Master d'Informatique - Spécialité Androide
Module MAOA

Recherche Opérationnelle et Optimisation Combinatoire

Partie D - Cas polynomiaux

Pierre Fouilhoux

Sorbonne Université

2019-2020

Voici quelques cas particuliers où la relaxation linéaire d'un PLNE fournit une solution entière... plus exactement où l'algorithme du simplexe fournit systématiquement une solution entière.

Polyèdre et points extrêmes

Un polyèdre est tout simplement une figure géométrique définie comme la partie délimitée par des “plans”. Dans un espace à une dimension, les “plans” sont des points et les polyèdres sont des intervalles connexes. Dans un espace à deux dimensions, les “plans” sont des droites et les polyèdres sont des carrés, des rectangles,... Dans un espace de dimension 3, les “plans” sont des plans et les polyèdres sont des cubes, des dodécaèdres,...

En fait, dans $\boldsymbol{R}^n$, on appelle *hyperplan* H un sous-espace de $\boldsymbol{R}^n$ défini comme l'ensemble des points vérifiant une équation linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $a_1, ..., a_n, b \in R$ tels que $H = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid + a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}$.

Definition

Un *polyèdre* $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires, i.e.,

$$P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

où A est une matrice $m \times n$ (m et n entiers positifs) et $b \in \boldsymbol{R}^m$.

Nous dirons alors que le système $Ax \leq b$ **définit** ou **caractérise** le polyèdre P.

Dans ce cours, nous considérons des polyèdres uniquement rationnels, c'est-à-dire pour lesquels les coefficients du système $Ax \leq b$ sont tous rationnels.
Si A est une matrice $m \times n$, on désigne par A_i (resp. A^j) la i^{eme} ligne (resp. j^{eme} colonne) de A pour $i = 1, ..., m$ (resp.$j = 1, ..., n$).

Un **point** d'un polyèdre est donc défini par des coordonnées $\tilde{x} \in \boldsymbol{R}^n$ tel que $A\tilde{x} \leq b$.

Un **polytope** est un polyèdre borné, c'est-à-dire qu'un polyèdre $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est un polytope s'il existe $x^1, x^2 \in \boldsymbol{R}^n$ tel que $x^1 \leq x \leq x^2$, pour tout $x \in P$.

Definition

Un point x d'un polyèdre P est dit **point extrême** (ou parfois *sommet*) (vertex) de P s'il n'existe pas deux solutions x^1 et x^2 de P, $x^1 \neq x^2$, telles que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

En d'autre terme, un point extrême de P est un point de P qui n'est pas le milieu d'un segment contenu dans P.

Theorem

Soit $P = \{Ax \leq b\}$ un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ un point. On note alors $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ la sous-matrice des contraintes de $Ax \leq b$ formée par les inégalités vérifiées à l'égalité par $\tilde{x}$.
Alors $\tilde{x}$ est un point extrême de P si et seulement l'ensemble $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ est de rang n.

Rappel d'algèbre linéaire :
- un ensemble de vecteurs sont dits *linéairement indépendants* si on ne peut pas obtenir l'un d'entre eux en combinant linéairement les autres.
- le rang d'une matrice est le nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de la matrice.

Autrement dit, un point $\tilde{x}$ est extrême si on peut produire n inégalités de la matrice A qui sont vérifiées par $\tilde{x}$ à l'égalité **et** qui sont linéairement indépendantes.

Points fractionnaires du problème du sac-à-dos

Considérons le problème de sac-à-dos suivant :

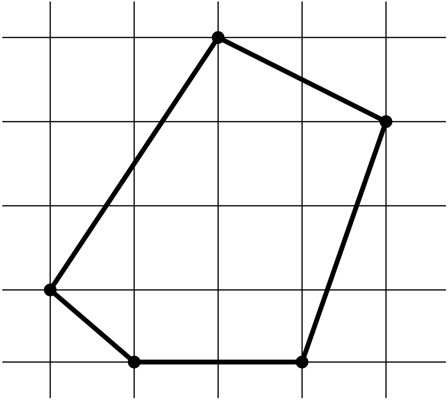
$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 8 \\
& x_i \leq 1 \quad i = 1, ..., 3, \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 3, \\
& x_i \in \boldsymbol{N} \quad i = 1, ..., 3.
\end{aligned}$$

On peut montrer que ce problème admet des points extrêmes fractionnaires et donner un cas où il est optimal.

Réponse : Considérons le point $\tilde{x} = (1, 1, \frac{4}{5})$.
On peut remarquer que ce point vérifie à l'égalité 3 inégalités de la relaxation linéaire du PLNE : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et l'inégalité principale.
De plus, ces 3 inégalités sont clairement linéairement indépendantes.
Donc ce point est un point extrême fractionnaire du problème.
Par exemple, pour le poids $\tilde{c} = (10, 10, 1)$ ce point est clairement optimal.

Polyèdres entiers

Un point de $\boldsymbol{R}^n$ est **entier** si ces coordonnées sont entières.
Un polyèdre est dit **entier** si tous ses points extrêmes sont entiers.



Rappels : Programmation Linéaire

Rappelons deux résultats de la programmation linéaire :

- Tous les solutions optimales d'un PL se situe sur l'un des hyperplans définissant le polyèdre des solutions.
- L'ensemble des points extrêmes du polyèdre des solutions contient au moins une solution optimale. On peut donc limiter la recherche des solutions optimales aux points extrêmes du polyèdre des solutions.

Donc un PLNE dont la relaxation linéaire correspond à un polyèdre entier se résoud polynomialement !

Theorem (Equivalence Polyèdre entier/PLNE)

Un polytope rationnel P est entier **si et seulement si**
pour tout vecteur entier c, la valeur optimale de $Max\{c^T x \mid x \in P\}$ est entière.

Preuve : Le sens direct est immédiat.
Inversement, considérons $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ un point extrême de P (il en existe un car il est pointu). Admettons que l'on puisse prouver qu'il existe un vecteur entier w tel que v soit l'unique solution optimale de $max\{w^T x \mid x \in P\}$ (admettons-le). Prenons $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda w^T v \geq \lambda w^T u + u_1 - v_1$ pour tout u point extrême de P. On peut noter que v est encore l'unique solution optimale de $max\{\lambda w^T x \mid x \in P\}$. Ainsi, en posant le poids $\bar{w} = (\lambda w_1 + 1, \lambda w_2, \ldots, \lambda w_n)^T$, on voit que v est aussi solution optimale de $max\{\bar{w}^T x \mid x \in P\}$ car $\lambda w^t v > x$ pour tout $x \in P$. Or par construction $\bar{w}^T v = \lambda w^T v + v_1$ et comme, par hypothèse, $\bar{w}^T v$ et $\lambda w^T v$ sont entiers, alors v_1 est entier. On peut reproduire cela pour toutes les composantes donc v est entier. □

(Il est possible d'étendre ce résultat aux polyèdres non bornés.)

Définitions :
- Un polyèdre est dit *pointu* s'il contient au moins un point extrême.
Par exemple, le polyèdre $\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \geq 0\}$ ne contient pas de points extrêmes.
- Un polyèdre est dit *rationnel* s'il peut être défini par un système où toutes les inégalités ont des coefficients rationnels.

On ne considère ici que des polyèdres rationnels pointus, ce qui n'est pas restrictif d'un point de vue informatique.

Un exemple simple

Considérons le problème de sac-à-dos suivant où b est entier.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i \leq b \\
& x_i \leq 1 \quad i = 1, ..., n, \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., n, \\
& x_i \in \mathbb{N} \quad i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Montrons que ce système est entier.

Réponse : Un point extrême de ce système doit vérifier à l'égalité n inégalités linéairement indépendantes de ce système. Or il y a peu d'inégalités ici qui peuvent être vérifiées à l'égalité !
Il y a deux cas :
- soit l'inégalité principale n'est pas vérifiée à l'égalité : dans ce cas, seules les inégalités triviales sont serrées et le point est entier.
- soit l'inégalité principale est vérifiée à l'égalité et alors il y a $n-1$ inégalités triviales serrées. Donc le point est composée de $n-1$ composantes entières 0 ou 1. Notons alors N^+ les composantes à 1. La dernière composante inconnue est donc de valeur $b - |N^+|$: notons que cette quantité est nécessairement positive, entière et vaut au plus 1. Donc cette dernière composante est elle aussi entière.

Unimodularité

Il serait très intéressant de pouvoir caractériser les matrices correspondant à des polyèdres entiers.

Une matrice **carrée** A est dite **unimodulaire** si A est entière et si son déterminant vaut $+1$ ou -1.

Lemma

Soit A une matrice carrée de taille m entière, inversible. Alors $A^{-1}b$ est un vecteur entier pour tout vecteur entier b de taille m si et seulement si A est unimodulaire.

Preuve : Par un résultat classique d'algèbre linéaire, on sait que $A^{-1} = \frac{A^{adj}}{det(A)}$ où A^{adj} est la matrice adjointe à A, c'est-à-dire la matrice obtenue en transposant la matrice des cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ et où M_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue depuis A en supprimant la ligne i et la colonne j. Donc si A est entière, A^{adj} est aussi entière. Donc si A est unimodulaire, A^{-1} est entière et donc $A^{-1}b$ est un vecteur entier. Inversement, si $A^{-1}b$ est un vecteur entier pour tout vecteur entier b de taille m, alors en particulier $A^{-1}e_i$ est entier pour e_i le i$^{\text{eme}}$ vecteur unité pour tout $i = 1, \ldots, m$. Donc A^{-1} est entière et donc $det(A)$ et $det(A^{-1})$ sont tous deux entiers. Comme $det(A).det(A^{-1}) = 1$, on a donc $det(A) = 1$ ou -1. $\square$

Unimodularité

Le lemme précédent mène alors à la définition suivante.

Une matrice A $m \times n$ avec $n \geq m$ de rang m est dite **unimodulaire** si A est entière et si la matrice associée à chacune de ses bases a un déterminant $+1$ ou -1.
(Une base de A est un ensemble de m vecteurs colonnes linéairement indépendants et la matrice associée à une base est donc une sous-matrice carrée $m \times m$ inversible).

Theorem

[Veinott et Dantzig]
Soit A une matrice $m \times n$ entière de plein rang. Le polyèdre défini par $Ax = b, x \geq 0$ est entier pour tout vecteur b entier si et seulement si A est unimodulaire.

Totale unimodularité

On appelle une matrice **totalement unimodulaire** (TU) une matrice telle que toutes ses sous-matrices carrées ont un déterminant valant 0, 1 ou -1.
Ainsi, pour une matrice unimodulaire, les coefficients sont donc uniquement 0, 1 et -1.

On peut remarquer qu'en fait une matrice A $m \times n$ est TU si et seulement si la matrice $[AI]$ de taille $m \times (m+n)$ (qui est obtenue en collant une matrice identité à A) est unimodulaire.

Une conséquence du théorème précédent donne alors le théorème important suivant.

Theorem

[Hoffman-Kruskall]
Soit A une matrice $m \times n$ TU. Alors le polyèdre défini par $Ax \leq b, x \geq 0$ est est entier pour tout vecteur b entier.

On peut noter que ce théorème n'est pas une caractérisation des polyèdres entiers. De plus, il n'est pas évident de détecter si une matrice est TU. Un résultat essentiel (et complexe) de Seymour (1980) prouve en fait que ces matrices peuvent être construites selon un schéma particulier.

Cas particuliers de matrices TU

Si ce résultat est assez complexe, il existe un cas particulier de matrice TU très facile à repérer.

Theorem (Poincaré [1900)

] Soit A une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 et telle que chaque colonne contient au plus une fois le coefficient 1 et au plus une fois le coefficient -1.
Alors A est TU.

Et donc, si le théorème s'applique, toute solution d'un PL utilisant A comme matrice des coefficients des inégalités correspond à un polyèdre entier.

Cas particuliers de matrices TU

Ce théorème plus général généralise celui de Poincaré

Theorem

Soit A une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 et telle que

- *chaque colonne contient au plus deux coefficients non nuls.*
- *les lignes de A peuvent être partionnées entre deux ensembles I_1 et I_2 tels que*
  - *si une colonne a deux coefficients de signes différents alors leurs lignes sont dans le même ensemble I_1 ou I_2*
  - *si une colonne a deux coefficients de même signe alors leurs lignes sont l'une dans I_1 et l'autre dans I_2.*

Alors A est TU.

Ce deuxième théorème implique le premier quand $I_2 = \emptyset$.

Problème du flot de coût minimum (sans capacité)

On considère un **réseau** $G = (V, A)$ qui est un graphe orienté comportant un sommet s, appelé source, sans prédecesseur à partir duquel on peut atteindre tout sommet de G et un sommet t, appelé puits, qui est accessible depuis tout sommet de G.
Un *s-t-flot* est un vecteur positif $x \in \boldsymbol{R}^m$ s'il vérifie la contrainte de "conservation de flot"

$$\sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) - \sum_{a \in \delta^-(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in v \setminus \{s, t\}.$$

On associe un coût $w(a) \in \boldsymbol{R}_+$ chaque arc $a \in A$.

Le **problème du flot de coût minimum** ou **min-cost flow** consiste à rechercher un flot tel que la valeur $\sum_{a \in A} w(a)x(a)$ soit minimale.

Problème du flot de coût minimum (sans capacité)

Considérons le PL suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{a \in A} w(a)x(a) \\ & \sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) - \sum_{a \in \delta^-(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in V \setminus \{s, t\} \end{aligned}$$

Le résultat de Poincaré prouve que la matrice des contraintes de ce PL, appelée **matrice de flots** est TU.

En effet, la variable $x(a)$ apparaît deux fois dans sa colonne : une fois pour chacune de ses extrémités, soit avec un coefficient -1, soit avec un coefficent +1.

Donc ce PL correspond à un polyèdre entier : il aura toujours une solution entière.

Mais cet exemple, où le flot n'est pas borné, a une solution optimale nulle... ce n'est pas un bon exemple !

Problème du flot de coût minimum (le vrai)

Soit un réseau G muni d'un poids w sur les arcs
... et d'une capacité minimale **entière** de flot $b(a) \in \boldsymbol{N}$ associée à chaque arc $a \in A$.

Ce qui se formule par

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{a \in A} w(a)x(a) \\ & \sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) - \sum_{a \in \delta^-(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in V \setminus \{s,t\} \\ & x(a) \geq b(a) \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

On peut prouver que ce PL correspond aussi à un polyèdre entier.

Soit un point extrême $\tilde{x}$ du polyèdre. Si une composante $x(a)$ vérifie inégalité de capacité à l'égalité, cette composante est entière. Prenons A^f l'ensemble des arcs de A de flotx $\tilde{x}(a) > b(a)$. Regardons le système issu des inégalités de conservation du flot suivante : on transforme les inégalités d'origine en fixant, à leurs bornes $b(a)$, les composantes $\tilde{x}(a)$ avec $a \notin A^f$. Ce système est uniquement composée de la matrice de flots limitée aux arcs A^f donc la solution issue de cette matrice aura des composantes entières.

Problème d'affectation (couplage) biparti

Soit un graphe biparti complet $G = (V_1 \cup V_2, E)$ associé à un poids $c \in \mathbb{N}^m$ associé aux arêtes de E.

On appelle **couplage** de G un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes.

Le **problème du couplage biparti** consiste à déterminer un couplage qui maximise la somme des poids de ses arêtes.

Il existe plusieurs algorithmes polynomiaux efficaces pour résoudre ce problème classique (dont le célèbre algorithme hongrois).

Problème d'affectation (couplage) biparti

Considérons le PL suivant qui formule le problème :

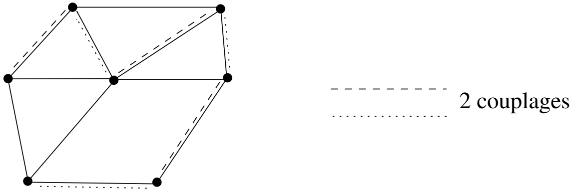
$$\begin{aligned} \text{Max} \sum_{e \in E} c(e)x(e) & \\ \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1 & \quad \forall u \in V_1 \\ \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1 & \quad \forall u \in V_2 \\ x(e) \geq 0 & \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

La matrice de ce PL est TU par le théorème en utilisant $I_1 = V_1$ et $I_2 = V_2$.

Problème d'affectation (couplage)

Généralisons le problème de couplage biparti.

Dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$, on appelle **couplage** un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes (c'est-à-dire sans sommet commun). Le graphe est muni d'un poids $w(e)$ associé à chaque arête $e \in E$.



Le **problème du couplage maximum** consiste à rechercher un couplage de cardinalité maximum (ou de poids maximum).

Problème d'affectation (couplage)

Une formulation possible qui généralise la précédente est :

$$\begin{aligned} \text{Max} \sum_{e \in E} c(e)x(e) & \\ \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 1, & \quad \forall v \in V, \\ 0 \leq x(e) \leq 1, & \quad \forall e \in E, \\ x(e) \text{ entier}, & \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

En effet, dans un couplage, il y a au plus une arête incidente à chaque sommet.

• Si G est biparti, il peut s'écrire selon la formulation précédente : le PL a une matrice TU et le polyèdre correspondant est donc entier.

• Si G n'est pas biparti, que se passe-t-il ?

Problème d'affectation (couplage)

On ne peut pas trouver d'ensembles I_1 et I_2 satisfaisant le théorème.
En effet, comme le graphe n'est pas biparti, on ne peut pas "bipartitionner" l'ensemble des lignes comme demandé dans le théorème.

En fait, le PL associé ne correspond pas à un PL entier (et n'est donc pas TU). On peut produire un contre-exemple en produisant un graphe et un **point extrême fractionnaire** (c'est-à-dire non entier) :

Prenons $G = C$ limité un cycle C (impair) de 5 sommets.
Le point extrême $\tilde{x}$ associant à chaque arête la valeur $\frac{1}{2}$ vérifie chacune des 5 inégalités (1) à l'égalité.
De plus, ces 5 inégalités (1) sont linéairement indépendantes :
c'est bien un point extrême fractionnaire du polyèdre de la formulation.

Et pourtant le problème de couplage est polynomial même pour G non biparti !

Il n'y a pas de contradiction !

Cette formulation n'est pas "entière" mais il en existe une, donnée par Jack Edmonds en 1965 (voir section "Caractérisation de polyèdres")

Rappel : Dualité

Pour un programme linéaire $(\tilde{P})$, appelé alors *primal*, le *dual* est le programme linéaire $(\tilde{D})$ suivant

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \text{Max} & z = c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (\tilde{D}) \begin{cases} \text{Min} & w = b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Sous forme "algébrique" :

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n. \end{cases} \qquad (\tilde{D}) \begin{cases} \text{Min} & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Les **variables duales** de $(\tilde{D})$ correspondent aux inégalités de $(\tilde{P})$.
La matrice de $(\tilde{D})$ est la transposée A^T.
Les coûts de la fonction objective et les termes de droite des inégalités échangent leurs rôles.

Rappel : Dualité

• **Théorème (faible) de la dualité :**
Si $(\tilde{P})$ et $(\tilde{D})$ admettent chacun une solution $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$,
alors $c^T\tilde{x} \leq b^T\tilde{y}$.

• **Theorème de la dualité :**
Si $(\tilde{P})$ admet une solution optimale (finie),
alors $(\tilde{D})$ aussi et de plus elles "coïncident", *i.e.*

$$(\tilde{P}) \quad max\{c^T x \mid Ax \leq b\} = min\{b^T y \mid y^T A = c, y \geq 0\} \quad (\tilde{D}).$$

Encadrement Min-Max

Considérons un PLNE (P) et sa relaxation linéaire $(\tilde{P})$ qui est un PL.
Considéron un PL $(\tilde{D})$ dual de $(\tilde{P})$ et sa version PLNE (D).
Une solution entière x de (P) est solution de $(\tilde{P})$.
Une solution entière y de (D) est solution de $(\tilde{D})$.
Posons x^* une solution optimale de $(\tilde{P})$ alors (par la dualité faible)

$$c^T x \leq c^T x^* \ \leq \ b^T y^* \leq b^T y$$

Dans le cas TRES particulier où l'on connaît à la fois :
- un algorithme donnant une solution entière x (approchée) pour (P)
- et un algorithme donnant une solution entière y (approchée) pour (D)
alors on a un **encadrement Min-Max** $[x, y]$ de la solution entière de (P) (et de (D)).

Totalement dual intégralité

Une question naturelle est de savoir quand un tel encadrement est une égalité !

Considérons un PLNE (P) de relaxation linéaire $(\tilde{P}) = \{c^T x \mid Ax \leq b\}$. Et le dual de $(\tilde{P})$ est $(\tilde{D}) = \{b^T y \mid A^T y \geq c\}$.

Le système $Ax \leq b$ est **totalement dual intégral** (TDI)
si, pour tout vecteur entier c tel qu'il existe une solution optimale de $(\tilde{P})$,
alors cette solution peut être obtenue par un vecteur y entier dans $(\tilde{D})$.

Theorem

Soit $Ax \leq b$ un système TDI avec $(\tilde{P}) = \{cx \mid Ax \leq b\}$ rationnel et b entier.
Alors $(\tilde{P})$ est un polytope entier, i.e. $(P) = (\tilde{P})$.

Preuve : Par la définition de $(\tilde{P})$ TDI, pour toute solution optimale x du problème, il existe un vecteur y solution du dual qui soit entier et qui réalise cet optimum, c'est à dire tel que $c^T x = y^T b$. Or comme b est entier, si y est entier, $c^T x$ est donc entier. Donc par le théorème [Equivalence Polyèdre entier/PLNE], x est entier. Donc $(\tilde{P})$ est entier. □

On pourrait aussi s'intéresser à la caractérisation de systèmes TDI. Or cela n'a pas vraiment de sens par rapport à la résolution d'un problème d'OC : en effet, pour tout système rationnel $Ax \leq b$, il existe un entier positif t tel que $\frac{1}{t}Ax \leq \frac{1}{t}b$ soit TDI. L'existence d'un tel système ne dit donc rien sur la structure du polyèdre P associé. En fait, on a le résultat suivant.

Theorem

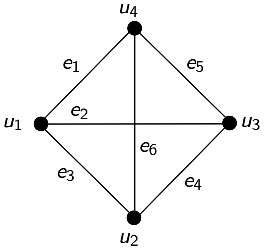
[Giles and Pulleyblank]
Soit P un polyèdre rationnel. Alors il existe un système TDI $Ax \leq b$ avec A entier tel que $P = \{Ax \leq b\}$. De plus, si P est entier, alors b peut-être choisi entier.

Ce résultat nous dit donc qu'il existe toujours un système TDI pour tout polyèdre P entier et que par conséquent, il existe un système ayant toujours des solutions entières.

- Déterminer un système TDI permet de prouver l'intégrité d'un polyèdre (et de son PL).

Un petit exemple non TDI

Considérons le problème (très simple) suivant.
On appelle *multi-ensemble*, un ensemble d'éléments où chaque élément peut-être représenté plusieurs fois.
Etant donné un graphe complet à 4 sommets $K_4 = (V, E)$ dont les arêtes sont munies du poids $w(e)$, $e \in E$, déterminer un multi-ensemble d'arêtes de poids maximal de K_4 tel que, pour chaque sommet du graphe, il y ait au plus 2 arêtes incidentes à ce sommet (on peut appeler ce problème le "2-couplage" maximal).



Un petit exemple non TDI

Ce problème se formule par le PLNE (P) suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max} \sum_{e \in E} w(e)x(e) & \\ \sum_{e \in \delta(u)} x(e) \leq 2 & \quad \forall u \in V, \\ x(e) \geq 0 & \quad \forall e \in E, \\ x(e) \in \boldsymbol{N} & \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Remarquons que $x(e)$ est bien prise dans $\boldsymbol{N}$.

Regardons la solution optimale pour $w(e) = 1$ pour $e \in E$:
la solution optimale de ce problème est clairement 4.
En effet,
- soit une arête est prise 2 fois : sans perte de généralité considérons e_1, alors seule e_4 peut être ajoutée au plus 2 fois.
- soit chaque arête est prise au plus 1 fois : une solution optimale est alors clairement de prendre 4 arêtes formant un carré.

Un petit exemple non TDI

Montrons que le le système formé par les inégalités (1-1) n'est pas TDI.

Réponse : Pour cela, considérons le dual de ce système basé sur des variables y associée aux inégalités (1), c'est-à-dire aux sommets du graphe :

$$\text{Min} \sum_{v \in V} 2y(v)$$
$$y(u) + y(v) \geq w_e \quad \forall e = uv \in E,$$
$$y(v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

On peut remarquer que, pour le poids $w(e) = 1, e \in E$, il est impossible qu'il existe une solution duale entière de valeur 4. Il n'existe donc pas de solutions entières du dual correspondant à une solution optimale du primal de valeur 4 : le système n'est donc pas TDI.

En effet, toute solution entière de ce dual doit avoir au moins 3 des variables y égales à au moins 1 (sinon une des inégalités ne seraient pas satisfaites pour une des arêtes) : donc toute solution entière de ce dual est au moins de valeur 6.

(Une question moins évidente serait de rechercher comment changer la formulation du problème pour le rendre TDI.)

Problème du flot maximum

On considère un **réseau** $G = (V, A)$ qui est un graphe orienté comportant un sommet s, appelé source, sans prédecesseur à partir duquel on peut atteindre tout sommet de G et un sommet t, appelé puits, qui est accessible depuis tout sommet de G.
Un *s-t-flot* est un vecteur positif $x \in \boldsymbol{R}^m$ s'il vérifie la contrainte de "conservation de flot"

$$\sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) - \sum_{a \in \delta^-(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in v \setminus \{s, t\}.$$

On associe une capacité maximale $b(a) \in \boldsymbol{N}$ associé à chaque arc $a \in A$. Un flot est dit *réalisable* si $x(a) \leq b(a)$ pour tout arc $a \in A$.

On pose $v = \sum_{a \in \delta^+(s)} x(a)$ la valeur du flot entrant en s (qui est exactement aussi la valeur du flot sortant par p : $v = \sum_{a \in \delta^-(s)} x(a)$).

Le **problème du flot de capacité maximale** ou **problème du flot max** consiste à rechercher un flot tel que sa valeur soit maximale.

On sait depuis le théorème de Ford-Fulkerson que si c est entier, alors il existe une flot optimal entier et on sait le déterminer en temps largement polynomial.

Dualité Flot Max / Coupe Min

En reprenant l'énoncé du problème du flot max, on peut définir un deuxième problème appelé **problème de la coupe minimum** ou encore **coupe min**.

On appelle s-t-**coupe** (ou plutôt ici s-t-coupe orientée) un ensemble d'arcs C sortant d'un ensemble de sommets W tel que $s \in W$ et $t \notin W$, *i.e.* $C = \delta^+(W)$. (de même $C = \delta^-(\bar{W})$ où $\bar{W} = V \setminus W$.)

On appelle **capacité d'une coupe** C la somme des capacités des arcs de la coupe : $b(C) = \sum_{a \in C} b(a)$.

D'après le théorème de Ford-Fulkerson concernant les flots maximum, on sait que pour tout flot maximal, on peut déterminer algorithmiquement une coupe de capacité minimum associée tel que la valeur du flot soit égale à la valeur de la coupe.
On parle de la dualité Flots-Max/Coupe-Min.

Problème du flot maximum

Considérons la formulation PL suivante.

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & v \\
& \sum_{a\in\delta^+(u)} x(a) - \sum_{a\in\delta^+(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in V \setminus \{s,t\} \\
& \sum_{a\in\delta^+(s)} x(a) - v = 0, \\
& \sum_{a\in\delta^-(t)} x(a) + v = 0, \\
& x(a) \leq b(a) \quad \forall a \in A, \\
& v \geq 0, \\
& x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A.
\end{aligned}
$$

Montrons que le PL du flot max est associée à un PL dual formant un système TDI.
Indication : les solutions du problème de min-cut sont solutions du dual.

Réponse : Ecrivons le dual de la façon suivante : on note $\pi(u)$ les variables duales associées aux 3 premières inégalités pour $u \in V$ et on note $\gamma(u, v)$ les variables duales associées aux arcs $a = (u, v)$ des contraintes de capacités.

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{a=(u,v)\in A} & b(a)\gamma(u, v) \\ & \pi(u) - \pi(v) + \gamma(u, v) \geq 0 \quad \forall a = (u, v) \in A, \\ & -\pi(s) + \pi(t) \geq 1, \\ & \pi(u) \lesseqgtr 0 \quad \forall u \in V, \\ & \gamma(u, v) \geq 0 \quad \forall a = (u, v) \in A. \end{aligned}$$

Etant donnée un flot maximal, c'est-à-dire une solution du primal, on sait déterminer par l'algorithme de Ford-Fulkerson, une s-t-coupe de capacité minimale.
On peut montrer que cette coupe correspond à une solution entière $(\tilde{\gamma}, \tilde{\pi})$ du dual et qui est de même valeur que la solution du flot maximale : ce qui prouve que le système est TDI (enfin presque... voir page suivante).

Cette solution est donnée par $\tilde{\gamma}(u, v) = 1$ si $u \in W$ et 0 sinon et $\tilde{\pi}(u) = 1$ si $u \notin W$ et 0 sinon.
En effet, on peut prouver que cette solution $(\tilde{\gamma}, \tilde{\pi})$ est solution duale en considérant les 4 cas possibles de situation d'une arête dans le graphe par rapport à la coupe (soit $u \in W, v \notin W$; $u \in W, v \in W$, $u \notin W, v \in W$ and $u \notin W, v \notin W$).

La page précédente propose une solution entière du dual pour la formulation du flot maximal...

Attention, pour pouvoir dire qu'elle est TDI, il faut effectuer cette preuve, pour toute fonction c coût entière sur les variables v et x !
La formulation est donc celle du flot avec pour fonction objective :

$$\text{Max} \qquad c_0 v + \sum_{a \in A} c_a x(a)$$

Le dual correspondant voit alors ses termes de second membre changer :

$$\pi(u) - \pi(v) + \gamma(u,v) \geq c(a) \quad \forall a = (u,v) \in A$$
$$-\pi(s) + \pi(t) \geq c_0$$

La solution $(\tilde{\gamma}, \tilde{\pi})$ solution entière du dual qui coïncide avec la valeur du primale est alors moins évidente à déterminer... (mais elle existe).

Caractérisation complète

On appelle une **caractérisation complète d'un problème** la donnée d'un ensemble d'inégalités et de variables d'un programme linéaire entier dont les solutions optimales sont les solutions optimales du problème.

A moins que P soit égale à NP, il n'est pas possible de donner une caractérisation complète d'un problème NP-difficile.

Pour les problèmes polynomiaux, on peut comme on vient de le voir ici :
- trouver une formulation TU
- trouver un système TDI
- ou chercher **toutes** les inégalités nécessaires à cette description... Nous verrons cela dans le chapitre "Caractérisation".