Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 7 - Applications en recherche opérationnelle

pierre.fouilhoux@lipn.fr

21 octobre 2020

Flot Maximal et Coupe minimum

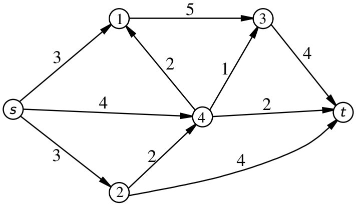
Ordonnancement de projet (Non fait cette année 2020-2021)

1. Réseaux et flots : Définitions

Réseau

Un réseau est un graphe orienté $G = (S, A)$ contenant un sommet source s et un sommet puits t.
A chacun de ces arcs $(i, j) \in A$, on associe une capacité c_{ij} positive.

Un sommet source est un sommet sans prédécesseur à partir duquel tous les autres sommets sont accessibles.
Un sommet puits est un sommet sans successeur accessible à partir de tous les autres sommets.



Réseaux et flots : Définitions

Flot

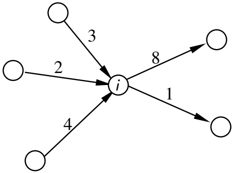
On appelle flot une fonction f qui associe un nombre à chaque arc.

$$f : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \boldsymbol{R}^+ \\ (i,j) & \rightarrow & f_{ij} \end{array}$$

et qui vérifie la loi des nœuds.

La Loi des Nœuds ou Loi de Kirchoff est la conservation du flot entre les arcs entrant et sortant d'un sommet :

$$\sum_{(k,i)\in A} f_{ki} = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} \quad \forall i \in S \setminus \{s,t\}$$



Réseaux et flots : Définitions

Un flot représente une quantité d'objets circulant sur un réseau à un instant donné.

La capacité d'un arc représente la quantité maximale d'objets qui peut passer par cet arc à un moment donné.

$f_{ij} \ / \ c_{ij}$ $\qquad$ $i \xrightarrow{3\,/\,5} j$

Flot réalisable

Un flot est dit réalisable si $f_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$.

Notons que le flot nul, c'est-à-dire le flot $f_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in A$ est un flot réalisable pour tous les réseaux.

Réseaux et flots : Interprétations

Un flot peut-être :

- de l'eau qui coule, dont le débit est mesuré en m^3/sec, limité par la capacité des tuyaux, c'est-à-dire le diamètre du tuyau.

- de l'électricité, c'est-à-dire des électrons, conduit par un câble. Leur débit se mesure par l'intensité du courant dans le câble et cette intensité est limitée par l'intensité maximale que peut supporter le câble.

- des données dans un réseau de télécommunications, avec un débit mesuré en bauds (ko/sec) et limité par la "bande passante" du câble.

- des voitures sur une route, avec un débit mesuré en nombre de voitures par sec, et limité par la largeur de cette route.

- et bien d'autres choses...

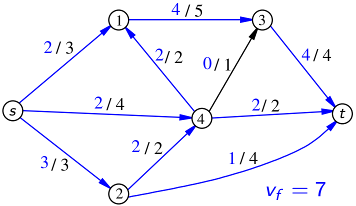
Réseaux et flots : Valeur d'un flot

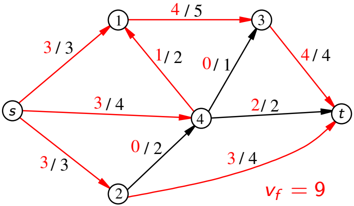
Valeur d'un flot

Etant donné un flot f, on note valeur d'un flot la quantité de flot entrant par la source, c'est-à-dire

$$v_f = \sum_{(s,j)\in A} f_{sj}$$

Notons que $v_f = \sum_{(i,t)\in A} f_{it}$ car la valeur de flot entrant par la source est égale à celle sortant par le puits.





Réseaux et flots : Flot-max

Flot-max

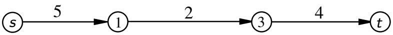
Le problème du flot de valeur maximale (Flot-max) consiste à déterminer un flot de valeur maximale dans le réseau.

Ce problème permet de modéliser :
- l'utilisation optimale d'un réseau électrique
- la gestion des réseaux de télécommunications
- la régulation routière urbaine ou autoroutière
- l'acheminement des produits du fournisseur aux clients
- la gestion de production d'une entreprise
- ...

Coupe :
Motivation

Qu'est-ce qui contraint la valeur d'un flot ?

Sur un réseau très simple, composé de "tuyaux" de capacités différentes mis bout à bout :



On voit que le flot maximal sur ce réseau est de 2.

Flot sur un chemin

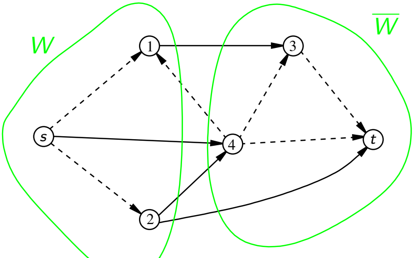
Sur un chemin de s à t, le flot circulant sur ce chemin est au plus de la valeur minimum des capacités des arcs.

Coupe :
Définition

Coupe

Etant donné un ensemble $W \subset S$ de sommets contenant la source s, on note $\overline{W} = S \setminus W$ l'ensemble complémentaire de W.
On appelle coupe d'un réseau l'ensemble des arcs allant de W à $\overline{W}$, *i.e.*

$$(W, \overline{W}) = \left\{(i,j) \in A \ : \ i \in W, j \in \overline{W}\right\}.$$

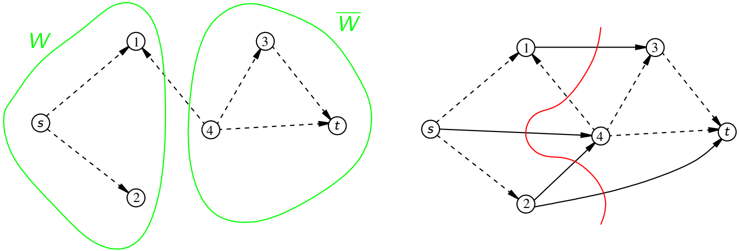


$W = \{s, 1, 2\}$
$\overline{W} = \{3, 4, t\}$
$(W, \overline{W}) = \{(1,3), (s,4), (2,4), (2,t)\}$

L'arc $(4,1)$ n'est pas dans la coupe $(W, \overline{W})$.

Coupe :
Définition

Noter que si l'on enlève les arcs d'une coupe $(W, \overline{W})$ à un réseau, alors les sommets $\overline{W}$ sont inaccessibles depuis les sommets de W.



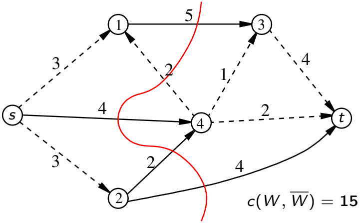
On peut tracer une ligne "coupant" le graphe de telle façon que tout arc allant de gauche à droite de la ligne est dans la coupe.

Coupe :
Définition

Capacité d'une coupe

On appelle capacité d'une coupe la somme des capacités des ses arcs, *i.e.*

$$c(W, \overline{W}) = \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} c_{ij}$$



$W = \{s, 1, 2\}$
$\overline{W} = \{3, 4, t\}$
$(W, \overline{W}) = \{(1, 3), (s, 4), (2, 4), (2, t)\}$

$c(W, \overline{W}) = 15$

Flot et coupe : Théorème

Théorème : Flot et coupe

Quelque soit un flot f réalisable
et quelque soit une coupe $(W, \overline{W})$,

$$v_f \leq c(W, \overline{W})$$

Pour $(\{s\}, S \setminus \{s\})$: cela revient à dire que le flot entrant est limité par la somme des capacités des arcs sortant de s.

Pour $(S \setminus \{t\}, \{t\})$: cela revient à dire que le flot sortant est limité par la somme des capacités des arcs entrant en t.

Flot et coupe :
Théorème

Preuve du théorème :
Soit un flot f réalisable et une coupe $(W, \overline{W})$.
Montrons tout d'abord que

$$v_f = \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} f_{ij} - \sum_{(i,j)\in A, i\in\overline{W}, j\in W} f_{ij} \tag{1}$$

Pour cela, sommons toutes les égalités provenant des lois des nœuds sur les sommets de $W \setminus \{s\}$: $\sum_{(k,i)\in A} f_{ki} = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}, \quad \forall i \in W \setminus \{s\}$.
i.e.

$$\sum_{i\in W} \sum_{(k,i)\in A} f_{ki} = \sum_{i\in W} \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}$$

Tout arc d'un sommet allant d'un sommet de W à un autre sommet de W apparaît à gauche et à droite de cette inégalité. En les éliminant à gauche et à droite, on trouve alors l'égalité (1).

Flot et coupe : Théorème

Preuve du théorème (suite) :
Comme f est réalisable, on a pour tout arc $(i,j) \in (W, \overline{W})$

$$f_{ij} \leq c_{ij}$$

En sommant sur tous les arcs de la coupe, on a

$$\sum_{(i,j) \in (W,\overline{W})} f_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in (W,\overline{W})} c_{ij} = c(W, \overline{W})$$

Or on sait par (1)

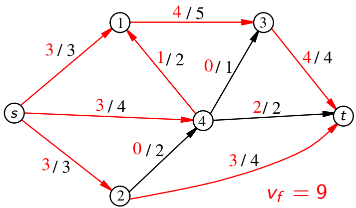
$$v_f \leq \sum_{(i,j) \in (W,\overline{W})} f_{ij} - \sum_{(i,j) \in A, i \in \overline{W}, j \in W} f_{ij}$$

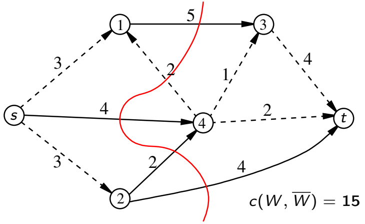
or $-\sum_{(i,j) \in A, i \in \overline{W}, j \in W} f_{ij} \leq 0$ car le flot est positif

Par conséquent, $v_f \leq c(W, \overline{W})$. $\square$

Flot et coupe : Borne supérieure

La capacité de chaque coupe est une borne supérieure pour la valeur de tout flot.





La capacité de chaque coupe est donc une borne supérieure pour la valeur maximale d'un flot.

Flot et coupe :~ Corollaire

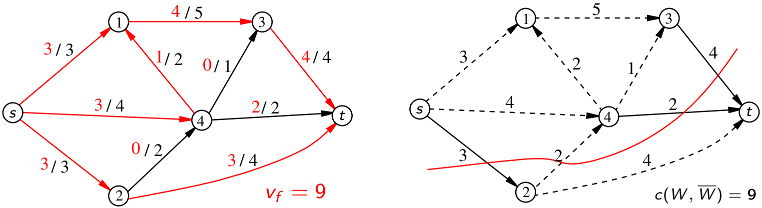
Corollaire

Si l'on a un flot f réalisable de valeur v_f
et une coupe $(W, \overline{W})$ de capacité $c(W, \overline{W})$
avec $v_f = c(W, \overline{W})$
Alors f est un flot de valeur maximale
et w est une coupe de capacité minimale.

Preuve : Ce résultat se déduit du théorème précédent par l'absurde.
En effet, s'il existait un flot de valeur supérieure à v_f,
alors la coupe $(W, \overline{W})$ aurait une capacité inférieure à cette valeur.
Ce qui contredirait le théorème. $\square$

Flot et coupe : Coupe minimum

Sur cet exemple :



On prouve ainsi que ce flot et cette coupe sont optimaux.

Flot et coupe : Coupe minimum

Coupe minimum

On appelle problème de la coupe minimum (min-Cut) le fait de rechercher une coupe de capacité minimale dans un réseau.

La valeur optimale du problème de la coupe minimum est le même que celui du problème de flot maximal.

Mais ces deux problèmes fournissent des objets bien différents ! (l'un un flot, l'autre un ensemble d'arcs).

On dit qu'ils forment un couple de problèmes duaux l'un de l'autre. (Flot-max est le dual de min-Cut et min-Cut est le dual de Flot-max).

Ford-Fulkerson : Motivation

"Idée" d'un algorithme pour déterminer un flot maximal :

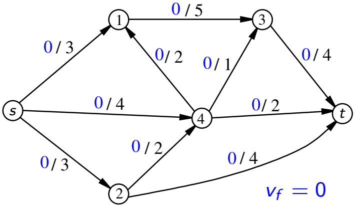
Initialisation : partir du flot nul qui est réalisable.

Tant que l'on trouve un "chemin" μ allant de s à t

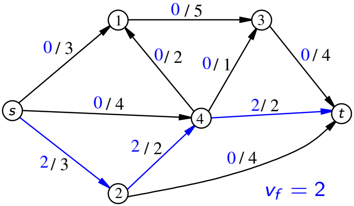
Augmenter la valeur du flot sur ce chemin au maximum.

Fin Tant que

Initialisation :



Chemin $\mu = (s, 2, 4, t)$:

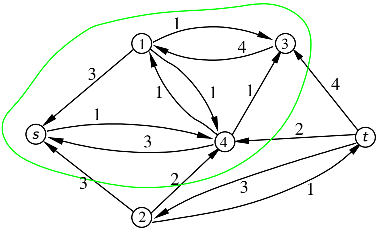


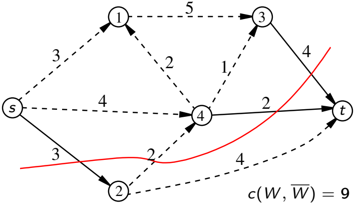
L'algorithme réel est plus complexe et s'appuie sur un graphe auxiliaire appelé "graphe d'écart".

Ford-Fulkerson : Coupe minimale

Coupe Minimale par l'algorithme

Pour un flot f maximal, considérons l'ensemble W des sommets accessibles à partir de s dans un graphe particulier construit depuis G appelé "le graphe d'écart".
Alors $(W, \overline{W})$ est une coupe minimale.





Ford-Fulkerson : Complexité

Pour un réseau de n sommets et m arcs,
l'algorithme de Ford-Fulkerson consiste :
- à construire le graphe d'écart : $O(n+m)$
- à rechercher itérativement un chemin quelconque de s à t ou déterminer s'il n'en existe pas : parcours en profondeur en $O(n+m)$
- à effectuer la mise à jour : $O(m)$

Donc l'algorithme est en $O(nb\_iter * (n+m))$ avec nb_iter le nombre de fois où l'on déterminer un chemin de G_f.

Dans le pire des cas, si les capacités sont entières, on augmente le flot d'une seule unité de flot : ainsi nb_iter est borné par la valeur de la coupe minimale. Une borne sur cette valeur est n fois le maximum des capacité des arcs.

Complexité

L'algorithme de Ford-Fulkerson est en $O(C_{max}nm)$ où C_{max} est le maximum des capacités des arcs.

Ford-Fulkerson : Complexité

Lorsque la complexité dépend des valeurs numériques des données et non uniquement de la quantité de données : on dit qu'il est pseudo-polynomial.

Ainsi, lorsque $C_{max} = 2^n$, la complexité de l'algorithme devient $O(2^n nm)$ et n'est plus polynomiale.

Il existe des améliorations pour éviter une telle explosion :
- par exemple en recherchant un plus court chemin et non un chemin quelconque
- en effectuant cette recherche par une technique efficace dite *distance estimée au puits (DEP)* : cette amélioration permet de passer à une complexité polynomial en $O(mn^2)$.

D'autres algorithmes existent pour le flot maximal de complexité encore inférieure.

Problème du flot maximum

On considère un **réseau** $G = (V, A)$ qui est un graphe orienté comportant un sommet s, appelé source, sans prédecesseur à partir duquel on peut atteindre tout sommet de G et un sommet t, appelé puits, qui est accessible depuis tout sommet de G.

Notons

- $x(a)$ le flot passant par un arc a
- v la valeur du flot

Modélisons le problème de flot maximal par un programme linéaire.

Problème du flot maximum

Considérons la formulation PL suivante.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & v \\
& \sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) - \sum_{a \in \delta^+(u)} x(a) = 0 \quad \forall u \in V \setminus \{s,t\} \\
& \sum_{a \in \delta^+(s)} x(a) - v = 0, \\
& \sum_{a \in \delta^-(t)} x(a) + v = 0, \\
& x(a) \leq b(a) \quad \forall a \in A, \\
& v \geq 0, \\
& x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A.
\end{aligned}$$

L'équivalence avec le problème de flot maximal est assez directe à prouver.

Ecrivons le dual de la façon suivante :

- on note $\pi(u)$ les variables duales associées aux 3 premières inégalités pour $u \in V$
- on note $\gamma(u,v)$ les variables duales associées aux arcs $a = (u,v)$ des contraintes de capacités.

On obtient

$$\begin{aligned}
\text{Min} \sum_{a=(u,v)\in A} & b(a)\gamma(u,v) \\
& \pi(u) - \pi(v) + \gamma(u,v) \geq 0 \quad \forall a = (u,v) \in A, \\
& -\pi(s) + \pi(t) \geq 1, \\
& \pi(u) \lesseqgtr 0 \quad \forall u \in V, \\
& \gamma(u,v) \geq 0 \quad \forall a = (u,v) \in A.
\end{aligned}$$

Etant donnée un flot maximal x^*, c'est-à-dire une solution du primal, on sait déterminer par l'algorithme de Ford-Fulkerson, une s-t-coupe $C^* = \delta^+(W^*)$ de capacité minimale.

Posons alors une solution entière (γ^*, π^*) du dual associée à C^* de la façon suivante :

- $\gamma^*(u, v) = 1$ si $u \in W^*$ et 0 sinon
- $\pi^*(u) = 1$ si $u \notin W^*$ et 0 sinon.

On peut prouver que cette solution (γ^*, π^*) est solution du duale.
Pour cela, on doit considérer les 4 cas possibles de situation d'un arc $a = (u, v)$ dans le graphe par rapport à W^* :
soit $u \in W, v \notin W$; $u \in W, v \in W$, $u \notin W, v \in W$ and $u \notin W, v \notin W$).

Notons que :

- la valeur du dual pour (γ^*, π^*) est de même valeur que la valeur optimale x^* du flot maximal
- le théorème faible de la dualité implique le résultat "toute valeur de flot est inférieure à toute coupe min"
- le théorème de la dualité implique que pour tout flot optimale, il existe une coupe minimal de même valeur
- le théorème des écarts complémentaire prouve que pour tout arc "retour", la valeur d'un flot maximal est nulle.

On s'intéresse à la résolution de problèmes de gestion et d'organisation de projets complexes. La méthode *potentiels-tâches* facilite la gestion de tels projets. Elle utilise un graphe valué orienté, que l'on associe à l'ensemble $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$ de tâches reliées par un ensemble de contraintes de précédence.

Pour le construire, on ajoute deux tâches fictives de durées nulles : une tâche initiale J_0 qui précède toute tâche sans prédécesseur et une tâche terminale J_{n+1} qui est successeur de toute tâche sans successeur. On associe alors un sommet à chaque tâche et un arc à chaque contrainte de précédence : un arc (i, j) est donc créé si J_i doit précéder J_j.

La valeur d'un arc (i, j) représente la durée minimale qui doit s'écouler entre le début de la tâche J_i et le début de la tâche J_j. Un arc d'origine i est donc valué par la durée p_i de J_i.

Quest. Appliquer la méthode potentiels-tâches à la construction d'une maison dont le chantier a été découpé comme suit :

Tâche	Description	Durée (semaines)	Prédécesseur(s)
J_1	terrassement	2	-
J_2	fondations	2	J_1
J_3	canalisations enterrées	1	J_2
J_4	dalle du plancher	3	J_3
J_5	murs porteurs	3	J_4
J_6	portes et fenêtres extérieures	1	J_5
J_7	charpente	1	J_5
J_8	couverture	2	J_7
J_9	isolation	1	J_6, J_8
J_{10}	cloisons et portes	1	J_6, J_8
J_{11}	revêtements extérieurs et volets	2	J_6, J_8
J_{12}	electricité	1	J_9, J_{10}
J_{13}	plomberie	2	J_9, J_{10}
J_{14}	revêtements sols et murs	2	J_{12}, J_{13}
J_{15}	appareillages et équipements	1	J_{14}

Quest. Dessiner le graphe potentiels-tâches associé au chantier.

Quest. Calculer les dates de début au plus tôt (r_i) des tâches. En déduire la durée minimum pour construire la maison.

Quest. On suppose que D est la date de fin au plus tard du chantier. Calculer les dates de début au plus tard des tâches dans le cas $D = r_{16}$.
La marge d'une tâche est la différence entre sa date de début au plus tard et sa date de début au plus tôt : toute date prise dans cet intervalle n'influe pas sur la date de fin total du projet.

Quest. Calculer les marges totales des tâches dans le cas $D = r_{16}$.
Une tâche est dite critique si sa marge est nulle. Un chemin critique est un chemin de J_0 à J_{n+1} qui est composé uniquement de tâches critiques.

Quest. On se place toujours dans le cas $D = r_{16}$. Identifier les tâches et les chemins critiques.

On s'intéresse dans cet exercice à la présentation d'une autre méthode de calcul de chemins critiques appelée méthode PERT dans laquelle on associe au problème un graphe orienté valué pour lequel on recherche des chemins de valeur maximale.

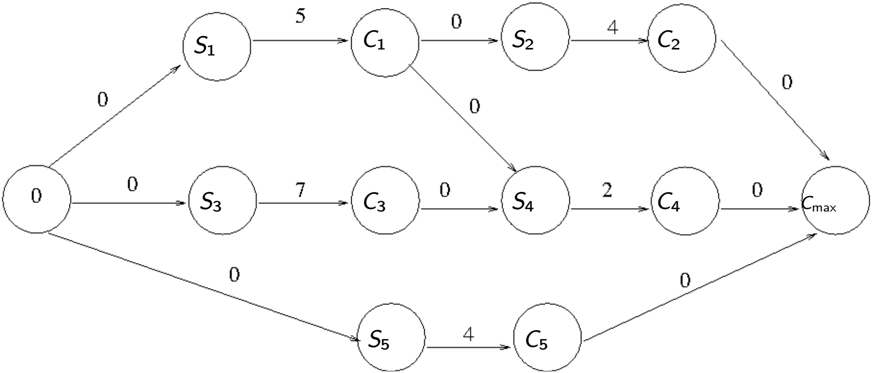
Les sommets du graphe PERT sont des événements identifiés au début (S) et/ou fin (C) de tâche, les arcs représentent des tâches et/ou des contraintes de précédence. La tâche J_i est représentée par l'arc défini entre les événements S_i et C_i.

Si la tâche J_i précède la tâche J_j par exemple, on crée dans le graphe PERT un arc entre l'événement C_i et l'événement S_j.

Un arc associé à une contrainte uniquement est valué par 0 et sera dit fictif.

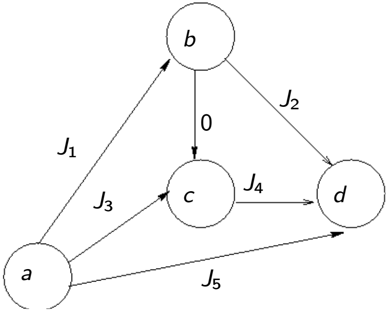
Un arc représentant une tâche J_i sera valué par sa durée p_i.

Quest. Dans le graphe PERT de la figure, combien y-a-t-il de tâches, quelles sont leurs durées et quelles sont les contraintes de précédence ? Déterminer les tâches critiques.



Un inconvénient du graphe PERT par rapport à la méthode potentiels-tâches est de doubler les sommets du graphe car on associe à chaque tâche un événement "début" et un événement "fin". On peut néanmoins obtenir un graphe simplifié à partir du graphe initial en fusionnant des événements élémentaires.

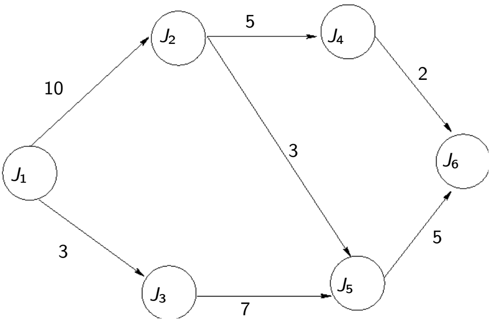
Le graphe simplfié de la figure précédente est représenté ici



Quest. L'événement a est obtenu en fusionnant les événements élémentaieres S_1, S_3, S_5 et l'événement 0. Comment ont-été obtenus les événements b, c et d ?

Quest. Quelle est l'utilité de l'arc fictif (b, c) du graphe PERT simplifié ? Peut-il être supprimé ?

On illustre à travers cet exercice comment le calcul d'un chemin critique dans un graphe PERT se ramène à un problème de flot particulier. Le graphe ci-dessous servira d'exemple.



On considère que le graphe représente un réseau. La durée p_{ij} d'une activité $J_i \rightarrow J_j$ est vue comme le temps nécessaire pour traverser l'arc (J_i, J_j). Le problème de flot que l'on cherche à résoudre est celui du transport d'une unité de flot du sommet origine J_1 au sommet destination J_6 en un temps maximal.

Quest. On note x_{ij} la quantité de flot passant à travers l'arc (J_i, J_j). Par convention une quantité de flot sera positive si elle sort d'un sommet et négative si elle y entre. Exprimer dans le cas général, le problème du calcul d'un chemin critique sous la forme d'un programme linéaire.

Quest. Ecrire le programme linéaire dans le cas de l'exemple.

Quest. Ecrire le dual du programme linéaire obtenu à la question précédente.

Quest. Résoudre le dual sans utiliser l'algorithme du simplexe mais en manipulant les inégalités.

Quest. Appliquer le théorème des écarts complémentaires pour déterminer un chemin critique.