Décompositions et génération de colonnes pour la programmation en nombres entiers

Lucas Létocart

LIPN - UMR CNRS 7030 - Institut Galilée - Université Paris 13

INFO3 ROA

Plan

Problème type

Problème en variables entières

$$(P)\left\{\begin{array}{llcl} \max & c^t x & & \\ & & & \\ s.c. & Ax & = & a \\ & Bx & = & b \\ & x & \in & X \end{array}\right.$$

avec A une matrice $m \times n$, B une matrice $p \times n$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $X \subseteq \mathbb{N}^n$.

Décomposition Lagrangienne

Problème équivalent après introduction de variables de copies

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ & \\ \text{s. c.} & \begin{array}{rcl} Ay & = & a \\ Bx & = & b \\ x & = & y \end{array} \\ & x \in X, y \in Y, \quad \text{avec } Y \supseteq X \end{cases}$$

Problème obtenu après relaxation des contraintes de copies

$$(LD(w)) \quad \begin{cases} \max & c^t x + w^t (y - x) \\ & \\ \text{s. c.} & \begin{array}{rcl} Ay & = & a \\ Bx & = & b \end{array} \\ & x \in X, y \in Y \end{cases}$$

avec $w \in \mathbb{R}^n$.

Décomposition Lagrangienne

Problème équivalent après introduction de variables de copies

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \max & c^t x & & \\ & & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a \\ & Bx & = & b \\ & x & = & y \\ & \multicolumn{3}{l}{x \in X, y \in Y, \quad \text{avec } Y \supseteq X} \end{array}\right.$$

Problème obtenu après relaxation des contraintes de copies

$$(LD(w)) \qquad \left\{\begin{array}{lrcl} \max & \multicolumn{3}{l}{c^t x + w^t(y - x)} \\ & & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a \\ & Bx & = & b \\ & \multicolumn{3}{l}{x \in X, y \in Y} \end{array}\right.$$

avec $w \in \mathbb{R}^n$.

Décomposition Lagrangienne

2 sous-problèmes indépendants

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \max & w^t y & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a \\ & y & \in & Y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lrcl} \max & (c-w)^t x & & \\ \text{s. c.} & Bx & = & b \\ & x & \in & X \end{array}\right.$$

La fonction duale

$$(LDD) \min_{w \in \mathbb{R}^n} \ v(LD(w))$$

où

$$v(LD(w)) = \max\{w^t y | y \in Y_A\} + \max\{(c-w)^t x | x \in X_B\}.$$

avec

$$Y_A = \{y \mid Ay = a, \ y \in Y\} \qquad X_B = \{x \mid Bx = b, \ x \in X\}$$

Décomposition Lagrangienne

2 sous-problèmes indépendants

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \max & w^t y & & \\ & & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a \\ & y & \in & Y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lrcl} \max & (c-w)^t x & & \\ & & & \\ \text{s. c.} & Bx & = & b \\ & x & \in & X \end{array}\right.$$

La fonction duale

$$(LDD) \min_{w \in \mathbb{R}^n} \; v(LD(w))$$

où

$$v(LD(w)) = \max\{w^t y | y \in Y_A\} + \max\{(c-w)^t x | x \in X_B\}.$$

avec

$$Y_A = \{y \mid Ay = a, \; y \in Y\} \qquad X_B = \{x \mid Bx = b, \; x \in X\}$$

Décomposition de Dantzig-Wolfe - Génération de colonnes

Construction du problème maître

En prenant $x = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k x^{(k)}, \forall x \in X_B$, $x^{(k)}$ étant les points extrêmes de X_B, avec $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geq 0,\ \forall k \in 1, \ldots, K$ et $X_B = \{x \mid Bx = b,\ x \in X\}$ un polyèdre borné, on obtient en substituant dans (P) :

$$(PM\_DW) \left\{ \begin{array}{llcll} \max & \sum_{k=1}^{K} (c^t x^{(k)}) \lambda_k & & & \\ & & & & \\ s.c. & \sum_{k=1}^{K} (A x^{(k)}) \lambda_k & = & a & \\ & \sum_{k=1}^{K} \lambda_k & = & 1 & \\ & \lambda_k & \geq & 0 & \forall k \in \{1, \ldots, K\} \end{array} \right.$$

Décomposition de Dantzig-Wolfe - Génération de colonnes

Problème maître restreint sur un sous-ensemble J de $\{1,\ldots,K\}$

$$(PMR\_DW) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \max & \sum_{j\in J}(c^t x^{(j)})\lambda_j & & \\ & & & \\ s.c. & \sum_{j\in J}(Ax^{(j)})\lambda_j & = & a \\ & \sum_{j\in J}\lambda_j & = & 1 \\ & \lambda_j & \geq & 0\,, \qquad \forall j \in J \end{array} \right.$$

Le sous-problème

$$(SP) \left\{ \begin{array}{ll} \max & c^t x - \pi^t A x - \pi_0 \\ & \\ \text{s. c.} & Bx = b \\ & x \in X \end{array} \right.$$

avec $(\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ les variables duales fournies par la résolution de (PMR_DW).

Décomposition de Dantzig-Wolfe - Génération de colonnes

Problème maître restreint sur un sous-ensemble J de $\{1, \dots, K\}$

$$(PMR\_DW) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \max & \sum_{j \in J} (c^t x^{(j)}) \lambda_j & & \\ & & & \\ s.c. & \sum_{j \in J} (A x^{(j)}) \lambda_j & = & a \\ & \sum_{j \in J} \lambda_j & = & 1 \\ & \lambda_j & \geq & 0\,, \qquad \forall j \in J \end{array} \right.$$

Le sous-problème

$$(SP) \left\{ \begin{array}{ll} \max & c^t x - \pi^t A x - \pi_0 \\ & \\ \text{s. c.} & Bx = b \\ & x \in X \end{array} \right.$$

avec $(\pi, \pi_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ les variables duales fournies par la résolution de (PMR_DW).

Liens entre les différentes relaxations et décompositions

Relations de dominance entre les différentes relaxations et décompositions

$$v(P) \leq v(LDD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

$$v(P) \leq v(SRD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

Liens entre les différentes relaxations et décompositions

Relations de dominance entre les différentes relaxations et décompositions

$$v(P) \leq v(LDD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

$$v(P) \leq v(SRD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

Liens entre les différentes relaxations et décompositions

Relations de dominance entre les différentes relaxations et décompositions

$$v(P) \leq v(LDD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

$$v(P) \leq v(SRD) \leq v(LRD) \leq v(LP)$$

Liens avec la décomposition de Dantzig-Wolfe (génération de colonnes)

Relations de dominance entre les différentes relaxations et décompositions

$$
\begin{array}{ccc}
(LDD) & \geq & (LRD) \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
(LDD\_DWD) & \geq & (DWD)
\end{array}
$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Problème

$$(P)\left\{\begin{array}{llcll} \max & cx & & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a & \\ & Bx & = & b & \\ & x & = & y & \text{(contraintes de copie)} \\ & x \in \mathbb{N}^n, & y \in Y, & & \text{avec } Y \supseteq X \end{array}\right.$$

Reformulation des variables

- $\forall y \in Conv(Y_A), y = \sum_{l \in L} \gamma_l y^l \mid \sum_{l \in L} \gamma_l = 1, \gamma_l \geq 0, \forall l \in L$
  où L est l'ensemble des indices des points extrêmes de $Conv(Y_A)$
- $\forall x \in Conv(X_B), x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k \mid \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \forall k \in K$
  où K est l'ensemble des indices des points extrêmes de $Conv(X_B)$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Problème

$$(P)\left\{\begin{array}{lrcll} \max & cx & & & \\ \text{s. c.} & Ay & = & a & \\ & Bx & = & b & \\ & x & = & y & \text{(contraintes de copie)} \\ & \multicolumn{3}{l}{x \in \mathbb{N}^n,\ y \in Y,} & \text{avec } Y \supseteq X \end{array}\right.$$

Reformulation des variables

- $\forall y \in Conv(Y_A), y = \sum_{l \in L} \gamma_l y^l \ \mid\ \sum_{l \in L} \gamma_l = 1, \gamma_l \geq 0, \forall l \in L$
  où L est l'ensemble des indices des points extrêmes de $Conv(Y_A)$
- $\forall x \in Conv(X_B), x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k \ \mid\ \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, \forall k \in K$
  où K est l'ensemble des indices des points extrêmes de $Conv(X_B)$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Problème maître de la décomposition Lagrangienne

$$(LD\_DWD) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_k (cx^k)\lambda_k \\ \text{s. c.} & \sum_l \gamma_l = 1 \\ & \sum_k \lambda_k = 1 \\ & \sum_k x^k \lambda_k = \sum_l y^l \gamma_l \\ & \lambda_k \geq 0, \forall k \in K,\ \gamma_l \geq 0, \forall l \in L \end{array} \right.$$

Dual de la décomposition Lagrangienne

$$(LDD\_DWD) \left\{ \begin{array}{ll} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq u^t y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - u^t)x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Problème maître de la décomposition Lagrangienne

$$(LD\_DWD) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_k (cx^k)\lambda_k \\ \text{s. c.} & \sum_l \gamma_l = 1 \\ & \sum_k \lambda_k = 1 \\ & \sum_k x^k \lambda_k = \sum_l y^l \gamma_l \\ & \lambda_k \geq 0, \forall k \in K, \ \gamma_l \geq 0, \forall l \in L \end{array} \right.$$

Dual de la décomposition Lagrangienne

$$(LDD\_DWD) \left\{ \begin{array}{ll} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq u^t y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - u^t)x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Lemme

Le problème (LDD_DWD) fournit une borne de meilleure qualité que celle obtenue avec (PM_DW)

Preuve

$$(LDD\_DWD)\begin{cases} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq u^t y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - u^t)x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Lemme

Le problème (LDD_DWD) fournit une borne de meilleure qualité que celle obtenue avec (PM_DW)

Preuve

$$(LDD\_DWD) \begin{cases} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq u^t y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - u^t) x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Preuve

En considérant uniquement les multiplicateurs $u^t = \pi^t A$, où $\pi \in \mathbb{R}^m$, et en substituant dans (LDD_DWD) on obtient :

$$(\overline{LDD\_DWD}) \begin{cases} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq \pi^t A y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - \pi^t A) x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$v(LDD\_DWD) <= v(\overline{LDD\_DWD})$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Preuve

En considérant uniquement les multiplicateurs $u^t = \pi^t A$, où $\pi \in \mathbb{R}^m$, et en substituant dans (LDD_DWD) on obtient :

$$(\overline{LDD\_DWD}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & w_1 + w_2 \\ \text{s. c.} & w_1 \geq \pi^t A y^l, \quad l \in L \\ & w_2 \geq (c - \pi^t A) x^k, \quad k \in K \\ & w_1, w_2 \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

$$v(LDD\_DWD) <= v(\overline{LDD\_DWD})$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Dual de $(\overline{LDD\_DWD})$

$$\begin{cases} \max & \sum_k (cx^k)\lambda_k \\ & \sum_l \gamma_l = 1 \\ & \sum_k \lambda_k = 1 \\ & \sum_k Ax^k\lambda_k = \sum_l Ay^l\gamma_l \\ & \lambda_k \geq 0, k \in K, \; \gamma_l \geq 0, l \in L \end{cases}$$

- $y^{(l)}, l \in L$ sont les points extrêmes de $Conv(Y_A)$, alors $Ay^l = a, \forall l \in L$
- $\sum_l \gamma_l = 1$, on obtient : $\sum_l Ay^l\gamma_l = a$
- Par substitution, on obtient un problème équivalent à (PM_DW)

Résultat

$$v(LDD\_DWD) <= v(PM\_DW) = v(\overline{LDD\_DWD})$$

Principe de Dantzig-Wolfe dans la décomposition Lagrangienne

Dual de $(\overline{LDD\_DWD})$

$$\begin{cases} \max & \sum_k (cx^k)\lambda_k \\ & \sum_l \gamma_l = 1 \\ & \sum_k \lambda_k = 1 \\ & \sum_k Ax^k\lambda_k = \sum_l Ay^l\gamma_l \\ & \lambda_k \geq 0, k \in K,\ \gamma_l \geq 0, l \in L \end{cases}$$

- $y^{(l)}, l \in L$ sont les points extrêmes de $Conv(Y_A)$, alors $Ay^l = a, \forall l \in L$
- $\sum_l \gamma_l = 1$, on obtient : $\sum_l Ay^l\gamma_l = a$
- Par substitution, on obtient un problème équivalent à (PM_DW)

Résultat

$$v(LDD\_DWD) <= v(PM\_DW) = v(\overline{LDD\_DWD})$$

Plan

Notations

- Un ensemble $N = \{1, ..., n = |N|\}$ de sites et un ensemble K de véhicules.
- Un graphe $\mathcal{G} = (H, A)$, $H = N \cup \{s, t\}$ (s la source et t le puits).
- On associe à chaque arc $(i, j) \in A$ une durée t_{ij} et un coût c_{ij}.
- Chaque sommet $i \in H$ est caractérisé par une fenêtre de temps $[a_i, b_i]$.
- Chaque véhicule possède une capacité limitée Q et chaque site $i \in N$ une demande d_i.

But

Construire des tournées de véhicules dont l'ensemble couvre tous les sites et à moindre coût.

Variables de décision

- Variables entières : T_i^v, le temps cumulé sur le chemin X_{si}^v.
- Variables binaires : $x_{ij}^v = 1$ si l'arc (i, j) est emprunté par le véhicule v et est nulle sinon.

Notations

- Un ensemble $N = \{1, ..., n = |N|\}$ de sites et un ensemble K de véhicules.
- Un graphe $\mathcal{G} = (H, A)$, $H = N \cup \{s, t\}$ (s la source et t le puits).
- On associe à chaque arc $(i, j) \in A$ une durée t_{ij} et un coût c_{ij}.
- Chaque sommet $i \in H$ est caractérisé par une fenêtre de temps $[a_i, b_i]$.
- Chaque véhicule possède une capacité limitée Q et chaque site $i \in N$ une demande d_i.

But

Construire des tournées de véhicules dont l'ensemble couvre tous les sites et à moindre coût.

Variables de décision

- Variables entières : T_i^v, le temps cumulé sur le chemin X_{si}^v.
- Variables binaires : $x_{ij}^v = 1$ si l'arc (i, j) est emprunté par le véhicule v et est nulle sinon.

Notations

- Un ensemble $N = \{1, ..., n = |N|\}$ de sites et un ensemble K de véhicules.
- Un graphe $\mathcal{G} = (H, A)$, $H = N \cup \{s, t\}$ (s la source et t le puits).
- On associe à chaque arc $(i, j) \in A$ une durée t_{ij} et un coût c_{ij}.
- Chaque sommet $i \in H$ est caractérisé par une fenêtre de temps $[a_i, b_i]$.
- Chaque véhicule possède une capacité limitée Q et chaque site $i \in N$ une demande d_i.

But

Construire des tournées de véhicules dont l'ensemble couvre tous les sites et à moindre coût.

Variables de décision

- Variables entières : T_i^v, le temps cumulé sur le chemin X_{si}^v.
- Variables binaires : $x_{ij}^v = 1$ si l'arc (i, j) est emprunté par le véhicule v et est nulle sinon.

Formulation

$$
\begin{array}{llll}
\min & \displaystyle\sum_{1\le v\le |V|} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}^v & & (1)\\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{1\le v\le |V|} \sum_{\{j\in H \mid (i,j)\in A\}} x_{ij}^v = 1, & \forall i \in N & (2)\\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} d_i x_{ij}^v \le Q, & 1 \le v \le |V| & (3)\\
& \displaystyle\sum_{\{i\in H \mid (s,i)\in A\}} x_{si}^v = \sum_{\{i\in H \mid (i,t)\in A\}} x_{it}^v = 1, & 1 \le v \le |V| & (4)\\
& \displaystyle\sum_{\{j\in H \mid (i,j)\in A\}} x_{ij}^v - \sum_{\{j\in H \mid (j,i)\in A\}} x_{ji}^v = 0, & 1 \le v \le |V|, \forall i \in N & (5)\\
& x_{ij}^v \in \{0,1\}, & 1 \le v \le |V|, \forall (i,j) \in A & (6)\\
& x_{ij}^v (T_i^v + t_{ij} - T_j^v) \le 0, & 1 \le v \le |V|, \forall (i,j) \in A & (7)\\
& T_j^v \in [a_j, b_j], & \forall j \in H,\quad 1 \le v \le |V| & (8)
\end{array}
$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Modèle de partitionnement d'ensembles

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r\in\mathcal{R}} c_r\lambda_r & \\
& \sum_{r\in\mathcal{R}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i\in\mathcal{N} \\
& \sum_{r\in\mathcal{R}} \lambda_r = 1 & \\
& \lambda_r\in\{0,1\} & \forall r\in\mathcal{R}
\end{array}
$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

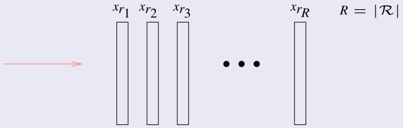
Problème maître

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r\in\mathcal{R}} c_r\lambda_r & \\
 & \sum_{r\in\mathcal{R}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r\in\mathcal{R}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \mathcal{R}
\end{array}
$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître

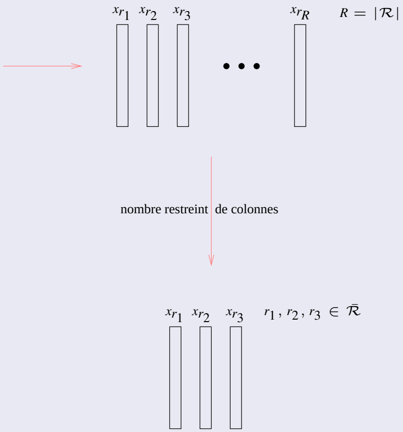
$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r \in \mathcal{R}} c_r \lambda_r & \\
 & \sum_{r \in \mathcal{R}} \delta_{ir} \lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r \in \mathcal{R}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \mathcal{R}
\end{array}
$$



Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître

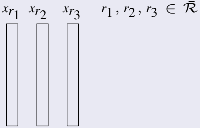
$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r\in\mathcal{R}} c_r\lambda_r & \\
 & \sum_{r\in\mathcal{R}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r\in\mathcal{R}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \mathcal{R}
\end{array}
$$



Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

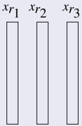
$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} c_r \lambda_r & \\
 & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir} \lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}}
\end{array}
$$



Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} c_r \lambda_r & & \\
& \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir} \lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} & (\pi_i) \\
& \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & & (\pi_0) \\
& \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}} &
\end{array}
$$



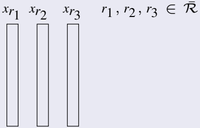
$r_1, r_2, r_3 \in \bar{\mathcal{R}}$

$$c(\lambda_r) = c_r - \sum_i \pi_i \delta_{ir} - \pi_0$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} c_r\lambda_r & & \\
 & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} & (\pi_i) \\
 & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & & (\pi_0) \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}} &
\end{array}
$$

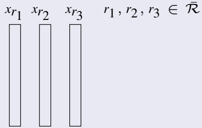


$$\min_{r\in\mathcal{R}} c(\lambda_r)$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} c_r\lambda_r & \\
 & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}}
\end{array}
$$



$$\min_{r\in\mathcal{R}} c_r - \sum_i \pi_i\delta_{ir} - \pi_0$$

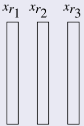
Sous-problème

$$
(SP(\pi)) \left\{
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in A}(c_{ij}-\pi_i)x_{ij} - \pi_0 & \\
\text{s.c.} & \sum_{j\in H} x_{sj} = \sum_{j\in H} x_{jt} = 1 & \\
 & \sum_{j\in H} x_{ij} - \sum_{j\in H} x_{ji} = 0, & i \in N \\
 & \sum_{(i,j)\in A} d_i x_{ij} \leq Q, & \\
 & x_{ij} \in \{0,1\}, & \forall (i,j)\in A \\
 & x_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0, & \forall (i,j)\in A \\
 & T_j \in [a_j, b_j], & \forall j \in H
\end{array}
\right.
$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} c_r\lambda_r & \\
& \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir}\lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
& \sum_{r\in\bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & \\
& \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}}
\end{array}
$$



$r_1, r_2, r_3 \in \bar{\mathcal{R}}$

Sous-problème : Plus court chemin avec fenêtres de temps et contraintes de capacité

$$
(SP(\pi)) \left\{
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in A}(c_{ij} - \pi_i)x_{ij} - \pi_0 & \\
\text{s.c.} & \sum_{j\in H} x_{sj} = \sum_{j\in H} x_{jt} = 1 & \\
& \sum_{j\in H} x_{ij} - \sum_{j\in H} x_{ji} = 0, & i \in N \\
& \sum_{(i,j)\in A} d_i x_{ij} \leq Q, & \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0, & \forall (i,j) \in A \\
& T_j \in [a_j, b_j], & \forall j \in H
\end{array}
\right.
$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} c_r \lambda_r & \\ & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir} \lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\ & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & \\ & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}} \end{array}$$

x_{r_1} x_{r_2} x_{r_3} x_{r_4}

$\bar{\mathcal{R}} \leftarrow \bar{\mathcal{R}} \cup \{x_{r_4}\}$

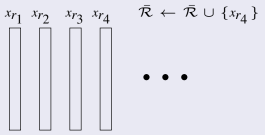
Sous-problème : Plus court chemin avec fenêtres de temps et contraintes de capacité

$$(SP(\pi)) \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} - \pi_i) x_{ij} - \pi_0 & \\ \text{s.c.} & \sum_{j \in H} x_{sj} = \sum_{j \in H} x_{jt} = 1 & \\ & \sum_{j \in H} x_{ij} - \sum_{j \in H} x_{ji} = 0, & i \in N \\ & \sum_{(i,j) \in A} d_i x_{ij} \leq Q, & \\ & x_{ij} \in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A \\ & x_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0, & \forall (i,j) \in A \\ & T_j \in [a_j, b_j], & \forall j \in H \end{array} \right.$$

Résolution avec la génération de colonnes (1)

Problème maître restreint

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} c_r \lambda_r & \\
 & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \delta_{ir} \lambda_r = 1 & \forall i \in \mathcal{N} \\
 & \sum_{r \in \bar{\mathcal{R}}} \lambda_r = 1 & \\
 & \lambda_r \geq 0 & \forall r \in \bar{\mathcal{R}}
\end{array}
$$



Sous-problème : Plus court chemin avec fenêtre de temps et contraintes de capacité

$$
(SP(\pi)) \left\{
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} - \pi_i) x_{ij} - \pi_0 & \\
\text{s.c.} & \sum_{j \in H} x_{sj} = \sum_{j \in H} x_{jt} = 1 & \\
 & \sum_{j \in H} x_{ij} - \sum_{j \in H} x_{ji} = 0, & i \in N \\
 & \sum_{(i,j) \in A} d_i x_{ij} \leq Q, & \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall (i,j) \in A \\
 & x_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0, & \forall (i,j) \in A \\
 & T_j \in [a_j, b_j], & \forall j \in H
\end{array}
\right.
$$

Résolution avec la génération de colonnes (2)

Problème maître

Résolution avec le simplexe.

Sous-problème

- Résolution avec la programmation dynamique à correction d'étiquettes.
- Cas acyclique.

Programmation dynamique à correction d'étiquettes

- Associer à chaque chemin une étiquette $E = (t, c, d)$.
- Chaque sommet peut contenir plusieurs étiquettes.
- Diminance : S'il n'existe aucune étiquette $E' = (t', c', d')$ telle que $t > t'$ et $c > c'$ et $d > d'$, alors E est dite efficace, sinon E est dite dominée par E'.
- Dominance sur les critères coût et temps.

Résolution avec la génération de colonnes (2)

Problème maître

Résolution avec le simplexe.

Sous-problème

- Résolution avec la programmation dynamique à correction d'étiquettes.
- Cas acyclique.

Programmation dynamique à correction d'étiquettes

- Associer à chaque chemin une étiquette $E = (t, c, d)$.
- Chaque sommet peut contenir plusieurs étiquettes.
- Diminance : S'il n'existe aucune étiquette $E' = (t', c', d')$ telle que $t > t'$ et $c > c'$ et $d > d'$, alors E est dite efficace, sinon E est dite dominée par E'.
- Dominance sur les critères coût et temps.

Résolution avec la génération de colonnes (2)

Problème maître

Résolution avec le simplexe.

Sous-problème

- Résolution avec la programmation dynamique à correction d'étiquettes.
- Cas acyclique.

Programmation dynamique à correction d'étiquettes

- Associer à chaque chemin une étiquette $E = (t, c, d)$.
- Chaque sommet peut contenir plusieurs étiquettes.
- Diminance : S'il n'existe aucune étiquette $E' = (t', c', d')$ telle que $t > t'$ et $c > c'$ et $d > d'$, alors E est dite efficace, sinon E est dite dominée par E'.
- Dominance sur les critères coût et temps.

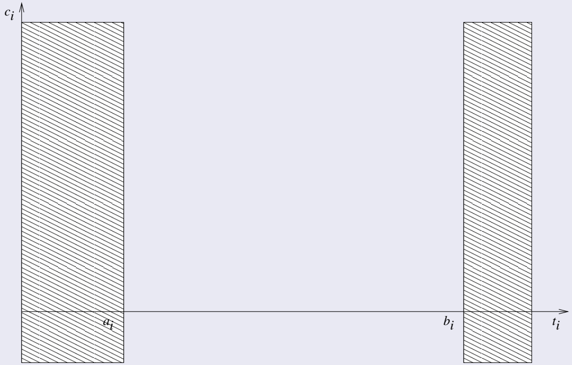
Programmation dynamique à correction d'étiquettes

Prolongement et test de réalisabilité

$E = (c, t, d)$ $\quad i \xrightarrow{(c_{ij}, t_{ij})} j$

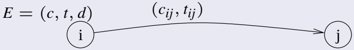
$$E^1 = (c^1, t^1, d^1), \quad c^1 = c + c_{ij}, t^1 = \min\{a_i, t + t_{ij}\}, d^1 = d + d_i$$

Dominance



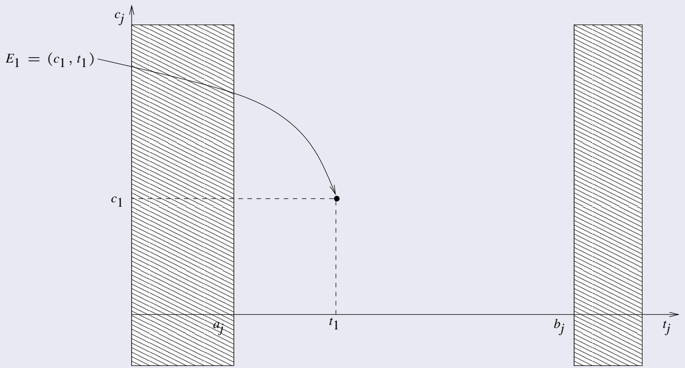
Programmation dynamique à correction d'étiquettes

Prolongement et test de réalisabilité



$E^1 = (c^1, t^1, d^1), \quad c^1 = c + c_{ij}, t^1 = \min\{a_i, t + t_{ij}\}, d^1 = d + d_i$

Dominance



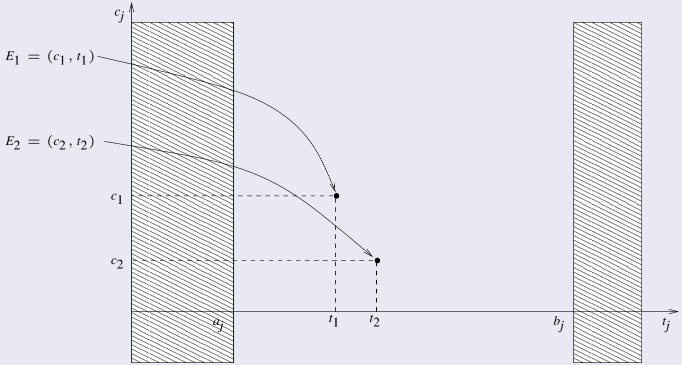
Programmation dynamique à correction d'étiquettes

Prolongement et test de réalisabilité

$E = (c, t, d)$ $\quad i \xrightarrow{(c_{ij}, t_{ij})} j$

$$E^1 = (c^1, t^1, d^1), \quad c^1 = c + c_{ij}, t^1 = \min\{a_i, t + t_{ij}\}, d^1 = d + d_i$$

Dominance



Programmation dynamique à correction d'étiquettes

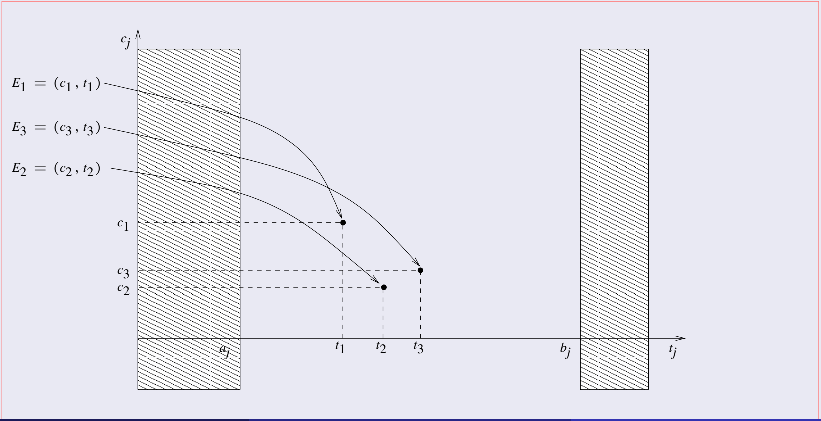
Prolongement et test de réalisabilité

$E = (c, t, d)$

$i \xrightarrow{(c_{ij}, t_{ij})} j$

$E^1 = (c^1, t^1, d^1), \quad c^1 = c + c_{ij}, t^1 = \min\{a_i, t + t_{ij}\}, d^1 = d + d_i$

Dominance



Programmation dynamique à correction d'étiquettes

Prolongement et test de réalisabilité

$E = (c, t, d)$ $\quad$ $i \xrightarrow{(c_{ij}, t_{ij})} j$

$E^1 = (c^1, t^1, d^1), \quad c^1 = c + c_{ij}, t^1 = \min\{a_i, t + t_{ij}\}, d^1 = d + d_i$

Dominance