Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 5&6 - Dualité

pierre.fouilhoux@lipn.fr

18 octobre 2020

Définitions

A un PL (P) - que l'on appelle primal (car c'est le premier), on associe un PL (D) appelé dual.

Sous forme "algébrique" :

$$(P)\begin{cases} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \text{Min} & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Sous forme matricielle

$$(P)\begin{cases} \text{Max} & z = c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \boldsymbol{R}^n \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \text{Min} & w = b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \\ & y \in \boldsymbol{R}^m \end{cases}$$

Exemple

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrcrl} \text{Max } z = & -2x_1 & +x_2 & & & \\ & x_1 & +3x_2 & \leq & 10 & \color{red}{\rightarrow y_1} \\ & 3x_1 & -4x_2 & \leq & 8 & \color{red}{\rightarrow y_2} \\ & 5x_1 & +2x_2 & \leq & -4 & \color{red}{\rightarrow y_3} \\ & \multicolumn{2}{l}{x_1, x_2 \geq 0} & & & \end{array}\right.$$

$$(D)\left\{\begin{array}{lrrrcr} \text{Min } w = & 10y_1 & +8y_2 & -4y_3 & & \\ & y_1 & +3y_2 & +5y_3 & \geq & -2 \\ & 3y_1 & -4y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\ & \multicolumn{3}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0} & & \end{array}\right.$$

Les inégalités de (P) correspondent aux variables de (D) : dites **variables duales**.

Les vecteurs x et y n'ont pas la même dimension :
- x est de la dimension n du nombre de variables
- y est de la dimension m du nombre de contraintes

Dual du dual

Dans la définition précédente, on peut note qu'un primal sous forme canonique Max, correspond à un dual sous forme canonique Min.

Lemme

Le dual du dual est le primal.

Preuve : Mettons le PL (D) sous forme canonique Max

$$(D)\left\{\begin{array}{ll} \text{Min} & w = b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad (D)\left\{\begin{array}{ll} \text{Max} & -w = -b^T y \\ & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{array}\right.$$

Le dual de D est donc :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Min} & -c^T x \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$$

On retrouve bien (P). $\square$

Tableau de correspondance

Passage du primal au dual :

Primal (P)	Max	Min	Dual (D)
Contraintes	$\sum a_{ij}x_j = b_i$ $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$	y_i libre $y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$	Variables
Variables	$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ x_j libre	$\sum a_{ij}y_i \geq c_j$ $\sum a_{ij}y_i \leq c_j$ $\sum a_{ij}y_i = c_j$	Contraintes

Par l'expression :
- x libre : cela veut dire que x peut prendre toute les valeurs de $\boldsymbol{R}^n$ (noté $x \lesseqgtr 0$)
- y libre : cela veut dire que y peut prendre toute les valeurs de $\boldsymbol{R}^m$ (noté $y \lesseqgtr 0$)

Exemple

$$
(P)\left\{\begin{array}{llllll}
\text{Max } z = & 7x_1 & & & & \\
& -x_1 & +4x_2 & \geq & 5 & \rightarrow y_1 \\
& & +4x_2 & \leq & 2 & \rightarrow y_2 \\
& 5x_1 & -2x_2 & = & -4 & \rightarrow y_3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}\right.
$$

$$
(D)\left\{\begin{array}{llllll}
\text{Min } w = & 5y_1 & +2y_2 & -4y_3 & & \\
& -y_1 & & +5y_3 & \geq & 7 \\
& 4y_1 & +4t_2 & -2y_3 & \geq & 0 \\
& y_1 \leq 0 & & & & \\
& y_2 \geq 0 & & & & \\
& y_3 \lessgtr 0 & & & &
\end{array}\right.
$$

Borne supérieure

Considérons par exemple le PL (P) suivant

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrrcll}
\text{Max } z = & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & & \\
 & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 & (L_1) \\
 & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 & (L_2) \\
 & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 & (L_3) \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_i \geq 0 \forall i \in \{1,4\}} & & &
\end{array}\right.$$

Essayons de déterminer la meilleure borne supérieure possible
c'est-à-dire la plus petite borne supérieure
de la valeur de la fonction z de (P)
sans chercher à déterminer la solution x optimale.

Remarquons que trouver une borne supérieure à z
c'est aussi trouver une borne supérieure à la valeur optimale z^* de z (et inversement).

Borne supérieure

- en multipliant l'inégalité (L_2) par $\frac{5}{3}$:
  $\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$
  or $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4$
  car $4 \leq \frac{25}{3}$, $1 \leq \frac{5}{3}$, $5 \leq 5$ et $8 \leq \frac{40}{3}$
  donc $z \leq z^* \leq \frac{275}{3}$
- en additionnant (L_2) et (L_3) :
  $5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$
  $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$
  On obtient : $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$
  or $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4$
  Donc $z \leq z^* \leq 58$

Et comme $58 \leq \frac{275}{3}$, on peut imaginer trouver une bonne combinaison linéaire des inégalités fournira une borne intéressante.
Ici, on a combiné les inégalités par $y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3$ avec les coefficients :

- $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{3}$ et $y_3 = 0$
- $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 1$

Borne Supérieure

On peut généraliser l'idée précédente en recherchant la "meilleure" combinaison linéaires des contraintes de (P).

Notons y_1, y_2 et y_3 des coefficients multiplicateurs positifs pour la combinaison

$$y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$$

Nécessairement $y_i \geq 0$ pour pouvoir additionner les inégalités.

$$\begin{aligned} & y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) \\ & \quad + y_2(y_1 + 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) \\ & \quad\quad + y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \quad \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & (y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 \\ & \quad + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \\ & \quad\quad + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 \\ & \quad\quad\quad + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \quad \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Pour que z soit inférieure à $y_1 + 55y_2 + 3y_3$,
il faut que chaque coefficient des x_j soit $\leq$ au coefficient correspondant dans z.

Borne Supérieure

C'est-à-dire que trouver une borne supérieure pour z

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrrrcl} \text{Max } z = & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & \\ & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 \\ & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 \\ & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 4\}} & & \end{array}\right.$$

revient à trouver des valeurs y_1, y_2 et y_3 telles que

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq & 4 \\ -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\ -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq & 3 \\ \multicolumn{3}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0} & & \end{array}\right.$$

car dans ce cas $z \leq y_1 + 55y_2 + 4y_3$

Borne Supérieure

C'est-à-dire que trouver une borne supérieure pour z

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrrrrcl}
\text{Max } z = & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & \\
 & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq & 55 \\
 & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq & 3 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,4\}} & &
\end{array}\right.
$$

Et si on veut trouver la meilleure borne supérieure (i.e. la plus petite), cela revient à résoudre le PL suivant :

$$
(D)\left\{\begin{array}{lrrrcl}
\text{Min } w = & y_1 & +55y_2 & +4y_3 & & \\
 & y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq & 4 \\
 & -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq & 1 \\
 & -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq & 5 \\
 & 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq & 3 \\
 & \multicolumn{3}{l}{y_1, y_2, y_3 \geq 0} & &
\end{array}\right.
$$

C'est le dual !

Théorème faible de la dualité

Pour le couple primal/dual écrit sous forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \text{Min} & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Théorème (Propriété faible de la dualité)

Soit une solution (quelconque) $(x_1, \ldots, x_n)$ réalisable pour le primal (P).
Soit une solution (quelconque) $(y_1, \ldots, y_m)$ réalisable pour le dual (D).
Alors $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Preuve : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ □

Théorème faible de la dualité

Corollaire

Soit une solution (quelconque) $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ réalisable pour le primal (P).
Soit une solution (quelconque) $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ réalisable pour le dual (D).
Si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$, alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont optimaux pour (P) et pour (D).

Preuve : Supposons que $\bar{x}$ ne soit pas maximale pour (P) alors, il existe x^* solution de (P) telle que $\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$. Or, par le théorème précédent, pour x^* et $\bar{y}$ deux solutions de (P) et (D) on a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$.
Comme $\sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j$, on a ainsi $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$, ce qui est absurde. $\square$

Théorème de la dualité

Théorème (Théorème de la dualité)

Si le primal (P) possède une solution optimale x^*,

Alors le dual (D) possède une solution optimale y^* et $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

Preuve : On va exhiber une solution y^* qui soit solution de (D) et telle que $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$. Ainsi, d'après le théorème précédent, on aura l'optimalité de y^*.

On introduit les variables d'écart que l'on note $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Considérons une base de (P) correspondant à la solution optimale x^*
et notons $\bar{c}^*$ le vecteur des coûts réduits des variables x écrit dans cette base, i.e.
L'écriture dans cette base pour la fonction z est donc, pour tout vecteur x :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* + \sum_{j=1}^{n+m} \bar{c}_j^* x_j \quad \text{où } z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

Notons que, comme la solution est optimale, $\bar{c}_j^* \leq 0 \; j = 1, \ldots, n+m$.

Théorème de la dualité

Suite de la preuve : On pose alors $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}^*$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Pour un vecteur x quelconque, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &= z^* + \sum_{j=1}^n \bar{c}_j^* x_j + \sum_{i=1}^n \bar{c}_{n+i}^* x_{n+i} \\ &= z^* + \sum_{j=1}^n \bar{c}_j^* x_j - \sum_{i=1}^n y_i^* x_{n+i} \\ &= z^* + \sum_{j=1}^n \bar{c}_j^* x_j - \sum_{i=1}^n y_i^* (b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \\ &= (z^* - \sum_{i=1}^n b_i y_i^*) + \sum_{j=1}^n (\bar{c}_j^* + \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^*) x_j \end{aligned}$$

Cette dernière écriture est donc vraie pour tout vecteur x.

Pour x égal au vecteur nulle, on obtient : $z^* = \displaystyle\sum_{i=1}^n b_i y_i^*$

Pour x égal au vecteur canonique ε_j, on obtient $c_j = \bar{c}_j^* + \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^*$, $j = 1, \ldots, m$.

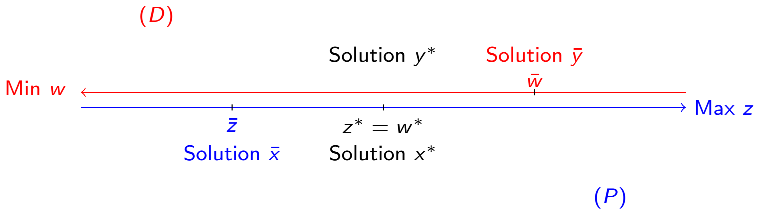
Or pour $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{c}_j^* \leq 0$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^* \geq c_j$
et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{c}_{n+i}^* j \leq 0$, d'où $y_j^* \geq 0$.
Par conséquent, y^* est solution de (D) avec $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$. $\square$

Tableau des cas possibles entre primal et dual

Le tableau suivant est directement issu du théorème faible de la dualité.
Il décrit les cas possibles du dual suivant la nature du primal (et inversement).

		Dual (D)		
		Optimum fini	Non borné	Vide
Primal (P)	Optimum fini	Possible	Impossible	Impossible
	Non borné	Impossible	Impossible	Possible
	Vide	Impossible	Possible	Possible

Cet axe retranscrit également la nature des rapports primal/dual.



Coûts réduits et valeurs duales

Corollaire (Coûts réduits et valeurs duales)

Soit x^* une solution optimale du le primal (P) écrit sous forme standard avec les variables d'écart numérotée $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$.
Soit $(\bar{c}_j^*)_{j \in \{1,\ldots,n+m}$ les coûts réduits dans l'écriture de la base optimale de (P).
Si l'on pose pour $i = 1, \ldots, m$

- *en Maximisation, $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}^*$*
- *en Minimisation, $y_i^* = +\bar{c}_{n+i}^*$*

alors y^* est une solution optimale de (D).

En français :
"la solution optimale du dual est égale (au signe près) à la valeur des coûts réduits optimaux du primal."

Preuve : Ce résultat est un corollaire de la preuve du thèorème de la dualité faible. En effet, au cœur de la preuve, on a utilisé et prouvé le résultat suivant pour une Maximisation (en minimisation, la preuve est similaire). □

Coûts réduits/marginaux

Théorème (Analyse de sensibilité)

Si le primal (P) possède au moins une solution de base non dégénérée optimale de valeur z^*
Notons y^* une solution optimale du duale (D).
alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $t \in \mathbb{R}^m$ avec $|t_i| \leq \epsilon$, le PL (P')

$$(P')\left\{\begin{array}{ll} Max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array}\right.$$

possède une solution optimale de valeur $z^* + \sum_{i=1}^{n} y_i^* t_i$.

Preuve : Ce résultat découle directement de l'égalité des fonctions objectifs du primal et du dual.
Sur un intervalle où y^* reste solution, la solution optimale est
$\sum_{i=1}^{m}(b_i + t_i)y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^* = z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$. □

Coûts réduits/marginaux

De part le théorème précédent, pour une augmentation de $t_i = 1$ sur l'inégalité i, l'augmentation de z^* sera de y_i^* sous les conditions d'intervalles de taille ϵ.

On interprête en économie les valeurs duales optimales y_i^*, les coûts marginaux (en anglais, shadow price) car il désignent l'augmentation de l'objectif "à la marge" i.e. augmentation unitaire d'une borne d'une contrainte.

De part l'égalité au signe prêt entre les coûts réduits et les coûts marginaux, on utilise souvent l'un ou l'autre pour les désigner.

Notons que si y^* n'est plus solution quand on augmente trop le vecteur b, alors on ne peut plus appliquer la formule (il faut refaire des itérations du simplexe etc) : toutefois ces coûts marginaux indiquent la **tendance** économique indiquant où prévoir des ajustements ou des améliorations d'un modèle économique.

Théorème des écarts complémentaires (TEC)

Théorème (Théorème des écarts complémentaires)

Soit $\bar{x}$ une solution réalisable du primal (P)
et $\bar{y}$ une solution réalisable du dual (D).
Il a équivalence entre les deux items

i) $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *optimaux pour* (P) *et pour* (D)

ii) $$\begin{cases} \bullet \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i = c_j \quad \textit{ou} \quad \bar{x}_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \bullet \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = b_i \quad \textit{ou} \quad \bar{y}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Une inégalité est dite serrée pour un vecteur donné si ce vecteur la vérifie à l'égalité.

L'item ii) peut se lire ainsi :

- soit l'inégalité j de (D) est serrée, soit $\bar{x}_j$ est nul, soit les deux
- soit l'inégalité i de (P) est serrée, soit $\bar{y}_i$ est nul, soit les deux

Théorème des écarts complémentaires

Preuve : Rappelons la ligne prouvant le théroème faible de la dualité :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j)y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i$$

Par le théorème de la dualité, si $\sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i$ alors l'item i) est vérifié.

Or cette égalité est vérifiée
si et seulement si les deux "$\leq$" peuvent être remplacés par des "$=$"
c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} \bullet \ \sum_{j=1}^{n} c_j\bar{x}_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j \\ \bullet \ \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j)y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i\bar{y}_i \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \bullet \ \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i - c_j)\bar{x}_j = 0 \\ \bullet \ \sum_{i=1}^{m}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j)y_i = 0 \end{cases}$$

Remarquons que ces deux sommes sont des sommes de termes positifs ou nuls (par définitions de (P) et (D)).
Donc il y a égalité si et seulement si chacun des termes des 2 sommes sont nuls.
C'est-à-dire très exactement l'item ii) du théorème. $\square$

Corollaoire du TEC

Ce corollaire du TEC permet, à partir d'une solution $\bar{x}$ de (P) de tester si $\bar{x}$ est optimale.

Théorème (Théorème des écarts complémentaires)

Soit $\bar{x}$ une solution réalisable du primal (P).
Considérons le système d'inégalités linéaires suivant dont on note $y \in \mathbb{R}^m$ les inconnues :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j & \text{si } \bar{x}_j > 0 \qquad \text{avec } j = 1, \dots, n \\ y_i = 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j < b_i \quad \text{avec } i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Si ce système admet une solution, notée $\bar{y}$
et si $\bar{y}$ est solution du dual (D)
Alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont optimaux pour (P) et (D).

Interprétation économique

Problème de production

$$(P)\begin{cases} \text{Max} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \text{Min} \quad w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ y_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Imaginons que

- (P) modélise une entreprise (P) désirant maximiser son profit
- x_j est la quantité à produire du produit j
- c_j est le profit net unitaire associé au produit j en "euro/unité de produit"
- b_i est la quantité de ressources i disponible pour la ressource i
- a_{ij} est la quantité de ressource nécessaire pour fabriquer 1 unité du produit j

On peut en voir par analyse des "unités de mesures" que

- y_i est en "euro/unité de ressource", c'est-à-dire la quantité de profit pour une unité de ressource i

Interprétation économique

Problème du rachat des ressources

$$(P)\begin{cases} \text{Max} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ x_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \text{Min} \quad w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ y_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Imaginons qu'il existe une autre entreprise (D) qui propose de racheter les ressources de l'entreprise (P) de production précédente.
Cette entreprise (D) veut savoir à quel prix au minimum elle pourrait réaliser cet achat en connaissant les profits de (P).

- y_i sera le prix unitaire (par ressource) qui pourrait être proposé
- l'objectif de (D) est de proposer la somme la plus basse possible pour racheter les ressources
- les $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i$ représente pour (P), le gain obtenu à revendre ses ressources plutot que produire une unité de produit j
- or (P) ne peut envisager la revente de ses ressources que si, pour chaque unité de produit j, le prix qu'elle recevrait de (D) soit supérieur ou égal au profit qu'elle peut obtenir en produisant, i.e. c_j : on retrouve les inégalités du dual.

Interprétation économique

Dans le contexte de cette interprétation de :

- (P) comme une entreprise de production
- (D) comme une entreprise désirant acheter les ressources de (P)

Les théorèmes nous disent :

- **théorème de la dualité :** le profit maximal net de (P) est le prix minimale possible d'achat des ressources : le Primal et le Dual sont le même problème d'optimisation
- **coûts marginaux :** la valeur optimale de la variable duale y_i^* est égale au coût réduit optimal $-\bar{c}_{n+I}^*$ de l'inégalité correspondante : le coût marginal de la ressource i est le gain possible lors de l'achat par (P) d'une unité supplémentaire de ressource i
- **TEC :** si l'inégalité de la ressource i n'est pas serrée, cela veut dire que la ressource i est en quantité supérieure aux besoins de la production x^* : le coût marginal y_i^* est nul
- plus généralement le coût marginal y_i^* interpréte la part du profit total de production qui est issue de la ressource i : une ressource rare/critique sera plus chère qu'une ressource en quantité suffisante/non-critique