Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 1 - Systèmes linéaires et algèbre linéaire (rappels)

pierre.fouilhoux@lipn.fr

4 octobre 2020

Problème de tables

Un traiteur prépare la salle d'un repas.

Il possède des tables de 6 places et des tables de 8 place (en grandes quantités chacune).

Il veut pouvoir installer 10 tables et 66 convives sans qu'aucune des places ne soit innocupée.

Est-ce possible ? Si oui, combien doit-il utiliser de tables de chaque sorte ?

Modélisation

- Donnons les variables de décisions.

x_1 le nombre de tables à 6 places
x_2 le nombre de tables à 8 places

- Donnons les contraintes

$$(S)\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +\,x_2 & = & 10 \qquad (L_1) \\ 6x_1 & +\,8x_2 & = & 66 \qquad (L_2) \end{array}\right.$$

Ici le problème est déterminée par des équations et non des inégalités.
C'est un système d'équations linéaires, dit aussi un système linéaire.

Solutions algébriques

• On trouve facilement la solution de ce système par remplacement de variables.

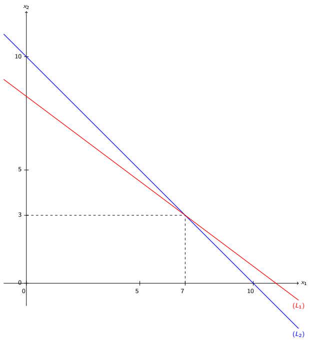
L_1 : $x1 = 10 - x_2$
L_2 : $6(10 - x_2) + 8x_2 = 66$ donc $2x_2 = 6$ et $x_2 = 3$
Puis par L_1 : $x_1 = 7$

• On peut aussi le faire par combinaisons linéaires des lignes de manière à faire disparaitre x_1

$L_2 - 6 * L_1 : 6x_1 + 8x_2 - 6 * (x_1 + x_2) = 66 - -6 * 10$
qui donne aussi directement la valeur de x_2

Solution graphique

Les équations L_1 et L_2 correspondent à 2 droites dans un plan où l'axe des abscisses est x_1 et celui des ordonnées x_2.



Un point $x = (x_1, x_2)$ vérifiant à la fois L_1 et L_2 est à l'intersection des deux droites : on retrouve le point $(7, 3)$.

Retour sur le problème

Le traiteur a donc une solution qui consiste à installer 7 tables de 6 places et 8 tables de 8 places.

Mais il y aurait pu ne pas avoir de solution !

- Si la solution trouvée n'avait pas été entière, le problème n'aurait pas eu de solution car il fallait un nombre entier de tables.

  Ou si la solution trouvée avait eu une composante négative.

- Mais le problème pourrait ne pas avoir de solutions du tout (ni entière, ni fractionnaire, ni positive, ni négative) :
  $\rightarrow$ C'est le cas quand les droites L_1 et L_2 sont parallèles.

Rappelons dans quel cas un système d'équations possède une solution ou non...

Vecteurs

Etant donné une valeur entière $n \geq 1$,

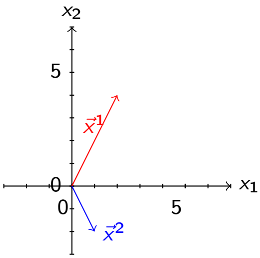
• Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de valeurs réelles $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
Les valeurs x_i sont appelées les composantes du vecteurs

• On appelle vecteur canonique ε^i, $i = 1, \ldots, n$, le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i$ème qui est à 1 :

$$e^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Réprésentation graphique dans un repère pour $n = 2$:

Vecteur $\vec{x}^1 = (2, 4)$
Vecteur $\vec{x}^2 = (1, -2)$



Combinaison linéaire

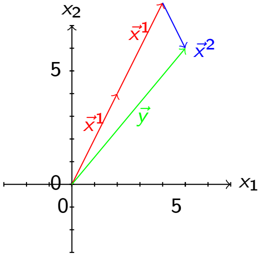
- Etant donné $x \in \mathbb{R}^n$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé scalaire)
λx est un vecteur : $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

- Etant donnés m vecteurs $x^1, \ldots, x^m$ de $\mathbb{R}^n$
et m scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ dans $\mathbb{R}$,
Le vecteur $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_1^i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_2^i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_m^i \right)$
est appelé une combinaison linéaire des vecteurs x^i, $i \in \{1, \ldots, m\}$

- Réprésentation graphique
dans un repère pour $n = 2$:

Vecteur $\vec{x}^1 = (2, 4)$
Vecteur $\vec{x}^2 = (1, -2)$

Vecteur $\vec{y} = 2\vec{x}^1 + \vec{x}^2 = (5, 6)$



Espace vectoriel

• Un ensemble V d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est appelé espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}^n$
si $\lambda x + \mu y \in V \quad \forall x, y \in V$ *and* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

• Etant donné m vecteurs $x^1, \ldots, x^m$ de $\mathbb{R}^n$,
l'ensemble des vecteurs obtenus par combinaisons linéaires de ces m vecteurs est un espace vectoriel.
On l'appelle l'espace vectoriel engendré par les m vecteurs x.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$:

- *Deux vecteurs linéairement indépendants x^1 et x^2 engendrent un espace vectoriel de dimension 2 formé par tous les vecteurs qui s'écrivent $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$ pour toutes les valeurs réelles λ_1 et λ_2.*
- *Tout vecteur x^3 qui n'est pas dans cet espace vectoriel de dimension 2 engendrera alors tout l'espace $\mathbb{R}^3$ en formant un repère à 3 dimension.*

Indépendance linéaire

• Des vecteurs $x^1, ..., x^m \in \mathbb{R}^n$ sont dits linéairement indépendants si le système linéaires d'inconnues $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = 0$$

admet une unique solution : $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, ..., m$.

(Faire exo12)

Dimension

- Base

Combinaisons d'équations linéaires

Exemple : les équations obtenues par combinaisons d'équations linéaires

Vecteur colonne

• Un vecteur est ici toujours un vecteur colonne.
On note c^T le transposé du vecteur, i.e. l'écriture du vecteur colonne x en un vecteur ligne.

• Etant donné deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on appelle produit scalaire

$$x.y = < x, y > = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Matrice

- On appelle matrice un tableau de réels à deux dimensions $n \times m$: n lignes et m colonnes).
Les termes de la matrices sont notées a_{ij} pour le coefficient en $i$ème ligne et $j$ième colonne.
- Multiplication matrice et vecteur
- Multiplication de matrices

Notations matricielles d'un système

Def système

Rang d'une matrice

Rang

Propriétés

Théorème

Matrice carrée

On appelle *matrice carrée* une matrice A à n lignes et n colonnes.

La diagonale de A sont les termes a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$

• A^T est la transposé de la matrice A, i.e. une matrice où les valeurs de A sont réécrites symétriquement par rapport à la diagonale.

Matrice identité

On appelle *matrice identité* la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et sont les seuls coefficients non nuls, par exemple pour la taille $n = 5$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarquons qu'en multipliant à gauche (ou à droite) un vecteur ou une matrice par I, le vecteur ou la matrice reste inchangée.

Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A est dite *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$. On note alors $B = A^{-1}$.

Propriétés

Le résultat d'algèbre linéaire suivant est bien connu.

Theorem

Les propositions suivantes sont équivalentes pour une matrice carrée A :
i) A est inversible.
ii) l'ensemble des lignes de A est linéairement indépendant, c'est-à-dire qu'on ne peut obtenir une des lignes en combinant linéairement les autres lignes.
iii) l'ensemble des colonnes de A est linéairement indépendant.
iv) le système d'équation $Ax = b$ admet une et une seule solution, quelque soit le vecteur b.

Si l'on considère le système d'équations $Ax = b$ où A est une matrice carrée inversible, b un vecteur connu et x un vecteur des variables. Alors en multipliant à gauche par A^{-1} le système, on obtient $A^{-1}Ax = A^{-1}b$. Ainsi $x = A^{-1}b$ donne la solution (unique) du système.

Algorithme de Gauss

Pivot de Gauss

Inversion de matrices