Université Paris 13
Sup Galilée

INFO2
Année 2020-2021

Optimisation Linéaire
TP n°1 : Cplex interactif

Cplex est un logiciel de programmation mathématique (l'un des plus utilisés) permettant de résoudre des programmes linéaires avec des variables réelles et/ou entières, ainsi que des programmes quadratiques.

1. Exécution du logiciel

1.1. Paramétrage de votre environnement

La version de Cplex actuellement installée est la version 12.9. Pour l'utiliser, il faut décommenter une ligne dans votre fichier ".bashrc" (celle qui suit la ligne "# CPLEX") :
source /export/home/users/COMMUN/.cplexrc

Le fichier ".cplexrc" définit les variables d'environnement nécessaires à l'utilisation de Cplex :

1. CPLEX, qui donne le répertoire des exécutables (notamment, le binaire "cplex" qui permet d'utiliser Cplex en mode interactif) ; ce chemin est naturellement ajouté à votre variable "PATH" ; actuellement, ces binaires sont sur le répertoire :
   /LOCAL/CPLEX_Studio129/cplex/bin/x86-64_linux/

1.2. Lancement de Cplex en mode interactif

Une fois votre environnement correctement configuré, il suffit d'entrer la commande **cplex** pour lancer le logiciel Cplex ; on obtient alors le prompt : CPLEX>

Remarques :

1. Toutes les commandes sous Cplex peuvent s'écrire de façon abrégée en utilisant la ou les premières lettres des commandes, du moment que l'abréviation n'introduit pas d'ambiguïté sur la commande invoquée ; par exemple, la commande **display problem all** peut être lancée sous forme abrégée en **d p a**, **dis p al**, ou encore **di problem a**, ...
2. Il existe une aide en ligne obtenue en lançant la commande **help** (ou **h**).
3. La documentation complète de Cplex (aux formats html et pdf) se trouve dans le répertoire :
   /LOCAL/CPLEX_Studio129/doc/

2. Manipulation d'un programme linéaire

On souhaite résoudre avec Cplex le programme linéaire (P_1). Il existe deux façons de charger ce problème dans Cplex.

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 3x_2 & & \\ s.c. & x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 5x_2 & = & 10 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \end{array} \right.$$

2.1. Chargement d'un programme linéaire

2.1.1. Chargement par saisie interactive

Depuis Cplex, lancer la commande **enter** puis entrer le programme de la façon suivante :

CPLEX> **enter**
Enter name for problem: **P1**
Enter new problem ['end' on a separate line terminates]:

max	(ou **maximize**)
obj: 5x1 - 3x2	(ou **5x1 - 3x2**)
st	(ou **such that, subject to,** ...)
c1: x1 - x2 >= 2	(ou **x1 - x2 >= 2**)
c2: 2x1 + 3x2 <= 6	
c3: -x1 + 5x2 = 10	
bounds	(seules les variables apparaissant dans l'objectif ou dans les
x1 >= 0	contraintes peuvent être sujettes à une contrainte de borne)
-inf <= x2 <= inf	(ou **x2 free**)
end	

Remarques :

1. L'interface de saisie n'est pas sensible à la casse (en particulier, **x** et **X** désigneront une même variable).
2. Pour l'expression des contraintes, il faut adopter le format $a_i \cdot x \ \geq = \leq b_i$ où $a_i, x \in \mathbb{R}^p$ et $b_i \in \mathbb{R}$ (et où $p \leq n$ si n désigne le nombre de variables), c'est-à-dire que les variables doivent obligatoirement se situer à gauche du signe indiquant le sens de la contrainte. On n'est pas en revanche obligé de faire apparaître une variable si celle-ci ne participe pas à la contrainte (*i.e.*, si la variable a un coefficient nul dans la contrainte).
3. Attention : si l'on quitte l'environnement Cplex sans avoir sauvegardé le problème saisi, celui-ci sera perdu (pour le sauvegarder : *cf.*, section 2.3).

2.1.2. Affichage du problème chargé

Il est possible d'afficher le programme chargé (ou certaines parties de ce programme) par la commande **display problem** (**display problem all** pour afficher toutes les données du programme).

2.1.3. Chargement par lecture de fichier

Le programme linéaire peut être écrit dans un fichier respectant un certain format, qui peut être ensuite lu par Cplex à l'appel de la commande **read**. Il existe essentiellement deux formats de fichier : **lp** (très proche du format de saisie), et **mps**. Dans le format **lp**, le programme linéaire est écrit par lignes (*cf.*, figure 1), tandis que dans le format **mps**, le programme linéaire est décrit par colonnes (*cf.*, figure 2). Dans le cadre de ce TP, on utilisera (quasi)exclusivement le format **lp**.

2.2. Modification d'un programme linéaire

Figure 1: Format lp

max	(ou **maximize**)
obj : 5x - 3y	(le nom de l'objectif est optionnel)
st	
c1 : x - y >= 2	(le nom des contraintes est optionnel)
c2 : 2x + 3y <= 6	
c3 : -x + 5y = 10	
bounds	
x >= 0	
y >= -inf	(ou **y free**)
end	

Figure 2: Format mps

NAME	P1			
ROWS				
	N	obj		
	G	c1		(G == "≥", L == "≤", E == "=")
	L	c2		
	E	c3		
COLUMNS				
	x	obj	-5	
	x	c1	1	
	x	c2	2	
	x	c3	-1	
	y	obj	3	
	y	c1	-1	
	y	c2	3	
	y	c3	5	
RHS				
	rhs	c1	2	
	rhs	c2	6	
	rhs	c3	10	
BOUNDS				
	FR	bnd	y	(FR == non bornée, UP == borne sup., LO == borne inf.)
ENDATA				

Avec la commande **change**, il est possible de modifier un programme linéaire :

bounds	modifie les bornes d'une variable
coefficient	modifie un coefficient
delete	efface des portions du problème
name	modifie le nom d'une variable ou d'une contrainte
sense	modifie le sens de l'optimisation ou d'une contrainte

Avec la commande **add**, il est possible d'ajouter des contraintes ainsi que des bornes.

2.3. Sauvegarde d'un programme linéaire

Il est possible de sauvegarder le programme linéaire courant dans un fichier grâce à la commande **write**. Le format d'écriture (**lp** ou **mps**) peut être indiqué par l'utilisation des extensions **.lp** ou **.mps** dans le nom du ficher à créer.

3. Résolution d'un programme linéaire

3.1. Résolution

Pour résoudre un programme linéaire, on peut lancer l'une des cinq commandes suivantes :

primopt	algorithme primal du simplexe
tranopt	algorithme dual du simplexe
baropt	algorithme de points intérieurs
netopt	algorithme primal du simplexe pour les problèmes de flot
optimize	Cplex choisit l'algorithme de résolution

3.2. Affichage de la solution

L'affichage de la solution se fait par la commande **display solution** :

variable	affiche un ensemble de valeurs de variables (**d so v -** pour afficher toutes les variables)
dual	affiche un ensemble de valeurs de variables duales (**d so d -** pour afficher les variables duales de toutes les contraintes)
objective	affiche la valeur de la fonction objectif
reduced	affiche un ensemble de coûts réduits
slacks	affiche un ensemble de valeurs de variables d'écart

3.3. Sauvegarde de la solution

Une description complète de la solution peut être sauvegardée dans un fichier xml : il faut pour ce faire utiliser la commande **write**, et spécifier le format **sol**.

Exercice 1

On considère les problèmes suivants :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 3x_2 & & \\ s.c. & x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 5x_2 & = & 10 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad (P_3)\left\{\begin{array}{lrcrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\ s.c. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\ & x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 30 \\ & x_1 & & & & & \leq & 40 \\ & x_1 & , & x_2 & & & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lrcr} \min & x & & \\ s.c. & x & \leq & 200 \end{array}\right.$$

- P_2
  1. Déterminer a priori la valeur optimale de (P_2).
  2. Vérifier le résultat par Cplex (saisir le problème au clavier puis lancer sa résolution par l'algorithme primal du simplexe). Modifier alors le problème de sorte à ce qu'il soit réellement conforme au problème à résoudre.
- P_1
  1. Saisir le problème au clavier puis déterminer sa valeur optimale par l'algorithme dual du simplexe.
  2. Déterminer la valeur optimale du problème obtenu en ayant changé le sens de la 3ème contrainte pour obtenir : " $-x_1 + 5x_2 \leq 10$ ".
  3. Ajouter une contrainte de signe sur x_2 ; donner la valeur du problème, ainsi que celle de ses variables (ceci inclut les variables d'écart) et des coûts réduits qui leur sont associés. Déterminer enfin la valeur des variables duales à l'optimum.
  4. Sauvegarder (P_1) dans un fichier au format **mps**.
- P_3
  1. Écrire le problème (P_3) au format **lp** dans un fichier **p3.lp** (la troisième contrainte sera considérée comme une contrainte de borne). Quelle est la solution optimale de (P_3) ?
  2. Ajouter à (P_3) la contrainte " $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 50$ " et sauvegarder le problème obtenu dans le fichier **p3.lp**. Quelle est la nouvelle solution optimale (justifier la réponse, indépendamment du résultat obtenu par Cplex) ?
  3. Que se passe-t-il si l'on force l'égalité pour la première contrainte ?

<u>Exercice 2</u> Aide à la décision dans une exploitation agricole

Les activités de notre exploitation agricole se divisent en deux grandes productions: culture et élevage. Nous ne voulons pas toucher à notre production agricole mais nous voulons pouvoir améliorer le rendement de notre activité d'élevage. La charge de travail (main d'oeuvre) disponible pour l'élevage varie selon les saisons de la façon suivante:

Table 1

Mois	Heures	Mois	Heures
Janvier	420	Juillet	380
Février	415	Août	395
Mars	355	Septembre	270
Avril	345	Octobre	230
Mai	160	Novembre	310
Juin	95	Décembre	420

On pratique 5 types d'élevage:

i). Elevage porcin de printemps.
ii). Elevage porcin d'automne.
iii). Elevage de bovins en batteries.
iv). Elevage de bovins en pâture.
v). Engraissage de bovins.

Dans les élevages porcins, les cochons naissent en février (printemps) ou en août (automne) et sont vendus à peu près 6 mois plus tard. Dans les élevages bovins, les veaux sont achetés en octobre et sont vendus environ un an plus tard. La charge estimée de travail peut se résumer ainsi:

Table 2 Temps de travail estimé

	Types d'élevage				
Mois	i)*	ii)*	iii)+	iv)+	v)+
Janvier	1.4	1.8	1.5	1.4	1.4
Février	9.8	2.4	1.4	1.4	1.4
Mars	4.0	0.4	1.4	1.4	1.4
Avril	2.8	0.6	1.3	1.4	1.5
Mai	2.2	0.4	1.3	1.5	1.2
Juin	2.2	0.4	1.3	1.3	1.2
Juillet	2.2	0.6	1.3	1.3	1.2
Août	2.6	5.8	1.5	1.5	1.2
Septembre	0.6	4.0	1.3	-	-
Octobre	0.6	1.2	1.3	1.3	2.6
Novembre	0.6	1.8	1.2	1.2	1.2
Décembre	0.6	1.8	1.5	1.4	1.4

* heures par portée
\+ heures par vache

En plus de la charge de travail, chacun de ses 5 élevages nécessite une certaine quantité de nourriture produite par la ferme: soit en laissant les bêtes en pâture, soit en leur apportant des produits récoltés et stockés que l'on appelle communément "nourriture stockée" (fourrage, herbe, pomme de terre,...). La pâture se mesure en unités appelées "jour de pâture": c'est la quantité d'herbe mangée par jour par un cheval adulte ou une vache ne recevant pas d'autre nourriture. Les pâturages sont disponibles d'avril à septembre, durant cette période, il est aussi possible de remplacer la pâture par de la nourriture stockée. La disponibilité des pâturages est indiquée ici avec la demande de pâture pour chacun des 5 élevages.

Table 3 Besoin en pâture

	Besoin(j.pâture/unité)					
Période	i)	ii)	iii)	iv)	v)	Disponilité
Avril et Mai	16	0	0	12	35	5200
Juin et juillet	20	0	0	36	50	5200
Août et Septembre	16	0	0	12	35	3600
Total	52	0	0	60	120	14000

La pâture peut être convertie en nourriture stockée avec un temps de travail de 5.5 heures et 50 jours de pâture par tonne de nourriture stockée. A part pour l'élevage porcin de printemps, les élevages nécessitent l'utilisation du stock de nourriture dans les saisons sans pâturage disponible. La demande totale en nourriture stockée est:
0.1 tonnes par portée de porcelets,
0.9 tonnes par bovin nourri au fourrage,
0.8 tonnes par bovin nourri en pâture,
2.3 tonnes par bovin engraissé.

Finallement, voici les revenus estimés des cinq élevages:

i). 139€ par portée de porcelets,
ii). 88€ par portée de porcelets,
iii). 133€ par bovins,
iv). 137€ par bovins,
v). 165€ par bovins.

L'objectif est bien entendu de planifier l'élevage le plus rentable. Néanmoins, toutes les données peuvent être remises en questions car ce ne sont que des approximations que l'on peut diminuer ou augmenter sans trahir la réalité. Au lieu de prévoir une durée de 95 heures de travail en juin, on peut tout à fait prévoir une durée de 97 heures ou 92 heures. Une planification demandant de travailler 92 ou 97 heures au moins de juin est parfaitement admissible. Cette même incertitude s'applique aussi au calcul du profit qui fluctue d'une année à l'autre en fonction du marché.
Vous pourrez discuter avec les responsables de cette exploitation agricole en posant des questions précises mais vous devrez leur rendre le rapport rédigé de vos propositions. Attention, en cas d'insatisfaction des responsables, vous ne serez pas payés.