Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 4 - Algorithme du simplexe (3)

pierre.fouilhoux@lipn.fr

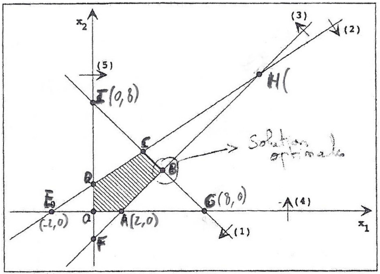
27 septembre 2020

Questions

Base dégénérée

Dans le PL suivant à 2 variables, une base candidate est définie par l'annulation de 2 variables hors-base, i.e. l'intersection de 2 droites parmi les 6 du PL.

$$
\begin{cases}
\max\ z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & & \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (1) \\
& -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 & (2) \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (3) \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 & (6) \\
& x_1 & & & \geq & 0 & (5) \\
& & & x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{cases}
$$



Or ici les 3 inégalités (1), (3) et (6) se coupent en un même point A(2,0).

Cela revient à remarquer que les bases
- $B_1 = \{x_1, e_2, e_3, e_4\}$, hors-base : $\{x_2, e_1\}$
- $B_2 = \{x_1, e_1, e_2, e_3\}$, hors-base : $\{x_2, e_4\}$
- $B_3 = \{x_1, x_2, e_1, e_3\}$, hors-base : $\{e_2, e_4\}$

correspondent à la même solution $s = (2, 0, 6, 10, 0)$ de même valeur $z = 12$.

On appelle une base dégénérée une base B est telle que sa solution associée possède au moins une composante nulle.

Cyclage

Lors des itérations de l'algorithme du simplexe, une opération de pivot peut atteindre une base dégénérée, et le pivot suivant passer à une nouvelle base correspondant à la même solution.
Ce deuxième pivot est alors dit dégénéré : il change de base mais reste sur la même solution.

Dans la preuve de l'algorithme du simplexe, la terminaison n'est assurée que si l'on améliore strictement la valeur des solutions à chaque pivot...

Or on peut avoir dans certains cas, plusieurs pivots successifs qui ramènent à la base dégénérée initiale... une boucle sans fin : on parle de cyclage.

Si la dégénérescence est fréquente, le cyclage se produit rarement : mais s'il se produit, l'algorithme ne se termine pas.

Eviter le cyclage

Plusieurs méthodes ont été conçues pour éviter le cyclage.

La méthode des perturbations
Elle consiste à modifier de manière infinitésimale le vecteur de droite b.
Par exemple $b'_j = b_j + epsilon^j$ avec $\epsilon > 0$ très petit.
Une telle formule entraîne des sommets du polyèdre de définitions uniquement à l'intersection de n inégalités et non davantage.

(Il est à noter qu'avec les approximations numériques dûes aux nombreuses divisions réalisées pendant l'algorithme, cet ajout epsilonesque est pratiquement théorique.)

Eviter le cyclage

Une méthode plus formelle pour éviter le cyclage :

La règle de Bland : c'est une règle lexicographique qui impose le choix des variables entrantes et sortantes :

- Choix de la variable hors-base entrante (parmi les variables hors-base de coûts réduits strictement positifs)
  celle de plus petit indice
- Choix de la variable de base sortante (parmi celles possibles pour le pivot).
  celle de plus petit indice

On peut prouver que la règle de Bland empêche le cyclage.

Idée de la preuve : s'il y a cyclage, une variable x_t qui sort à une itération, doit ré-entrer à une itération ultérieure. Or toutes ces itérations conservent la valeur z. En s'appuyant sur cette remarque et la règle lexicographique, on peut prouver l'existence d'une variable qui serait d'indice strictement inférieur à la précédente et qui aurait dû lui être préférée, une contradiction.

Base des variables d'écart réalisable ou non ?

Pour un PL (P) écrit sous forme canonique Max

$$\begin{array}{lll}
\text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\
& x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \ldots, n\}.
\end{array}$$

si b n'est pas un vecteur positif ou nul, i.e. $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $b_i < 0$
on ne peut pas utiliser la base des variables d'écarts (en effet, elle est bien primale mais non réalisable).

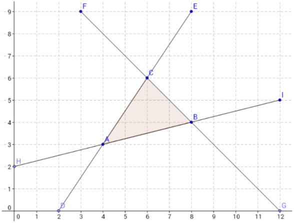
Ainsi, on ne peut pas appliquer directement l'algorithme du simplexe présenté jusqu'ici.

On doit utiliser une première étape d'initialisation appelée Phase I.
Ainsi l'algorithme du simplexe présenté jusqu'ici s'appelle *Phase II*.

Interprétation géométrique

- Prenons par exemple ce PL à deux variables

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & \geq 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$



$\rightarrow$ Le point origine O(0,0) n'est pas dans le polyèdre de définitions.

- Si on passe à la forme standard en ajoutant les variables d'écart.

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & x_1 & +2x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & +e_1 & = 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -e_2 & = 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & -e_3 & = 8 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

Le dictionnaire de la base initiale :

$$\begin{array}{llll} e_1 = & 12 & -x_1 & -x_2 \\ e_2 = & -6 & +3x_1 & -2x_2 \\ e_3 = & -8 & -x_1 & +4x_2 \\ z = & 0 & +x_1 & +2x_2 \end{array}$$

$\rightarrow$ La base des variables d'écart n'est pas réalisable.

Programme Linéaire Auxiliaire

On considère alors le Programme Linéaire Auxiliaire (P_a) suivant.
Notons $I \subset \{1 \ldots, m\}$ l'ensemble des indices d'inégalités où $b_i < 0$.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + e_i - \alpha_i \quad = b_i & \forall i \in I \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + e_i \quad = b_i & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} & \\
& e_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, m\} & \\
& \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, m\} &
\end{array}
$$

où $(\alpha_i)_{i \in I}$ sont des variables auxiliaires.

Programme Linéaire Auxiliaire

Remarquons que les 3 propositions suivantes sont équivalentes

i) Le PL (P) possède (au moins) une solution réalisable

ii) Le PL (P_a) possède une solution $s_0 = (x, e, \alpha)$ où $\alpha_i = 0$, $\forall i \in I$

iii) Le PL (P_a) admet pour solution optimale
une solution $s_0 = (x, e, \alpha)$ où $\alpha_i = 0$, $\forall i \in I$

Ainsi
(P) a un domaine de définition non vide
si et seulement si
(P_a) a une solution de valeur optimale nulle.

Phase I de l'algorithme du simplexe

La phase I de l'algorithme du simplexe est en fait la phase II appliquée au PL (P_a).

Remarques issues de la construction de (P_a)

- (P_a) possède $n + m + |I|$ variables pour m inégalités non triviales
- La base définie par les variables $(e_i)_{i \in \{1,\dots,m\} \setminus I}$ et $(\alpha_i)_{i \in I}$ est primale et réalisable pour (P_a)

Ainsi la phase I a toujours une solution initiale !

Exemple

Reprenons l'exemple à 2 variables

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & \geq 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Sa forme standard est :

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & x_1 & +2x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & +e_1 & = 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -e_2 & = 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & -e_3 & = 8 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 & & & \end{array}$$

Le PL auxiliaire est :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & \alpha_2 & +\alpha_3 & & & \\ & x_1 & +x_2 & +e_1 & & = 12 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -e_2 & +\alpha_2 & = 6 \\ & -x_1 & +4x_2 & -e_3 & +\alpha_3 & = 8 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Dictionnaire de la base $\{e_1, \alpha_2, \alpha_3\}$:

$$\begin{array}{llllll} e_1 = & 12 & -x_1 & -x_2 & & \\ \alpha_2 = & 6 & -3x_1 & +2x_2 & +e_2 & \\ \alpha_3 = & 8 & +x_1 & -4x_2 & & +e_3 \\ z_a = & 0 & +\alpha_1 & +\alpha_2 & & \end{array}$$

Itération de la phase I sur l'exemple

Ainsi la base base $\{e_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ est bien réalisable (et primale).

$$\begin{array}{llllll} e_1 = & 12 & -x_1 & -x_2 & & \\ \alpha_2 = & 6 & -3x_1 & +2x_2 & +e_2 & \\ \alpha_3 = & 8 & +x_1 & -4x_2 & & +e_3 \\ z_a = & 0 & +\alpha_1 & +\alpha_2 & & \end{array}$$

Sa fonction z_a est à minimiser pour annuler α_2 et α_3.
Il faut exprimer z_a en fonction des variables hors-base $\{x_1, x_2, e_2, e_3\}$.

On l'obtient pas identification :
$z_a = 0 + (6 - 3x_1 + 2x_2 + e_2) + (8 + x_1 - 4x_2 + e_3)$
$z_a = 14 - 2x_1 - 2x_2 + e_2 + e_3$

On est en minimisation et les coûts réduits de x_1 et x_2 ne sont pas positifs ou nuls.
Cette base n'est pas optimale.

Itération de la phase I sur l'exemple

On choisit x_1 pour entrer en base (plus petit coefficient).
L'inégalité 2 est la plus contraignante quand x_1 augmente : α_2 sort de base.

Dictionnaire de la base $\{x_1, e_1, \alpha_3\}$:

$$\begin{array}{llllll}
x_1 = & 2 & +\frac{2}{3}x_2 & +\frac{1}{3}e_2 & & -\frac{1}{3}\alpha_2 \\
e_1 = & 10 & -\frac{5}{3}x_2 & -\frac{1}{3}e_2 & +\frac{1}{3}\alpha_2 & \\
\alpha_3 = & 10 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{1}{3}e_2 & +e_3 & -\frac{1}{3}\alpha_2 \\
z_a = & 10 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{1}{3}e_2 & +e_3 & +\frac{2}{3}\alpha_2
\end{array}$$

Coût réduit de x_2 non positif ou nul : non optimal.

Itération de la phase I sur l'exemple

x_2 entre en base.
L'inégalité 3 est la plus contraignante quand x_1 augmente : α_3 sort de base.

Dictionnaire de la base $\{x_1, x_2, e_1\}$:

$$\begin{array}{lllllll}
x_2 = & 3 & +\frac{1}{10}e_2 & +\frac{3}{10}e_3 & -\frac{1}{10}\alpha_2 & -\frac{3}{10}\alpha_3 & \\
x_1 = & 4 & +\frac{2}{5}e_2 & +\frac{1}{5}e_3 & & -\frac{2}{5}\alpha_2 & -\frac{1}{5}\alpha_3 \\
e_1 = & 5 & -\frac{1}{2}e_2 & -\frac{1}{2}e_3 & +\frac{1}{3}\alpha_2 & & \\
z_a = & 0 & & & +\alpha_2 + \alpha_3 & &
\end{array}$$

(Remarque : l'expression de z_a dans une base où α_2 et α_3 sont hors-base était connu au départ).

Ici les coûts réduits sont tous positifs ou nuls : la base est minimale.

Comme la solution optimale vaut 0, la phase I se termine en disant qu'il existe une solution réalisable pour le PL initial.

Passage à la phase II

On a vu que la base $\{x_1, x_2, e_1\}$ est réalisable pour (P_a)
et elle est réalisable pour le PL d'origine.

Comme les variables auxiliaires $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, on peut les gommer du dictionnaire précédent.
On obtient alors un dictionnaire réalisable pour le PL d'orgine.

$$\begin{array}{rcccc} x_2 = & 3 & +\frac{1}{10}e_2 & +\frac{3}{10}e_3 \\ x_1 = & 4 & +\frac{2}{5}e_2 & +\frac{1}{5}e_3 \\ e_1 = & 5 & -\frac{1}{2}e_2 & -\frac{1}{2}e_3 \end{array}$$

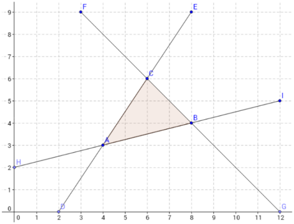
Il faut écrire la fonction objective z en fonction des variables hors-base du PL d'origine : e_2 et e_3.
$\mathrm{Max}\ z = x_1 + 2x_2 = 10 + \frac{3}{5}e_2 + \frac{4}{5}e_3$

Passage à la phase II

Le dictionnaire associé à la base $\{x_1, x_2, e_1\}$ pour le PL d'origine

$$\begin{array}{llll} x_2 = & 3 & +\frac{1}{10}e_2 & +\frac{3}{10}e_3 \\ x_1 = & 4 & +\frac{2}{5}e_2 & +\frac{1}{5}e_3 \\ e_1 = & 5 & -\frac{1}{2}e_2 & -\frac{1}{2}e_3 \\ z = & 10 & +\frac{3}{5}e_2 & +\frac{4}{5}e_3 \end{array}$$

correspond à au point A(4,3) de la figure.



En maximimisation, la base n'est pas optimale avec des coûts réduits non négatives ou nuls.

La phase II commence en faisant entrer e_2 ou e_3 en base
... etc.

Schéma de l'algorithme complet du simplexe

1. Ecrire le PL (P) sous forme standard avec les variables d'écart
2. Si la base des variables d'écart est réalisable :
   aller en 4 avec ce dictionnaire initial
3. Sinon, on exécute la Phase I :
   - Ecrire le PL auxiliaire (P_a) avec les variables auxilaires
   - Résoudre (P_a) par la phase II
     qui mène nécessairement à une solution minimale
   - Si (P_a) a une solution minimale strictement négative :
     alors (P) a un domaine de définitions vide : STOP
   - Sinon, on obtient une base primale réalisable pour (P_a) où les variables auxiliaires sont hors-bases
   - Le dictionnaire associée en gommant les variables auxiliaires est un dictionnaire initiale pour la phase II.
4. Exécuter la phase II à partir du dictionnaire initial
   soit la phase II prouve que (P) est non borné.
   soit elle fournit une solution optimale pour (P)