Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 2 - Algorithme du simplexe (1)

pierre.fouilhoux@lipn.fr

4 octobre 2020

Polyèdre

On considère l'espace de $\mathbb{R}^n$ à n dimensions.
Il contient tous les **points** de l'espace définis par les coordonnées $\tilde{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

Dans $\boldsymbol{R}^n$, on appelle **hyperplan** H un sous-espace de $\boldsymbol{R}^n$ défini comme l'ensemble des points vérifiant une *équation linéaire* :
c'est-à-dire qu'il existe $a_1, ..., a_n, b \in R$ tels que $H = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}$.

On appelle **demi-espace** D de $\mathbb{R}^n$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ définit comme l'ensemble des points vérifiant une *inégalité linéaire* :
c'est-à-dire qu'il existe $a_1, ..., a_n, b \in R$ tels que $D = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b\}$.

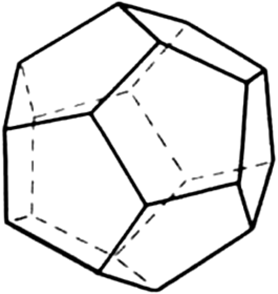
Polyèdre

Un **polyèdre** $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est l'ensemble des points vérifiant un système fini d'inégalités linéaires, i.e.,

$$P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

où A est une matrice $m \times n$ (m et n entiers positifs) et $b \in \boldsymbol{R}^m$.
On dit alors que le système $Ax \leq b$ **définit** ou **caractérise** le polyèdre P.
Ainsi, un polyèdre est une figure géométrique dans $\mathbb{R}^n$ définie
- comme une intersection fini de demi-espace
- comme une partie de l'espace délimitée par des hyperplans.

En dimension 1 : les hyperplans sont des points
les polyèdres sont des intervalles.
En dimension 2 : les hyperplans sont des droites
les polyèdres sont des polygones
En dimension 3 : les hyperplans sont des plans
les polyèdres sont des cubes,...
des dodécaèdres comme celui-ci



Polyèdre ouvert et polytope

L'intersection d'un polyèdre et d'un hyperplan quelconque est appelée une **face** du polyèdre.

L'intersection d'un polydère et d'un hyperplan correspondant à une inégalité de sa caractérisation est appelée une **facette** du polyèdre.

Un **polytope** est un polyèdre borné, c'est-à-dire qu'un polyèdre $P \subseteq \boldsymbol{R}^n$ est un polytope s'il existe $x^1, x^2 \in \boldsymbol{R}^n$ tel que $x^1 \leq x \leq x^2$, pour tout $x \in P$.

Un **polyèdre non-borné** sera ainsi ouvert dans une direction du plan : on peut se déplacer dans cette direction sans jamais être borné dans son déplacement.

Points extrêmes

Un **point d'un polyèdre** est défini par des coordonnées $\tilde{x} \in \boldsymbol{R}^n$ telles que $A\tilde{x} \leq b$.

Un point x d'un polyèdre P est dit **point extrême** (ou parfois *sommet*) (vertex) de P s'il n'existe pas deux points x^1 et x^2 de P, $x^1 \neq x^2$, telles que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

En d'autre terme, un point extrême de P est un point de P qui n'est pas le milieu d'un segment contenu dans P.

Théorème

Un point $\tilde{x}$ d'un polyèdre P est un point extrême de P
si et seulement
on peut produire n inégalités de la matrice A qui sont vérifiées par $\tilde{x}$ à l'égalité **et** *qui sont linéairement indépendantes.*

Donc un point extrême d'un polyèdre vérifie à l'égalitié n inégalités de A (dont les vecteurs sont linéairement indépendants) :
c'est un **point d'intersection** de n hyperplans

Programme linéaire et polyèdre

Considèrons un programme linéaire sous sa forme canonique

$$\begin{cases} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.c.} & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \text{Max} & z = c^T x \\ \text{s.c.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

On peut l'interpréter sous un aspect géométrique :

L'ensemble des points $P = \left\{ \tilde{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \right\}$ est un polyèdre.

On l'appelle **le domaine de définition** du programme linéaire.

Programme linéaire et polyèdre

On peut noter qu'un domaine de définition peut être :

- **vide :**
  dans ce cas, il n'y a pas de points dans le polyèdre
- **un polyèdre ouvert :**
  dans ce cas, il y a des points, mais peut-être pas de points optimale :
  cela dépend de la direction d'optimisation définie par les valeurs des coefficients c_j et le sens d'optimisation Max ou Min.
- **un polytope (polyèdre borné) :**
  dans ce cas, il y a un point optimale, quelles que soient leurs valeurs des coefficients c_j

Cas à 2 dimensions

Pour un PL à 2 variables, on peut représenter l'espace des solutions dans un repère où l'axe des abscisses correspond à la variable x_1 et l'axe des ordonnées à la variable x_2.

Les hyperplans sont des droites.
Un polyèdre P est l'intersection des demi-espaces définit par les hyperplans.

Les points extrêmes de ce polyèdre sont les points du polyèdre qui sont à l'intersection de 2 droites (donc non parallèles).

Le cas d'un polyèdre vide :
   l'intersection des demi-espace est vide.
Le cas d'un polyèdre ouvert :
   dans une direction, il n'y a pas d'hyperplan qui borne le polyèdre
Le cas d'un polytope :
   le polygone est fermé dans toutes les directions par des hyperplans.

Représentations géométriques des solutions

On devrait appeler **solution** du programme linéaire uniquement un point correspondant à une valeur optimale du PL.
Cependant, on l'appelle plutot **solution optimale**.

Un point $\tilde{x}$ du polyèdre de définition est souvent appelé **solution réalisable** et un point en-dehors du polyèdre est parfois appelé une **solution non-réalisable**.

Un point $\tilde{x} \in P$ est appelé **point intérieur** de P s'il existe au moins une inégalité du système $A\tilde{x} \leq b$ qui ne sont pas vérifiées à l'égalité par $\tilde{x}$.

Une remarque fondamentale est que :

- un point intérieur n'est jamais solution optimale :
  car la fonction à optimiser est linéaire
- les solutions optimales sont donc uniquement sur un des hyperplans définissant le polyèdre P
- si le PL admet une solution optimale, il y a toujours une solution optimale parmi les points extrêmes de P.

On peut donc conclure qu'il est suffisant de considérer les points extrêmes de P.

Un exemple en 2 dimensions

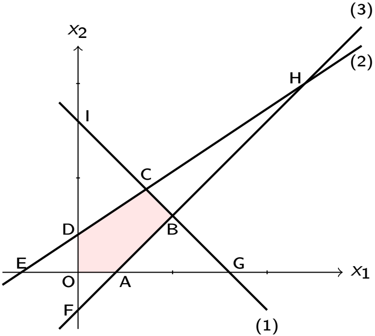
On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (1) \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 & (2) \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (3) \\ & x_1 & & & \geq & 0 & (0x_2) \\ & & & x_2 & \geq & 0 & (0x_1) \end{cases}$$

Représentons graphiquement ce programme linéaire.

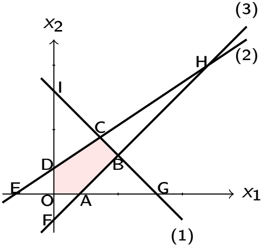
En représentant la pente des droites d'équation $z = 6x_1 + 5x_2$, on peut voir que le point d'intersection B entre les droites (1) et (3) est le point optimal...

Mais cela dépend de la qualité du schéma : on peut voir à tort que c'est le point C d'intersection entre les droites (1) et (2).



Un exemple en 2 dimensions

On a vu qu'on peut toujours, s'il existe une solution optimale, la rechercher parmi les intersections entre les droites correspondant aux inégalités du système.



Une idée :
énumérer toutes les intersections entre 2 droites

On a 3 inégalités non-triviales et 2 triviales : donc 5 droites qui peuvent se croiser deux à deux : cela donne $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$ points d'intersections possibles.

On repère facilement les corrdonnées des points

0(0,0), A(2,0), D(0,2), E(-3,0), F(0,-2), G(8,0) et I(0,8).

En résolvant les systèmes pour les points B, C, G et H on trouve

B(5,3), C($\frac{18}{5}$, $\frac{22}{5}$), G(12,10) et H=(12,10)

Parmi ces 10 points, on trouve seulement 0, A, B, C, D réalisables (car dans le polyèdre du domaine de définition).
Or O rapporte 0, A rapporte 12, B rapporte 45, C rapporte 43,6 et D rapporte 15.
Le point optimal est donc B(5,3) avec 45.

Enumération ?

Cet exemple donne un algorithme d'énumération valide pour la programmation linéaire à n variables et m inégalités.

Un point potentiellement solution est un point solution de n inégalités parmi les $n+m$ inégalités triviales ou non triviales :
cela donne un nombre de points potentiels

$$C_{n+m}^{n} = \frac{(n+m)!}{n!(n+m-n)!} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

On obtient les coordonnées de chacun de ces points en $O(n^3)$ en résolvant le systèmes des n inégalités de l'intersection (par pivot de Gauss par exemple).
On vérifie si un point est dans le domaine de définition en testant s'il vérifie les m inégalité restantes : test en $O(nm)$.
Puis on teste s'il est meilleur que le meilleur point rencontré jusqu'ici dans l'énumération (calcul de z en $O(n)$).

Cet algorithme est donc en $\theta(C_{n+m}^{n}(n^3+nm))$: c'est largement exponentiel !
C'est inutilisable en pratique.

Forme standard

$$(P) \begin{cases} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.c. & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ \leq b_i \ \forall i \\ & x_j \ \geq 0 \ \forall j \end{cases} \quad \rightarrow \quad (P') \begin{cases} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ s.c. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & +e_i & = b_i \ \forall i \\ & x_j & & \geq 0 \ \forall j \\ & & e_i & \geq 0 \ \forall i \end{cases}$$

Remarques :

- On introduit autant de variables d'écart e_i que d'inégalités non-triviales (autres que les inégalités de positivité).
- La forme standard (P') contient $n + m$ variables :
  n variables initiales et m variables d'écart.
- La forme standard ne contient que des égalités et uniquement des variables positives.
- Les variables d'écart e_i ont un coût nul dans la fonction objective.

Forme standard

En ajoutant les variables d'écart et en transformant les inégalités en égalité,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \ \forall i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + e_i = b_i \qquad e_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i \ \forall i \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - e_i = b_i \qquad e_i \geq 0$$

on conserve exactement le même problème.

Forme standard et solutions

- Une inégalité $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i$ de (P) est saturée par les variables $x_1, \ldots, x_n$ ssi la variable d'écart e_i de (P') est nulle

- Un point extrême du domaine de définition de (P)
  correspond à l'intersection de n inégalités de (P)
  (y compris des inégalités de positivité)
  c'est exactement dire qu'il
  correspond à l'annulation de n variables de (P')
  (variables initiales ou variables d'écart).

Forme standard et solutions

Forme canonique :

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 16 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

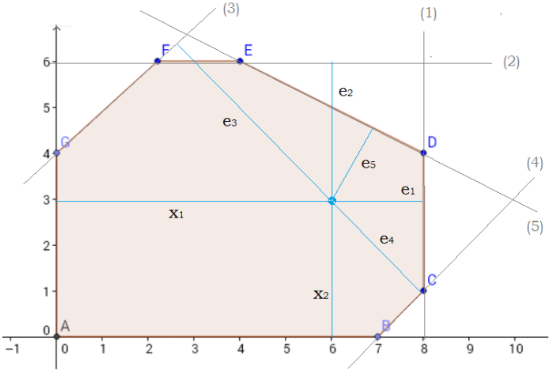
Forme standard :

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\mathcal{P}'\left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & & +e_1 & & & & & = & 8 \\ & +x_2 & & +e_2 & & & & = & 6 \\ -x_1 & +x_2 & & & +e_3 & & & = & 4 \\ x_1 & -x_2 & & & & +e_4 & & = & 7 \\ x_1 & +2x_2 & & & & & +e_5 & = & 16 \end{array}\right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0, e_5 \geq 0$$

Forme standard et solutions



Forme standard et solutions

Problème $\mathcal{P}$: n variables, m ineq. linéaires indépendantes, sol $x \in \mathbb{R}^n$
Problème $\mathcal{P}'$: $n+m$ variables, m éq. linéaires indépendantes sol $x' \in \mathbb{R}^{n+m}$

Pour passer de x à x' il suffit d'exprimer les variables d'écarts en fonction des variables de décision :

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - x_1 \\ e_2 & = & 6 - x_2 \\ e_3 & = & 4 + x_1 - x_2 \\ e_4 & = & 7 - x_1 + x_2 \\ e_5 & = & 16 - x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Ainsi on a les correspondances suivantes :

- $x = (6,3) \rightarrow x' = (6,3,2,0,7,4,4)$ solution réalisable
- $x = (6,6) \rightarrow x' = (6,6,2,0,4,7,-2)$ solution non réalisable
- $x = (2,6) \rightarrow x' = (2,6,6,0,0,11,2)$ sommet réalisable
- $x = (8,6) \rightarrow x' = (8,6,0,0,6,5,-4)$ sommet non réalisable

Base-candidate

Dans un PL ecrit sous forme standard

$$(P) \begin{cases} \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ s.c. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = b_i & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j & \geq 0 & \forall j \in \{1, \ldots, n+m\} \end{cases}$$

Les variables d'écart e_i sont ici renommées x_{n+i} pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$

- Une base-candidate correspond au choix de m indices $j_1, \ldots, j_m$ de variables parmi les $n + m$ variables
- Les variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ sont dites variables de base
- Les autres variables sont dites hors-base

Base-candidate et solution

Soit B une base-candidate.

On considère le système linéaire à m inégalités et m variables obtenu en annulant les n variables hors-base

$$(P) \quad \text{tel que } x_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n+m\} \setminus B$$

Définitions :

- B est une base si ce système admet une solution unique (c'est-à-dire si les inégalités définissant le système sont linéairement indépendantes)
- on note alors x^B cette solution que l'on nomme solution de base
- si, de plus, cette solution est réalisable pour le polyèdre, on dit que B est une base réalisable.

Exemple : Prendre des bases au hasard dans le PL de l'exemple précédent et indiquer si elles sont bases et/ou bases réalisables.

Interprétation géométrique

Une base candidate correspond à l'intersection de n faces du polyèdres.

Si les inégalités se coupent en un unique point, la base candidate est une base.

Si le point est dans le polyèdre : c'est un point extrême du polyèdre : il est une solution potentielle.

Ecriture dictionnaire

Par définition, pour une base B donnée, on peut écrire les m variables de base en fonction des n autres.

On appelle écriture dictionnaire le fait :

- d'écrire m égalités où à chaque ligne, on ait une des m variables de base exprimées en fonctions des n variables hors-bases.
- d'exprimer la fonction objective z en fonction des variables hors-bases.

Un dictionnaire est donc associée à une base.

La **solution de base** x^B s'obtient en mettant à zéro les variables hors-base.

Coûts réduits et Critère d'optimalité

Etant donné un dictionnaire pour une base B donnée,
on appelle coûts réduits les "coefficients des variables"
dans la fonction objectif z écrit en base B.

On note $\bar{c}_j$ le coût réduit de x_j, $j \in \{1, \dots, n+m\}$
Notons que le coût réduit d'une variable en base est par définition nul : $\bar{c}_i = 0$, $\forall j \in B$.

Théorème (Critère d'optimalité)

Si pour une base B, les coûts réduits sont tous :

- *En Maximization : négatifs ou nuls*
- *En Minimization : positifs ou nuls*

alors la solution associée à la base est optimale.

Ce théorème sera démontré au cours suivant.

Pivot

On appelle opération de pivot la suite d'opérations suivantes :
Elle s'applique à une base réalisable (non optimale).

- Choisir une variable qui va entrer en base parmi les variables hors-base : la *variable entrante* :
  En maximisation : on choisit une variable hors-base de coefficient positif ou nul dans la fonction objective
  En minimisation : on choisit une variable hors-base de coefficient négatif ou nul dans la fonction objective
- Augmenter la variable entrante au maximum en conservant la réalisabilité de la solution obtenue :
  la variable entrante augment seule, les autres variables hors-base restent à zéro. En revanche, les variables de base vont changer de valeurs : il faut que les variables de base restent supérieures ou égales à zéro.
- Si la variable entrante peut augmenter autant que l'on veut : le PL n'est pas borné : STOP
- Sinon, choisir une variable dans la base dont la valeur s'est annulée dans $\tilde{x}$: on l'appelle *variable sortante* qui va sortir de la base.

Pivot (suite)

- Ecriture le dictionnaire pour la nouvelle base où les variables entrantes et sortantes ont été échangées :
  pour réaliser cette opération, on utilise la ligne du dictionnaire contenant à la fois la variable entrante et la variable sortante : la *ligne d'échange* qui permet d'écrire la variable entrante en fonction des nouvelles variables hors-base.
  Pour chaque apparition de la variable entrante dans les autres ligne, on *substitue* alors la variable entrante par la ligne d'échange.
- Dans la fonction objective, z est exprimée en fonction des nouvelles variables hors-base.

- Déduire la solution $\tilde{x}$ (en annulant les variables hors-base)
- Si la fonction z ne contient que des coefficients coûts négatifs ou nuls, alors la solution $\tilde{x}$ est optimale. STOP

Remarques :

Première base :
Dans le cas où les variables d'écart consitue une base réalisable, on peut démarrer les opérations pivot à partir de cette base.

Dans le cas contraire, on doit utiliser une première phase, appelée Phase I, d'intiatlisation qui consiste à déterminer s'il existe une base réalisable et dans ce cas, en fournir une.

La Phase II démarre à partir d'une base réalisable : elle consiste à itérer l'opération pivot jusqu'à déterminer une solution optimale ou alors prouver qu'il n'y a pas de soltion optimale.

Choix de la variable entrante :
S'il y a plusieurs choix possibles pour une variable entrante, il est fréquent qu'on propose de prendre la variables de plus grand (resp. petit) coefficient en maximimisation (resp. minimisation).
Mais ce critère (dit de Dantzig) n'est pas forcément le meilleur (le hasard peut etre aussi bien parfois).

Mise en œuvre

Problème :

$$(P)\left\{\begin{array}{lllll} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & \\ s.c. & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 5 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 11 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Problème équivalent (mise sous forme standard par introduction des variables d'écart) :

$$(P')\left\{\begin{array}{llllllll} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & & & \\ s.c. & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = 5 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & = 11 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & & +x_6 & = 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Mise en œuvre

$$(P')\begin{cases} \max z = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & & & \\ s.c. & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = 5 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & = 11 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & & +x_6 & = 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \end{cases}$$

Base de départ $B^0 = \{4, 5, 6\}$:

$$\begin{cases} & x_4 = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ & x_5 = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \\ & x_6 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\ \hline \max & z = & & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 \end{cases}$$

- B^0 base car (A^4, A^5, A^6) matrice identité inversible
- réalisable car $(x_4, x_5, x_6) = (5, 11, 8)$ à composantes toutes positives ou nulles
- solution de base associée $x(B^0) = (0, 0, 0, 5, 11, 8)^T$ de valeur 0
- non optimale car (par exemple) x_1 de coût réduit $5 > 0$: si x_1 devient > 0, on augmente strictement la fonction objectif $\rightarrow$ faisons entrer x_1 en base !

Mise en œuvre

x_1 entre en base, x_2, x_3 restent hors base... de combien peut-on augmenter x_1 ?

$$(P') \left\{ \begin{array}{rrrrr} x_4 = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \\ x_6 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\ \hline z = & & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x_4 = & 5 & -2x_1 \\ x_5 = & 11 & -4x_1 \\ x_6 = & 8 & -3x_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_4 & \geq 0 & \Leftrightarrow x_1 & \leq 5/2 \\ x_5 & \geq 0 & \Leftrightarrow x_1 & \leq 11/4 \\ x_6 & \geq 0 & \Leftrightarrow x_1 & \leq 8/3 \end{array} \right. \quad \rightarrow x_1 = 5/2,\ x_4 \textit{ sort de la base}$$

Nouvelle base B^1 :

$$\begin{array}{rlrl} x_4 & = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 & \textit{ssi } x_1 & = 5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2 \\ x_5 & = 11 - 4\,(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) - x_2 - 2x_3 & & = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 & = 8 - 3\,(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) - 4x_2 - 2x_3 & & = 1/2 + x_2/2 - x_3/2 + 3x_4/2 \\ z & = 5\,(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) + 4x_2 + 3x_3 & & = 25/2 - 7x_2/2 + x_3/2 - 5x_4/2 \end{array}$$

Mise en œuvre

Nouvelle base $B^1 = \{1, 5, 6\}$:

$$
(P') \left\{ \begin{array}{rlllll}
x_1 = & 5/2 & -3x_2/2 & -x_3/2 & -x_4/2 \\
x_5 = & 1 & +5x_2 & & +2x_4 \\
x_6 = & 1/2 & +x_2/2 & -x_3/2 & +3x_4/2 \\
\hline
z = & 25/2 & -7x_2/2 & +x_3/2 & -5x_4/2
\end{array} \right.
$$

- B^1 base réalisable car ? $\rightarrow$ par construction : détermination de la variable qui sort de la base
- solution de base associée ? $\rightarrow$ $x(B^1) = (5/2, 0, 0, 0, 1, 1/2)^T$ de valeur $25/2$
- optimale ? $\rightarrow$ non car x_3 de coût réduit $1/2 > 0$

x_3 entre (x_2, x_4 restent hors base)... mais qui sort ?

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & = 5/2 - x_2/2 & \geq 0 & \textit{ssi } x_2 & \leq 5 \\
x_5 & = 1 & \geq 0 & \quad \forall x_2 & \\
x_6 & = 1/2 - x_2/2 & \geq 0 & \textit{ssi } x_2 & \leq 1
\end{array}
$$

$\rightarrow$ $x_2 = 1$ et x_6 sort, la nouvelle base est $B^2 = \{1, 5, 3\}$

Mise en œuvre

Ancienne base $B^1 = \{1, 5, 6\}$:

$$(P') \left\{ \begin{array}{rllll} x_1 = & 5/2 & -3x_2/2 & -x_3/2 & -x_4/2 \\ x_5 = & 1 & +5x_2 & & +2x_4 \\ x_6 = & 1/2 & +x_2/2 & -x_3/2 & +3x_4/2 \\ \hline z = & 25/2 & -7x_2/2 & +x_3/2 & -5x_4/2 \end{array} \right.$$

Nouvelle base $B^2 = \{1, 5, 3\}$:

$$\begin{array}{llrl} x_6 & = 1/2 + x_2/2 - x_3/2 + 3x_4/2 & \textit{ssi}\ x_3 & = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\ x_1 & = 5/2 - 3x_2/2 - (1/2 + x_2/2 + 3x_4/2 - x_6) - x_4/2 & & = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\ x_5 & & & = 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ z & = 25/2 - 7x_2/2 + (1/2 + x_2/2 + 3x_4/2 - x_6) - 5x_4/2 & & = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \end{array}$$

$\rightarrow (2, 0, 1, 0, 1, 0)^T$ solution optimale unique de valeur 13

Résumé

Étant donné un programme linéaire (P)

1. Le mettre sous forme standard
2. Déterminer une base de départ réalisable B
3. **Tant que** la base B en cours est **non optimale**
   1. Choisir la variable x_r de coût réduit > 0 à faire entrer en base
   2. **Si** la valeur de x_r n'est pas contrainte **alors Retourner** $z = +\infty$
   3. **Sinon**, déterminer la variable x_s qui doit sortir et faire $B \longleftarrow B \backslash \{s\} \cup \{r\}$
4. **Retourner** la solution $x(B)$ et sa valeur z

Ecriture algorithmique complète de la phase II

- Pour une base $B = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ on écrit le PL en fct de la base

$$\begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \notin B} \bar{a}_{ij} x_j & \forall i \in B \\ z = \bar{z} + \sum_{j \notin B} \bar{c}_j x_j \end{cases}$$

- Si $\bar{c}_j \leq 0$, $\forall j \notin B$ alors la solt° associée est optimale.

  càd $x_i = \bar{b}_i$ $\forall i \in B$, $x_i = 0$ sinon et $z(x) = \bar{z}$

  Sinon
  - Choix de e (variable entrante)
    (Critère de Dantzig)
    e tq $\bar{c}_e$ max
  - Si $\bar{a}_{ie} \leq 0$, $\forall i \in B$
    alors on peut augmenter x_e à l'∞
    $\rightarrow$ pas de sol max

    Sinon
    - Choix de la variable sortante s
      parmi les $i \in B$ tq $a_{ie} > 0$
      s est tq $\dfrac{\bar{b}_s}{\bar{a}_{se}} = \min\limits_{i \in B} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} \right\}$
    - N^lle base $B \leftarrow B \setminus \{s\} \cup \{e\}$
    - Réécriture en fct de la n^lle base
      - la ligne s est dite ligne d'échange
        elle permet d'écrire $\rightarrow x_e = fct$ (old HB + s)
      - puis on remplace x_e par cette expression
        ds les autres lignes
        et ds z

Conclusion

L'algorithme du simplexe Phase II présenté précédemment consiste à passer de base en base jusqu'à trouver une base correspondant à une solution optimale.

Plusieurs questions se posent alors :

- La **validité** de l'algorithme :
  - est-ce qu'à chaque itération, il est possible d'exprimer la base en fonction des variables hors-base ?
  - est-ce que ces bases sont à chaque fois associées à des solutions réalisables ?
- La **terminaison** de l'algorithme :
  - est-ce que l'algorithme du simplexe se terminer en un nombre fini d'itérations par une solution optimale ou la détection d'un PL non-borné ?
  - comment détecter les PL de domaine de définition vide ?
- Comment **initialiser** la phase II de l'algorithme par une première base si celle des variables d'écart n'est pas réalisable ?
- Quelle est la **complexité** de l'algorithme du simplexe ?
- Et comment prouver formellement tout cela ?

Toutes les réponses dans le cours suivant.