x}^1 + \bar{B}\bar{x}^2 = 2\bar{d}$.) Par conséquent, $\bar{x} = \bar{x}^1 = \bar{x}^2$, et donc $\bar{x}$ est un point extrême de $\bar{P}$. □

Face "minimale"

En fait, les faces peuvent être contenues les unes dans les autres. On peut tout d'abord se poser la question des faces *minimales*, c'est-à-dire celles qui ne contiennent strictement pas d'autre face.
Pour régler cette question, on a les résultats suivants.
Théorème :
Un sous-ensemble F non vide de P est une face minimale de P si et seulement s'il existe un sous-système $A'x \leq b'$ de $Ax \leq b$ tel que $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b', Bx = d\}$.

Corrolaire :
Toute face minimale non vide de P est de dimension $n - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.
Les faces minimales non vides d'un polytope sont des points extrêmes.

La notion de face minimale se ramène donc en fait à la recherche des points extrêmes. Ce n'est pas étonnant, ce sont les faces qui sont nécessaires à une formulation "minimale" du problème, cela revient en fait à énumérer tous les points extrêmes, or cela est très coûteux et cela abandonne l'outil de la Programmation Linéaire.

Cherchons plutôt quelles sont les inégalités essentielles à la formulation.

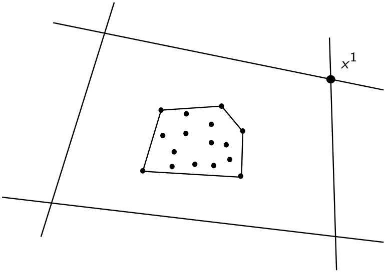
Facette

Definition

Une face F de P de dimension $dim(F) = dim(P) - 1$
est appelée *facette* de P.

Géométriquement, une facette est un des hyperplans d'appui qui définissent le polyèdre.
Dans le schéma suivant, l'inégalité qui permet de mieux couper le point x^1 (qui n'est pas solution) est d'utiliser les inégalités qui définissent des facettes du polytope des solutions.

$$(P_2)\begin{cases}\text{Max } cx\\ Ax \leq B\\ \alpha x \leq \beta\\ x \text{ entier}\end{cases}$$



Facette

Theorem

Si F est une face propre de P, alors dim(F)$\leq$dim(P)-1.

Corollary

Si F est propre et si $dim(F) \geq dim(P) - 1$
alors F est donc une facette de P.

Theorem (Maximalité d'une facette)

Soit F une face propre qui n'est pas strictement contenue dans une autre face propre.
Alors F est une facette.
On peut dire qu'une facette est maximale "au sens de l'inclusion".

Etudier *conv*(S) uniquement avec des points de S

On peut prouver la validité d'une inégalité et son caractère définissant des facettes **en utilisant seulement des points de S.**
On a en effet les deux lemmes suivants.

Lemma

Une inégalité $ax \leq \alpha$ est valide pour S si et seulement si elle est valide pour conv(S).

Lemma

Si F est une face non vide de conv(S) de dimension $p-1$, alors il existe p points affinement indépendants dans $S \cap F$.

Ces deux lemmes nous indiquent que l'on peut démontrer si une inégalité est valide et si elle définit une facette d'un polyèdre des solutions en s'intéressant uniquement aux solutions du problème.

Facettes du polytope du stable

On considère le polytope des stables $P(G)$ pour un graphe non-orienté $G = (V, E)$.
Considérons un sommet donné $v \in V$, alors l'inégalité triviale

$$x(v) \geq 0$$

est valide pour $P(G)$.

Montrons que cette inégalité triviale définit une facette de $P(G)$.

Réponse :
Posons $F_0(v) = \{\chi^S \in \mathbf{R}^n \mid S \text{ stable et } \chi^S(v) = 0\}$ la face associée à la contrainte $x(v) \geq 0$.
Pour prouver que cette face est une facette, il faut montrer qu'elle est propre et qu'elle contient n vecteurs affinement indépendants.
$F_0(u)$ est bien propre :
- car elle n'est pas vide : par exemple l'ensemble vide est un stable et son vecteur (nul) d'incidence appartient à $F_0(v)$
- et $F_0(v) \neq P(G)$: en effet, le vecteur d'incidence $\chi^{\{v\}}$ du stable singleton $\{v\}$ appartient à $P(G)$ mais pas à $F_0(v)$.
De plus, les vecteurs $\chi^{\emptyset}$ et $\chi^{\{u\}}$, $u \in V \setminus \{v\}$, sont bien n vecteurs d'incidence de stables affinement indépendants appartenant à $F_0(v)$. C'est bien une facette de $P(G)$.

Redondance dans une formulation linéaire

Dans la suite, nous allons voir que les inégalités qui sont nécessaires à la description de P sont celles qui définissent des faces maximales.

Definition

Une inégalité est dite **redondante** dans un système $Ax \leq b$ définissant un polyèdre P, si le sous-système, obtenu à partir de $Ax \leq b$ en supprimant cette inégalité, définit le même polyèdre P.
Inversement, une inégalité non-redondante est dite **essentielle**.

Facette et redondance

Theorem

Supposons que $P \neq \emptyset$. Alors toute contrainte valide pour P qui ne définit pas de facette de P est redondante.

Preuve : Soit $A_i x \leq b_i$ une contrainte valide essentielle à la description de P. On veut montrer que $A_i x \leq b_i$ définit une facette de P. Pour cela, remarquons que, comme cette inégalité est nécessaire dans P, alors il doit exister un point $x^* \in R^n \setminus P$ tel que

$$\begin{array}{l} A_j x^* \leq b_j, \forall j \in \{1, \ldots, m_1\} \setminus \{i\}, \\ A_i x^* > b_i, \\ Bx^* = d. \end{array}$$

Puisque P est non vide, il contient un point intérieur, disons $\bar{x}$, et donc $A_i \bar{x} < b_i$. Soit z un point sur le segment entre x^* et $\bar{x}$ tel que $A_i z = b_i$, i.e., il existe $0 < \lambda < 1$ avec $z = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^*$. Ainsi

$$\begin{array}{l} A_j z < b_j, \forall j \in \{1, \ldots, m_1\} \setminus \{i\}, \\ A_i z = b_i, \\ Bz = d. \end{array}$$

Ceci implique que z appartient à la face de P définie par $A_i x \leq b_i$. Aussi notons que le système donné par les équations de F est $A_i x = b$, $Bx = d$ avec $A_i x = b$ linéairement indépendante des lignes de B (sinon, l'inégalité $A_i x \leq b_i$ ne serait pas essentielle). Par conséquent le rang de ce système est $rang(B) + 1$. Donc $dim(F) = n - (rang(B) + 1)$ et comme $dim(P) = n - rang(B)$, $dim(F) = dim(P) - 1$. $A_i x \leq b_i$ est bien une facette de P. $\square$

Description minimale du polyèdre par des inégalités

Pour pouvoir prouver les résultats suivants, nous avons besoin des 2 lemmes de Farkas.

Lemma

(Lemme de Farkas pour les inéquations). Etant donnés une matrice $m \times n$ A et un vecteur $b \in \boldsymbol{R}^n$, le système $Ax \leq b$ admet une solution si et seulement s'il n'existe pas un vecteur $y \geq 0$ de $\boldsymbol{R}^m$ tel que $yA = 0$ et $yb < 0$.

Lemma

(Lemme de Farkas) Le système $Ax = b$ admet une solution (resp. solution positive) si et seulement s'il n'existe pas un vecteur y tel que $yA = 0$ et $yb < 0$ (resp. $yA \geq 0$ et $yb < 0$).

Description minimale du polyèdre par des inégalités

Le résultat suivant montre qu'une facette d'un polyèdre P est au moins définie par une contrainte valide pour P.

Theorem

Pour toute facette F de P, une des inéquations définissant F est nécessaire dans la description de P.

Preuve : Soit $I \subset \{1, \ldots, m_1\}$ l'ensemble des indices des inégalités $A_i x \leq b_i$ de $Ax \leq b$ qui définissent F. Soit $\bar{P}$ le polyèdre définie par ces inégalités. Nous allons montrer que $P \setminus \bar{P}$ n'est pas vide, ce qui montre qu'au moins une des inégalités parmi $A_i x \leq b_i$, $i \in I$, doit apparaître dans la description de P. Par la suite, nous considérons une contrainte $A_i x \leq b_i$ pour un $i \in I$.
Comme $F \neq \emptyset$, prenons x^0 un point intérieur de F. De plus, comme $F \neq P$, A_i est indépendant des lignes de B, c'est-à-dire que le système $yB = A_i$ n'a pas de solution. Par le lemme de Farkas, le système $\{Bx = 0, A_i x > 0\}$ admet une solution, disons x^1. Comme $A_k x^0 < b_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m_1\} \setminus I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $A_k x^0 + \epsilon A_k x^1 \leq b_k$ pour $k \in \{1, \ldots, m_1\} \setminus I$.
Notons $x^2 x^0 + \epsilon x^1$. D'abord, remarquons que $Bx^2 = 0$. Alors x^2 est un point du segment reliant x^0 à x^1 qui est dans $\bar{P}$. En effet, $A_k x^2 \leq b_k$, pour $k \in \{1, \ldots, m_1\}$. De plus, comme $A_i x^1 > 0$ et $A_i x^0 = b_i$, on a $A_i x^2 = A_i x^0 + \epsilon A_i x^1 > b_i$. Par conséquent, $x^2 \notin P$ donc $x^2 \in P \setminus \bar{P}$. $\square$

Inégalités équivalentes

En fait une seule inégalité est nécessaire par facette dans une description de P.

Definition

Deux inégalités valides $a_1x \leq \alpha_1$ et $a_2x \leq \alpha_2$ sont **équivalentes** s'il existe $\lambda > 0$ et un vecteur μ de $\boldsymbol{R}_2^m$ tel que $a_2 = \lambda a_1 + \mu B$ et $\alpha_2 = \lambda \alpha_1 + \mu d$. (Dans les notations de l'écriture de P).

On a alors le résultat suivant.

Theorem

Supposons que $P \neq \emptyset$. Si deux inégalités valides de P définissent la même facette, alors elles sont équivalentes.

D'après cette proposition, pour toute facette F de P, une et une seule inégalité définissant F est nécessaire dans un système décrivant P.

Inégalités équivalentes

Comme conséquence des propositions précédentes, on a le théorème suivant.

Theorem

Le système définissant P est minimal (en nombre d'inéquations et d'équations) si et seulement si les lignes de B sont linéairement indépendantes et si toute inégalité $A_i x \leq b_i$, $i = 1, \dots, m_1$ définit une facette distincte de P.

La description d'un polyèdre de pleine dimension est même unique à une multiplication d'un scalaire près.

Corollary

Si P est un polyèdre de pleine dimension, alors il existe un système linéaire minimal unique (à des multiplications par des scalaires près) qui décrit P. De plus, toute contrainte de ce système définit une facette distincte de P.

Facettes du polytope du stable

Soit K une clique de G (sous-graphe complet de G). Montrer que la contrainte

$$\sum_{v \in K} x(v) \leq 1$$

est bien valide pour $P(G)$ car un stable ne peut pas contenir plus d'un sommet d'un graphe complet.

Montrons qu'elle définit une facette de $P(G)$ lorsque K est une clique maximale au sens de l'inclusion : c'est-à-dire que K n'est pas contenue dans une clique plus grande.

Réponse :
Sa face $F_K = \{\chi^S \in \boldsymbol{R}^n \mid S \text{ stable et } \chi^S(K) = 1\}$ c'est-à-dire qu'elle contient tous les stables possédant exactement un sommet de K.
F_K est propre :
- car elle n'est pas vide : elle contient $\chi^{\{u\}}$ pour tout $u \in K$
- et elle est différente de $P(G)$: elle ne contient pas $\chi^{\emptyset}$.

Facettes du polytope du stable

On recherche à présent n points affinement indépendants dans F_K.
Considérons les $|K|$ singletons $\{u\}$, $u \in K$ qui sont $|K|$ stables dont les vecteurs d'incidence sont contenus dans F_K.

Il manque donc $n - |K|$ vecteurs à exhiber.

Or comme K est un sous-graphe complet maximal dans G, cela signifie que pour tout sommet $w \in V \setminus K$, il existe un sommet u_w dans K tel que w et u_w ne sont pas adjacents : en effet, dans le cas contraire, K ne serait pas maximale. Donc la paire $\{w, u_w\}$ est un stable et elle est dans F_K car u_w est dans K. On a ainsi $n - |K|$ stables.

On a au total n stables $\{u\}$, $u \in K$ et les $\{w, u_w\}$, $w \in V \setminus K$.

Facettes du polytope du stable

On peut prouver que leurs vecteurs d'incidence sont n vecteurs affinement indépendants dans F_K : en effet ces n vecteurs sont déjà linéairement indépendant ! Pour cela regardons la matrice dont les lignes sont les vecteurs et dont les colonnes sont rangées en mettant d'abord les sommets de K puis ceux de $V \setminus K$: la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_{|K|} & O \\ M & I_{n-|K|} \end{pmatrix}$$

Où I_p est la matrice identité de côté p, O la matrice nulle et M est une matrice quelconque (en fait avec un seul 1 par ligne). Donc cette matrice est triangulaire de diagonale remplie de 1 : elle est de plein rang.

L'inégalité de clique définit bien une facette de $P(G)$ si K est maximal au sens de l'inclusion. □

Facettes du polytope du stable

Soit uv une arête de E.
Regardons à présent l'inégalité d'arêtes

$$x(u) + x(v) \leq 1$$

qui est bien valide pour $P(G)$.

En fait, une arête est une clique de taille 2 !
Donc cette inégalité est une inégalité de clique !
Par conséquent, une inégalité d'arête définit une facette si l'arête est une clique maximale dans G : c'est-à-dire s'il n'existe pas de sommet w relié à la fois à u et à v.

Facettes du polytope du stable

Inversement, est-ce que cette inégalité d'arête définit une facette s'il existe un tel sommet w relié à u et à v ?

Réponse :

Alors l'inégalité de clique

$$x(u) + x(v) + x(w) \leq 1$$

est valide pour $P(G)$.

Si on l'additionne avec l'inégalité valide $-x(w) \leq 0$, on obtient alors l'inégalité d'arête $x(u) + x(v) \leq 1$.

Cela veut dire que l'inégalité d'arête n'est pas essentielle dans la formulation : **elle est redondante... donc elle ne définit pas une facette**.

En conclusion si une arête est contenue dans une clique plus grande, alors sa face associée n'est pas une facette.

De plus, **elle peut être supprimée de la formulation** (si la contrainte de clique qui la contient est maintenue !).

Notez pourtant que les contraintes d'arêtes sont dans la formulation entière du stable d'origine...

Formulation entière

On désire résoudre un problème d'optimisation combinatoire

$$\mathcal{P} \quad \max \{cx \mid x \in \mathcal{S}\}$$

par l'aproche polyédrale.

En pratique, nous avons vu dans la première section qu'un problème d'optimisation combinatoire $\mathcal{P}$ peut souvent s'écrire comme un programme linéaire en nombres entiers de la forme

$$(P_1) \ \max \{cx \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq 1, x \text{ entier}\}$$

où $Ax \leq b$ est un ensemble d'inégalités linéaires qui peut être de taille exponentielle par rapport au nombre n de variables.
Cette formulation PLNE (P_1) définit donc un ensemble de solutions entières $\mathcal{S}$ qui sont très exactement les solutions du problème $\mathcal{P}$.

Renforcement et points extrêmes fractionnaires

Si on relaxe la contrainte d'intégrité dans (P_1), on obtient la *relaxation linéaire* (P_1^*) de la formulation entière.

Elle peut parfois fournir une solution entière. C'est le cas par exemple des matrices de flot si les capacités sont entières ou des matrices correspondants au problème d'affectation. Plus généralement, c'est le dans certains types de matrices : matrices TDI (Totally Dual Integral), matrices TU (Totally Unimodular),...

Mais ce n'est pas le cas en général. Cela signifie que le polyèdre définit par (P_1^*) possède des **points extrêmes fractionnaires**. Bien entendu, il peut exister des instances dont la solution optimale correspond par chance à un point entier parmi un ensemble de points qui seraient majoritairement fractionnaires, mais ce n'est pas le cas général. On peut donc dire que cette relaxation linéaire n'est pas une description suffisante pour toute instanciation.

L'approche polyèdrale consiste à **renforcer** cette formulation (P_1) pour que la relaxation linéaire propose un point extrême entier. Plus exactement, on cherche à ajouter suffisamment d'inégalités de l'enveloppe convexe dans le but d'avoir produit celles dont l'intersection des faces va donner un point extrême entier optimal, c'est-à-dire une solution optimale du problème.

Polyèdre combinatoire

Considérons l'enveloppe convexe $conv(\mathcal{S})$ des solutions S de $\mathcal{P}$: on l'appelle **polytope des solutions** ou encore **polyédre combinatoire**.
Le problème $\mathcal{P}$ est alors équivalent au programme linéaire

$$\max \{cx \mid x \in conv(\mathcal{S})\}.$$

Par conséquent, si nous caractérisons le polyèdre $conv(\mathcal{S})$ par un système d'inégalités linéaires, alors nous ramenons le problème $\mathcal{P}$ à la résolution d'un programme linéaire !
Si l'on ne connaît pas toutes les inégalités définissant des facettes de $conv(S)$, une connaissance partielle de ces inégalités permet de renforcer la formulation.

Approche polyédrale

L'**approche polyédrale**, introduite par Edmonds en 1965, dans le cadre du problème du couplage, consiste à étudier le polytope $conv(\mathcal{S})$ afin de pouvoir résoudre $\mathcal{P}$ comme un programme linéaire.

La caractérisation complète du polytope $conv(\mathcal{S})$ est généralement difficile à obtenir.

Par ailleurs, une description complète du polyèdre peut comporter un nombre exponentiel d'inégalités. Cependant, un nombre réduit de ces inégalités peut être suffisant pour résoudre le problème à l'aide d'une *méthode de coupes* ou *de coupes et branchement* (Branch&Cut method) (voir section correspondante).