Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée - Ingénieur 2ème année

Optimisation Linéaire (OL) -G4SIOL-

Cours 0 - Introduction

pierre.fouilhoux@lipn.fr

4 octobre 2020

Contenu du cours

- 0- Introduction et définitions
- 1- Système d'équations et algèbre linéaire (rappels)
- 2- Algorithme du simplexe (1) : interprétation géométrique et algébrique
- 3- Algorithme du simplexe (2) : preuve et complexité
- 4- Algorithme du simplexe (3) : initialisation
- 5- Dualité
- 6- Modélisation, interprétation économique et simplexe dual
- 7- Pour aller plus loin

Références bibliographiques

Vašek Chvátal,
Linear Programming
Freeman (1983).

Jean-François Hêche, Thomas M. Liebling et Dominique de Werra,
Recherche opérationnelle pour ingénieurs
Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR) (2003)

Jacques Teghem,
Recherche Opérationnelle - Tome 1 : Méthodes d'optimisation
Ellipse (2012)

Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz,
Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity
Courier Corporation (1998)

Ce cours a été construit avec des emprunts aux cours et ouvrages de : Ph. Chrétienne, Vašek Chvátal, Safia Kedad-Sidhoum, Patrice Perny, Jacques Teghem et Ian Todinca.

Evaluation de l'enseignement OL

- Examen de Travaux Pratiques (dernière séance de TP)
- Partiel (examen écrit final)

Notation : $\frac{1}{3}$ TP + $\frac{2}{3}$ Examen

Calendrier

Lundi 7 septembre
CM 8h30-10h00 (Amphi Fermat)
CM 10h15-11h45
TD 13h45-15h15

lundi 14 septembre
CM 8h30-10h00 (Amphi Fermat)
TD 10h15-11h45

lundi 21 septembre
CM 8h30-10h00
TD 10h15-11h45
TP 13h45-17h00 (F204 et F205)

lundi 28 septembre
CM 8h30-10h00
TD 10h15-11h45

lundi 5 octobre
CM 8h30-10h00
TD 10h15-11h45
TP 13h45-17h00 (F204 et F205)

lundi 12 octobre
CM 8h30-10h00
TD 10h15-11h45

lundi 19 octobre
CM 8h30-10h00
TD 10h15-11h45
TP 13h45-17h00 (G208 et G210)

lundi 26 octobre
Partiel 9h00- 12h00

Enoncé du problème (exo 1 du TD1)

Une entreprise fabrique trois modèles de TV : modèles A, B et C
qui lui rapportent des profits de 160, 300 et 500 Euros.

Les niveaux minima de production pour une semaine sont de :
100 pour A, 150 pour B et 75 pour C.

Chaque douzaine de TV de type i requiert :

- un temps F_i pour la fabrication
- un temps A_i pour l'assemblage
- un temps E_i pour l'emballage.

i	A	B	C
F_i	3	3,5	5
A_i	4	5	8
E_i	1	1,5	3

Pendant la semaine à venir, l'entreprise aura 150 heures disponibles pour la fabrication, 200 pour l'assemblage et 60 pour l'emballage.

On peut noter que l'usine étant en production constante, le plan de production demandé peut prévoir un nombre fractionnaire de télévisions.

Variables et objectifs d'optimisation

- Donnons des variables définissant le plan de production de l'entreprise.

x_i : nombres de télévisions de type $i \in \{A, B, C\}$ à fabriquer sur la semaine.

Ce sont des variables réelles positivesavec des valeurs minimales.
(Attention les données sont parfois indiquées par douzaine.)

- Donnons la fonction objective du problème dans le but de maximiser le profit de l'entreprise :

Maximiser $160x_1 + 300x_B + 500x_C$

Contraintes du problème

Remarque : Si le problème n'était pas contraint, le profit serait à l'infini... Il y a donc des contraintes.

- Donnons la quantité d'heures utilisées pour la fabrication d'une télévision de type A.

Pour produire x_A télévisions de type A, il faut $\frac{3}{12}x_A$ heures de fabrications.

- Indiquons la quantité totale de temps utilisé pour la fabrication.

Ainsi, le temps total de fabrication pour les téléviseurs A, B et C est

$$\frac{1}{12}(3x_A + 3,5x_B + 5x_C)$$

- Donnons alors une contrainte horaire sur le temps de fabrication disponible.

C'est une inégalité linéaire

$$3x_A + 3,5x_B + 5x_C \leq 12 * 150 \quad (= 1800) \qquad (1)$$

Contraintes du problème

- Donnons une contrainte horaire sur le temps d'assemblage disponible.

$$4x_A + 5x_B + 8x_C \leq 12 * 200 \quad (= 2400) \tag{2}$$

- Donnons une contrainte horaire sur le temps d'emballage disponible.

$$x_A + 1,5x_B + 3x_C \leq 12 * 60 \quad (= 720) \tag{3}$$

Rassemblons toute l'écriture algébrique

$$
(P)\left\{\begin{array}{llllll}
Max & 160x_A & +300x_B & +500x_C & & \\
s.t. & 3x_A & +3,5x_B & +5x_C & \leq 1800 & (1) \\
 & 4x_A & +5x_B & +8x_C & \leq 2400 & (2) \\
 & x_A & +1,5x_B & +3x_C & \leq 720 & (3) \\
 & x_A & & & \geq 100 & \\
 & & x_B & & \geq 150 & \\
 & & & x_C & \geq 75 & \\
 & x_A, x_B, x_C \in \mathbb{R}_+ & & & &
\end{array}\right.
$$

La fonction objective est "linéaire".
Les contraintes sont des "inégalités linéaires"
Les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est un ensemble continu

$\rightarrow$ C'est de "l'Optimisation Linéaire", d'où le nom du cours.

Etudions ses solutions

• En mettant les variables à leurs minima $x_A = 100$, $x_B = 150$ et $x_C = 75$.
Le vecteur $x = (100, 150, 75)$ est candidat pour être solution du problème.
Il correspond à un profit de 53 950€ .

• Tentons de donner de meilleures solutions potentielles :

Par exemple, à partir de la solution précédente, on met x_A au maximum possible pour la contrainte (1) : $x_A = \frac{1800-3{,}5*150-5*75}{3} = 300$.
La solution $(300, 150, 75)$ n'est pas valide car elle ne vérifie pas l'inégalités (2)...

Selon l'inégalité (2), on peut augmenter x_A uniquement jusqu'à
$x_A = \frac{2400-5*150-8*75}{4} = 262,5$
La solution $x = (262.5, 150, 75)$ vérifie bien toutes les inégalités.
Elle génère un bénéfice de 124 500€ .

• En utilisant les outils que nous allons voir dans le cours et les TPs, on peut déterminer la solution optimale de ce problème.

La solution $(100, 263.3333, 75)$ correspond à une solution optimale de 158 500€ .

Variables d'écart

- Ajoutons des variables e_1, e_2 et e_3 représentant l'écart entre les termes de droite et de gauche des inégalités (1), (2) et (3).

$$e_1 = 1800 - (3x_A + 3,5x_B + 5x_C)$$

$$e_2 = 2400 - (4x_A + 5x_B + 8x_C)$$

$$e_3 = 720 - (x_A + 1,5x_B + 3x_C)$$

- Faire de même pour les trois autres inégalités en concervant des écarts positifs

$$e_4 = x_A - 100$$

$$e_5 = x_B - 150$$

$$e_6 = x_C - 75$$

Ecriture avec des équations linéaires

Introduisons ses variables d'écart dans l'écriture algébrique de manière à transformer les inégalités en égalités.

$$
(P)\left\{\begin{array}{llllllll}
Max & 160x_A & +\ 300x_B & +\ 500x_C & & & & \\
s.t. & 3x_A & +\ 3,5x_B & +\ 5x_C & +\ e_1 & = 1800 & (1) \\
 & 4x_A & +\ 5x_B & +\ 8x_C & +\ e_2 & = 2400 & (2) \\
 & x_A & +\ 1,5x_B & +\ 3x_C & +\ e_3 & = 720 & (3) \\
 & x_A & & & -\ e_4 & = 100 & \\
 & & x_B & & -\ e_5 & = 150 & \\
 & & & x_C & -\ e_6 & = 75 & \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_A, x_B, x_C, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \in \mathbb{R}_+}
\end{array}\right.
$$

Cette écriture algébrique est bien identique à la précédente !

Analysons le problème et sa solution

- La première approche est de donner uniquement la solution :

La solution optimale de ce problème est de produire en nombre de télévisions par semaine : 100 de type A, 263,33 de type B et 75 de type C pour un profit maximal de 158 500€ .

La production de télévision de type B est fractionnaire : normal ce sont des variables continues. Le "tiers de télé en trop" sera complété la semaine suivante etc.

- Mais on peut aller plus loin : que représentent les variables d'écart ?

$e_1 = 1800 - (3x_A + 3,5x_B + 5x_C)$ représente le nombre d'heures de fabrication disponibles et non utilisées pour la production

$e_4 = x_A - 100$ représente le nombre de télévisions produits en plus des 100 téléviseurs obigatoirement produits

Analysons le problème et sa solution

- On obtient $e_1 = 203,333$, $e_2 = 83,333$, $e_3 = 0$, $e_4 = 0$, $e5 = 113,333$ et $e_6 = 0$

Quelques remarques :

- $e_4 = e_6 = 0$: les production de type A et C sont à leurs minima plancher
- $e5 = 113,333$, on produit plus de 113 télévisions de type B en plus du plancher
- Avec $e_3 = 0$, le temps d'emballage est entièrement consommé : on dit que l'inégalité (3) est serrée
- Les temps de fabrication et d'assemblage sont non-consommés avec $e_1 = 203,33$ heures de fabrication et $e_3 = 83,33$ heures d'assemblage possibles non faites
- On peut dire que les inégalités serrées : assemblage, plancher A et C sont les contraintes bloquantes du problème

$\rightarrow$ Cette analyse permet de donner des conseils stratégiques pour augmenter les bénéfices.

Par exemple, comme le type B rapporte largement le plus, il faudrait produire moins de A et/ou de C : pour cela, il faut augmenter le temps disponible pour l'emballage qui est la contrainte bloquante.

“Optimiser”

“Optimisation Linéaire” : un des enseignements de l’institut Galilée sur le thème de l’Optimisation.

L’optimisation recouvre de nombreux domaines :

- l’analyse de fonctions mathématiques
- la théorie des graphes
- les statistique et l’analyse de données (apprentissage, réseaux bayésien...)
- l’algorithmique et la complexité des problèmes
- l’optimisation combinatoire (qui suit directement ce cours) “

Mais pour optimiser quoi ?

La Recherche Opérationnelle

La **Recherche Opérationnelle** que l'on nomme "RO"
(Operational Research, en anglais, acronym"OR")

"ensemble des domaines scientifiques, des outils et des problèmes touchant aux questions d'ordre décisionnel (dit aussi stratégique) ou d'optimisation de systèmes complexes"

Ici l'expression "systèmes complexes" est à prendre ici au sens littéral du terme : c'est-à-dire "difficile à comprendre pour un individu sans l'aide d'un modèle ou d'un ordinateur".

Des problèmes de Recherche Opérationnelle

Quelques exemples

- la recherche d'un itinéraire sur une carte
- l'ordonnancement des tâches à accomplir en usine
- la répartition des colis à livrer au sein d'une flotte de camions
- décider des emplacements stratégique d'implentations d'usines
- tracer des lignes de bus et décider de leurs horaires
- dessiner des pistes de circuits intégrés

sous l'objectif d'optimiser des critères (argent, nombre d'usagers satisfaits, temps de transport,...)

Le “cadre” de la RO

Le cadre des problèmes de RO concerne tous les problèmes de décision et d'optimisation...
Il est plus facile de dire ce qui ne relève pas de la RO :

- quand un problème est de structure simple mais de très grande taille : cela peut plutôt demander un outil de gestion de base de données ou de SI.
- quand le problème n'a pas de solutions évidentes, qu'on peut se demander s'il existe une solution, si la question exige des équations complexes : ce sont certainement des mathématiques
- si le problème demande une simplification de part sa nature physique ou biologique : il s'agit plutôt d'utiliser des compétences dans ces domaines,
- si le problème semble difficile mais ne concerne que des instances très très réduites, quasiment solvables à la main... il n'y a peut-être pas besoin de développer un modèle ou des outils

La RO en entreprise

La fédération européenne de RO s'amuse ainsi à définir la RO comme la

Science of better
Science de la bonne gestion
"Optimiser pour moins et mieux consommer"

Pour l'entreprise, la RO constitue un département "outil" d'aide à la décision.
On parle de **science de la gestion (Managment science)**.
La RO se retrouve donc sur une même ligne des départements que la comptabilité, la gestion de Base de données ou les systèmes d'information.
En fait, la RO utilise ces diverses sources de données pour aider aux décisions dans l'entreprise.

Les métiers de la RO

- Les grands groupes industriels possèdent un département "RO" (transport, production électrique, logistique, réseaux de télécommunications...).
- Les entreprises de consultants RO propose des missions d'expertise pour des besoins précis ou ponctuels dans les PME spécialisées.
- Les logiciels de RO sont utilisées par les entreprises ci-dessus et sont en perpétuels améliorations.
- La recherche en RO en université ou dans les R&D (Recherche et Développement) des entreprises est toujours en évolution.

L'objet du cours est d'étudier la "Programmation Linéaire".

Programme Linéaire (Linear Program, en anglais), noté PL (ou LP) :
problème d'optimisation sous contrainte que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiser } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{sous les contraintes} \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\
&x_j \geq 0 \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

Les inconnues du problème

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: les n *variables* à valeurs dans $\mathbb{R}$
- z : la valeur objective du problème

Les données du problème :

- $c_1, c_2, \ldots, c_n$: les coefficients multiplicateurs, appelés *coûts unitaires*
- la fonction linéaire $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$: *fonction objective* ou *objectif*
- Les m inégalités $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$: les *contraintes*
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$: les coefficients
- $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$: les coefficients de second membre
- Les n inégalités $x_i \geq 0$ sont dites de positivités (ou triviales)

Définition

On appelle *Forme canonique* d'un programme linéaire, les écritures :

- *Canonique "Max'* (ou *Canonique* sans précision)

$$\begin{aligned}
&\text{Maximiser } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{sous les contraintes} \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\
&x_j \geq 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

- *Canonique "Min"*

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiser } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{sous les contraintes} \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\
&x_j \geq 0 \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Rq : Min et Max sont appelées les sens d'optimisation

Remarque

Tout problème d'optimisation maximisant ou minimisant une fonction linéaire sous contraintes de respecter des inégalités linéaires avec des variables réelles est un programme linéaire : il peut se réécrire sous la forme canonique (Max ou Min) d'un programme linéaire.

En effet, on peut utiliser les astuces et changement de variables :

- Passer de maximisation à minimisation (ou l'inverse) : poser $z' = -z$
- Passer d'une inégalité en $\leq$ en $\geq$ (ou l'inverse) : multiplier par -1 (des 2 cotés).
- Si on a $x_j \geq p_i$ (avec p_i potentiellement négatif) :
  changement de variable $x_i' = x_i - p_i$
- Si on a $x_j \leq p_i$ (avec p_i potentiellement négatif) :
  changement de variable $x_i' = x_i - p_i$
- "Supprimer" une égalité :
  - soit en écrivant les deux inégalités en $\leq$ et en $\geq$
  - soit en utilisant l'égalité pour écrire une des variables x_j en fonction des autres puis en remplaçant x_j par sa valeur
    Attention : il faut aussi penser à remplacer aussi dans $x_j \geq 0$: on obtient alors une inégalité non triviale supplémentaire

Exemple

Exemple : Ecrire le PL suivant sous forme canonique “Max”.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min } z = & 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & & \\
& x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 10 & (1) \\
& & 4x_2 & +2x_3 & \geq 8 & (2) \\
& 3x_1 & +x_2 & & = 6 & (3) \\
& x_1 & & & \geq 0 & \\
& & x_2 & & \geq 0 & \\
& & & x_3 & \geq -2 & (4)
\end{array}
$$

Il va être nécessaire :

- de changer le sens d’optimisation
- de changer le sens de l’inégalités (2)
- de faire un changement de variable pour x_3 pour avoir une variable positive
- de remplacer l’équation (3) par une inégalité en faisant disparaître une variable (par exemple x_2).

Exemple

- Changer le sens d'optimisation :

On pose $z' = -z$: $z' = -2x_1 - x_2 + 3x_3$

- On multiplie (2) par -1

$$-4x_2 - 2x_3 \leq -8 \quad (2)$$

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Max } z' = & -2x_1 & -x_2 & +3x_3 & & \\
& x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 10 & (1) \\
& & -4x_2 & -2x_3 & \leq -8 & (2) \\
& 3x_1 & +x_2 & & = 6 & (3) \\
& x_1 & & & \geq 0 & \\
& & x_2 & & \geq 0 & \\
& & & x_3 & \geq -2 & (4)
\end{array}$$

Exemple

• Avoir une variable positive à la place de x_3 :
on pose $x_3' = x_3 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = x_3' - 2$
(4) devient alors l'inégalité triviale $x_3' \geq 0$
On remplace dans tout le PL x_3 par $x_3' - 2$

Dans la fonction objective, on pose $z'' = z' - 6 = -z - 6$

$$
\begin{array}{lllllr}
\text{Max } z'' = & -2x_1 & -x_2 & +3x_3' & & \\
& x_1 & +3x_2 & +x_3' & \leq 12 & (1) \\
& & -4x_2 & -2x_3' & \leq -12 & (2) \\
& 3x_1 & +x_2 & & = 6 & (3) \\
& x_1 & & & \geq 0 & \\
& & x_2 & & \geq 0 & \\
& & & x_3' & \geq 0 &
\end{array}
$$

Exemple

- Remplacer l'équation (3) par une inégalité en faisant disparaître x_2 :

$$x_2 = 6 - 3x_1$$

Comme $x_2 \geq 0$, on doit conserver $6 - 3x_1 \geq 0$.

$$\begin{array}{rllll}
\text{Max } z''' = & x_1 & +3x_3' & & \\
 & -8x_1 & +x_3' & \leq -6 & (1) \\
 & 12x_1 & -2x_3' & \leq 12 & (2) \\
 & x_1 & & \leq 2 & \\
 & x_1 & & \geq 0 & \\
 & & x_3' & \geq 0 &
\end{array}$$

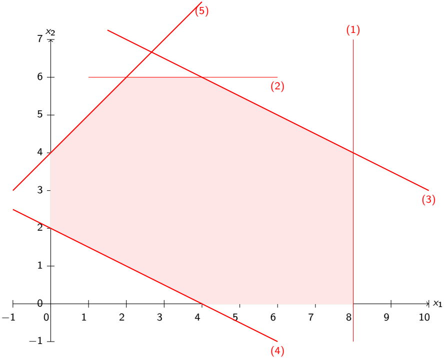
avec $z'' = z'' - 6 = -z - 12 \quad x2 = 6 - 3x_1$ et $x_3 = x_3' - 2$

Rq : On a pu ici ramener à un programme linéaire à 2 variables.

Résolution graphique de programmes linéaires à 2 variables

Dans le cas très particulier d'un programme linéaire à 2 variables, on peut le résoudre par sa représentation graphique.
Résolvons graphiquement le PL :

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max } z = & 3x_1 & +4x_2 & & \\
& x_1 & & \leq 8 & (1) \\
& & x_2 & \leq 6 & (2) \\
& x_1 & +2x_2 & \leq 16 & (3) \\
& x_1 & +2x_2 & \geq 4 & (4) \\
& -x_1 & +x_2 & \leq 4 & (5) \\
& x_1 & & \geq 0 & \\
& & x_2 & \geq 0 &
\end{array}$$

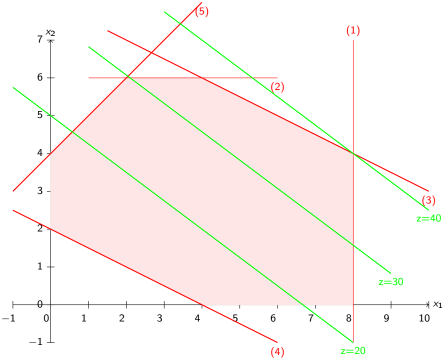


Les inégalités correspondent à des demi-plans définies par des droites.
La zone coloriée correspond aux points du plan dans l'intersection des demi-plans : c'est l'ensemble des points qui vérifient toutes les inégalités.
On l'appelle le domaine de définition du programme linéaire.

Résolution graphique de programmes linéaires à 2 variables

Représentons à présent les droites d'équation $z = k$ pour différentes valeurs de $k = 20, 30, 40, \ldots.$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max } z = & 3x_1 & +4x_2 & & \\
& x_1 & & \leq 8 & (1) \\
& & x_2 & \leq 6 & (2) \\
& x_1 & +2x_2 & \leq 16 & (3) \\
& x_1 & +2x_2 & \geq 4 & (4) \\
& -x_1 & +x_2 & \leq 4 & (5) \\
& x_1 & & \geq 0 & \\
& & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

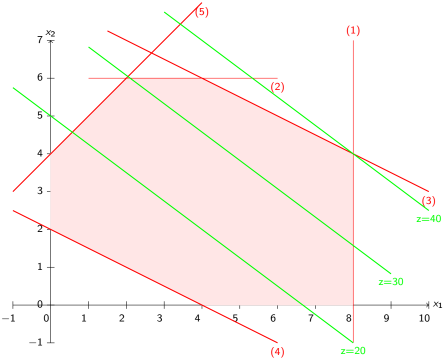


Les droites $z = k$ sont parallèles et plus on va vers le haut, plus k augmente.
On voit que la valeur maximale possible pour que la droite $z = k$ intersecte le domaine de définition est obtenue pour $z = 40$: cela correspond au point $(8, 4)$ qui est l'unique solution optimale.

Résolution graphique de programmes linéaires à 2 variables

Représentons à présent les droites d'équation $z = k$ pour différentes valeurs de $k = 20, 30, 40, \ldots$.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max } z = & 3x_1 & +4x_2 & & \\
 & x_1 & & \leq 8 & (1) \\
 & & x_2 & \leq 6 & (2) \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq 16 & (3) \\
 & x_1 & +2x_2 & \geq 4 & (4) \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq 4 & (5) \\
 & x_1 & & \geq 0 & \\
 & & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

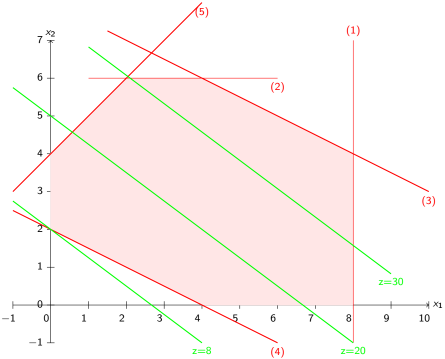


Les droites $z = k$ sont parallèles et plus on va vers le haut, plus k augmente.
On voit que la valeur maximale possible pour que la droite $z = k$ intersecte le domaine de définition est obtenue pour $z = 40$: cela correspond au point $(8, 4)$ qui est l'unique solution optimale.
L'optimum est donc $x_1 = 8, x_2 = 4$ avec $z = 40$.

Résolution graphique de programmes linéaires à 2 variables

Modifions la fonction objective : ici le Max devient un Min

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Min } z = & 3x_1 & +4x_2 & & \\
& x_1 & & \leq 8 & (1) \\
& & x_2 & \leq 6 & (2) \\
& x_1 & +2x_2 & \leq 16 & (3) \\
& x_1 & +2x_2 & \geq 4 & (4) \\
& -x_1 & +x_2 & \leq 4 & (5) \\
& x_1 & & \geq 0 & \\
& & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

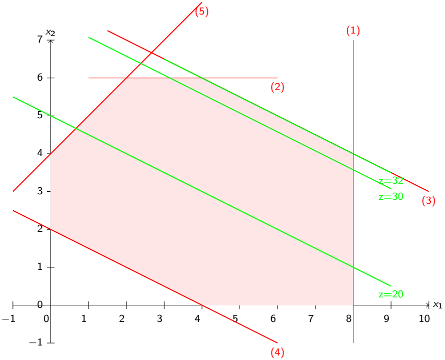


Les droites $z = k$ sont parallèles et plus on va vers le bas, plus k diminue.
On voit que la valeur minimale possible pour que la droite $z = k$ intersecte le domaine de définition est obtenue pour $z = 8$: cela correspond au point $(0, 2)$ qui est l'unique solution optimale.
L'optimum est donc $x_1 = 0, x_2 = 8$ avec $z = 8$.

Résolution graphique de programmes linéaires à 2 variables

Modifions une autre fois la fonction objective l'optimum :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max } z = & 2x_1 & +4x_2 & & & \\
& x_1 & & \leq 8 & (1) \\
& & x_2 & \leq 6 & (2) \\
& x_1 & +2x_2 & \leq 16 & (3) \\
& x_1 & +2x_2 & \geq 4 & (4) \\
& -x_1 & +x_2 & \leq 4 & (5) \\
& x_1 & & \geq 0 & \\
& & x_2 & \geq 0 &
\end{array}$$



Ici les droites $z = k$ sont parallèle à la droite (3).
Et on voit que la valeur maximale possible pour que la droite $z = k$ intersecte le domaine de définition est obtenue pour $z = 32$: cela correspond à tous les points du segment reliant les points $(4, 8)$ et $(8, 4)$.
Tous les points de ce segment sont optimaux avec $z = 32$.