

UE Androide/MAOA : Février 2017

Durée 3h00. Notes de cours et de TD autorisées.

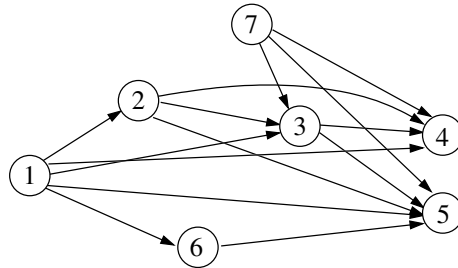
Exercice 1 (12 points)

Dimensionnement de ressource en ordonnancement

On appelle *ensemble partiellement ordonné* (poset) le couple (V, \prec) où $V = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble d'éléments et \prec une relation d'ordre partiel. On dit que si $i \prec j$, alors i est avant j . Une relation d'ordre partiel est une relation binaire entre les éléments de V telle que, pour tout triplet i, j, k d'éléments distincts de V , si $i \prec j$ et $j \prec k$ alors $i \prec k$. Noter que l'on a donc trois cas distincts : soit $i \prec j$; soit $j \prec i$; soit i et j sont incomparables selon \prec .

On peut représenter un poset par un graphe orienté $G_\prec = (V, A)$ défini de la façon suivante : V est l'ensemble d'éléments du poset (V, \prec) et A est un ensemble d'arcs tel qu'il existe un arc (i, j) dans A si et seulement si $i \prec j$.

La figure suivante propose un graphe correspondant à un poset P_{O_1} à 7 éléments.



On appelle *antichaîne* un ensemble d'éléments deux à deux incomparables dans le poset (V, \prec) . Dans l'exemple du poset P_{O_1} , $\{2, 6, 7\}$ et $\{3, 6\}$ sont des antichaînes, mais pas $\{2, 5, 7\}$ car $2 \prec 5$.

Etant donné un poids w_i associé à chaque élément de V , on note alors $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ le poids de A . On appelle *problème de l'antichaîne de poids maximum* (PAM) le problème consistant à rechercher une antichaîne de (V, \prec) de poids maximal.

Question 1 (0,5/12) — Modélisation

On considère un ensemble de tâche $T = \{1, \dots, n\}$ à réaliser. On considère une relation de précédence sur les tâches de manière à ce que, pour deux tâches i, j de V , si i est avant j alors la tâche i doit avoir été réalisée avant que débute la tâche j .

Pour être réalisée, une tâche $i \in V$ utilise une quantité $r_i \in \mathbb{R}$ de ressource pour être réalisée (cette ressource peut par exemple être un nombre d'ouvriers, une consommation électriques,...). Ainsi, si deux tâches i et j ont lieu en même temps, alors la quantité de ressource utilisée à ce moment est $r_i + r_j$.

En considérant que tout ordonnancement des tâches peut avoir lieu, on désire déterminer la quantité maximale de ressource qui peut être utilisée simultanément pendant l'exécution d'un ordonnancement. Montrer que cette question de dimensionnement des ressources se ramène au problème PAM.

Question 2 (0,5/12) — *Formulation PLNE*

Soit un poset (V, \prec) où $V = \{1, \dots, n\}$ donné par son graphe G_{\prec} et un poids w_i associé aux éléments de V . On considère une variable binaire x_i associée à chaque élément i de V . Montrer que la formulation suivante est une formulation F du PAM.

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i \in V} w_i x_i \\ & x_i + x_j \leq 1 \quad \forall i, j \in V \text{ avec } i \prec j, & (1) \\ & x_i \leq 1 \quad \forall i \in V, & (2) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in V, & (3) \\ & x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in V. \end{aligned}$$

Comment proposez-vous de la résoudre ?

Question 3 (2,5/12) — *Approche polyédrale*

Soit un poset (V, \prec) où $V = \{1, \dots, n\}$. Etant donné un ensemble $W \subseteq V$, on considère le vecteur d'incidence χ^W défini par $\chi^W(i) = 1$ si $i \in W$ et 0 sinon. Le polyèdre des antichaînes est alors

$$P_A = \text{conv}\{\chi^A \in \{0, 1\}^n \mid A \subseteq V \text{ antichaîne de } (V, \prec)\}.$$

Nous avons montré à la question précédente que les inégalités (1), (2) et (3) sont valides pour P_A et constituent une formulation entière avec les contraintes d'intégrités pour le problème de l'antichaîne maximale (PAM).

- a) Montrer que P_A est de pleine dimension.
- b) Montrer que les contraintes triviales (3) définissent des facettes de P_A .
- c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les contraintes (1) dominent les contraintes (2). Que peut-on en déduire pour les contraintes (2) ?

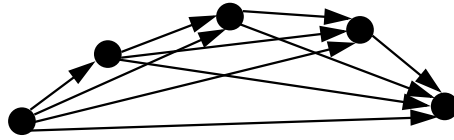
Question 4 (2/12) — *Structure combinatoire*

Soit un poset (V, \prec) et son graphe G_{\prec} .

- a) Montrer que si G_{\prec} contient un chemin μ reliant un sommet i à un sommet j , alors G_{\prec} contient l'arc (i, j) .
- b) Montrer que le graphe G_{\prec} d'un poset ne contient pas de circuit

c) Un ensemble $C \subset V$ est appelé *P-chaîne* de (V, \prec) si $i \prec j$ ou $j \prec i$ pour tout $i, j \in C$. Remarquer que tout élément de V constitue une P-chaîne et que, pour i, j dans V , $\{i, j\}$ est une P-chaîne si et seulement si $i \prec j$.

Montrer (par récurrence) que la représentation graphique d'une P-chaîne correspond aux graphes de la structure suivante (ici donné pour une P-chaîne de 5 éléments).



Question 5 (3/12) — Inégalités de P-chaîne

Soit une P-chaîne C du poset. Par la question précédente, on peut décrire C par ces k éléments i_1, \dots, i_k , numérotés dans l'ordre donné par la structure combinatoire de la question précédente, c'est-à-dire $i_l \prec i_{l+t}$ pour tout $l \in \{1, \dots, k-1\}$ et pour tout $t \in \{1, \dots, k-l\}$.

a) Montrer que les inégalités

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1 \text{ pour toute P-chaîne } C \tag{4}$$

sont valides pour $P_A(V, \prec)$. On les appelle des *inégalités de P-chaînes*.

b) On dit qu'une P-chaîne C est *maximale* (au sens de l'inclusion) s'il n'existe pas de P-chaîne C' , avec $C' \neq C$ qui contienne C . Montrer que si C n'est pas maximale, alors l'inégalité de P-chaîne (4) correspondant à C ne peut pas définir une facette de $P_A(G)$.

c) Soit C une P-chaîne (quelconque). Montrer que si pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, $i_l \prec j$ ou $j \prec i_l$, alors $C \cup j$ est encore une P-chaîne. (Indication : utiliser une récurrence et regarder en premier le lien entre i_1 et j).

d) Montrer qu'une inégalité de P-chaîne définit une facette de $P_A(G)$ si et seulement la P-chaîne associée est maximale.

Question 6 (1,5/12) — Caractérisation

On considère une instance très simple de poset (V_1, \prec_1) où les éléments de V_1 forment une (unique) P-chaîne. On veut montrer que le polyèdre P_A pour cette instance est en fait entièrement donné par l'inégalité de P-chaîne associée à cette P-chaîne et les inégalités triviales (3). Pour cela, on considère une inégalité $ax \leq \alpha$ définissant une facette de P_A . On note a_i les coefficients de a associé à l'élément i de V_1 .

a) Montrer que si $ax \leq \alpha$ est différente des inégalités triviales (3), alors $a_i \geq 0$ pour tout $i \in V_1$.

b) Montrer que si $ax \leq \alpha$ est différente de l'inégalité de P-chaîne associée à l'unique P-chaîne de l'instance, alors $a_i = 0$ pour tout $i \in V_1$.

c) Conclure

Question 7 (2/12) — Algorithme de coupes

Considérons un poset (V, \prec) et un poids $w_i \in \mathbb{R}$, associé à chaque élément $i \in V$. On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i \in V} w_i x_i \\ & \sum_{i \in C} x_i \leq 1 \quad \text{pour toute P-chaîne } C, \\ & x_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i \in V. \end{aligned}$$

On ADMET la généralisation de la question précédente, c'est-à-dire :

“Les inégalités de P-chaîne et les inégalités triviales sont une caractérisation complète du polyèdre des antichaînes.”

Un preuve simple de ce résultat peut-être obtenue en prouvant le caractère TDI de cette formulation linéaire et grâce au théorème de Dilworth.

a) Considérons un ensemble C_0 d'inégalités de P-chaînes et le programme linéaire (P_0) contenant les inégalités C_0 et les inégalités triviales. Notons x^0 la solution optimale de (P_0) . Donner un algorithme polynomial permettant de résoudre le problème de séparation des inégalités de P-chaînes pour x^0 . (Indication : considérer le graphe de précedence associé à (V, \prec)).

b) Qu'en déduire pour (P) et qu'en déduire pour le problème de l'antichaîne maximale ?

Exercice 2 (12 points)

On considère un problème de lot-sizing à une seule référence pour un horizon discret de T périodes. La référence correspond à un produit fini pouvant être neuf ou recyclé.

Le paramètre d_t représente la demande du produit fini à la période t , $t \in \{1, \dots, T\}$ que l'on supposera strictement positive. On suppose qu'une quantité de produits retournés q_t est disponible à la période t . On distinguera donc pour la suite deux types de stocks : celui lié au produit fini utilisable (neuf ou recyclé) et celui lié aux quantités retournées. Les paramètres h_t^u , h_t^r , représentent le coût unitaire de stockage à la période t pour les produits utilisables et les produits retournés respectivement pour $t \in \{1, \dots, T\}$. On suppose en outre que $h_t^u > h_t^r$. Aucune contrainte de capacité n'est prise en compte.

Différentes hypothèses peuvent être posées concernant les coûts de lancement (setup). Elles sont détaillées dans ce qui suit.

Partie 1 : Recyclage exclusif

On suppose dans cette partie que la quantité de produits retournés couvre la demande totale sur l'horizon de planification. Aucune unité de produit neuf ne sera fabriquée.

Question 1 (0.5/12) — Donner une condition sur les paramètres q_t et d_t garantissant qu'une instance du problème est réalisable.

On définit un paramètre de coût fixe f_t^r induit si une opération de recyclage a lieu à la période t . Le paramètre p_t^r , représente le coût unitaire de recyclage à la période t pour les produits retournés pour $t \in \{1, \dots, T\}$.

On s'intéresse alors au calcul du plan de production pour les produits recyclés permettant de satisfaire la demande totale tout en minimisant les coûts de recyclage (fixe et variable) et de stockage (des produits utilisables et des produits retournés) sur l'horizon de planification.

On note x_t^r la quantité recyclée à la période t et s_t^r (respectivement s_t^u) la valeur du stock de produits retournés (respectivement utilisables) à la fin de la période t . La variable binaire y_t^r vaut 1 si une opération de recyclage a lieu à la période t , 0 sinon. On supposera que le stock initial de produits utilisables ainsi que celui de produits retournés est nul au début de l'horizon de planification.

Question 2 (1.5/12) — Proposer une formulation du problème. Justifier la réponse.

Question 3 (1/12) — Donner une représentation sous forme de réseau à coût fixe du problème.

Question 4 (1.5/12) —

- Proposer une reformulation du problème dans laquelle les variables de stock sont éliminées. Justifier la réponse.
- Quel problème ULS particulier est obtenu? (préciser la nature des contraintes additionnelles)

Partie 2 : Recyclage et production

On suppose dans cette partie que la quantité de produits retournés ne permet pas de couvrir la demande totale sur l'horizon de planification. Il faudra alors fabriquer des produits neufs selon un plan de production à définir.

Partie 2.1 : Setup partagé

On suppose en outre dans cette partie qu'un coût fixe de lancement f_t est induit si une opération de production ou de recyclage a lieu à la période t (cela correspond au cas où la même ligne de production est utilisée). On ne comptera qu'un seul setup si les deux opérations ont lieu (le setup est ici partagé).

Par ailleurs, on introduit x_t^n la quantité de produit neuf fabriquée à la période t . La variable binaire y_t vaut 1 si une opération de recyclage ou de production a lieu à la période t , 0 sinon. On suppose que les coûts unitaires de production et de recyclage sont nuls. On suppose que le stock initial de produits utilisables ainsi que celui de produits retournés est nul au début de l'horizon de planification.

On s'intéresse alors au calcul du plan de production pour les produits recyclés et les produits neufs permettant de satisfaire la demande totale tout en minimisant les coûts de setup et de stockage (des produits utilisables et des produits retournés) sur l'horizon de planification.

Question 5 (1/12) — Proposer une formulation du problème. Justifier la réponse.

Question 6 (3/12) — On souhaite montrer qu'il existe une solution optimale $\Pi = (y, x^n, x^r, s^u, s^r)$ satisfaisant la propriété $s_{t-1}^u y_t = 0$ pour $t \in \{1, \dots, T\}$.

a) Que peut-on dire pour $t = 1$?

b) On considère alors deux périodes de lancement consécutives k et l avec $1 \leq k < l \leq T$ dans la solution Π . Montrer que si $s_{l-1}^u > 0$ alors une solution Π' de coût strictement inférieur au coût de Π peut être construite à partir de Π .

c) En déduire la propriété proposée.

Question 7 (1/12) — Proposer une autre propriété de dominance impliquant la quantité de produits neufs en vous inspirant de la propriété ZIO vue en cours. Justifier la réponse (aucune preuve complète n'est ici attendue).

Question 8 (0.5/12) — Que pensez-vous de la complexité de ce problème? Justifier la réponse (aucune preuve complète n'est ici attendue).

Partie 2.2 : Setup non partagé

On suppose dans cette partie qu'un coût fixe de lancement f_t^n (respectivement f_t^r) est induit si une production (respectivement un recyclage) a lieu à la période t . La production fait référence au produit neuf. La variable binaire y_t^n (respectivement y_t^r) vaut 1 si une opération de production (respectivement recyclage) a lieu à la période t , 0 sinon. On suppose que les coûts unitaires de production et de recyclage sont nuls. On suppose que le stock initial de produits utilisables ainsi que celui de produits retournés est nul au début de l'horizon de planification.

On s'intéresse alors au calcul du plan de production pour les produits recyclés et celui des produits neufs permettant de satisfaire la demande totale tout en minimisant les coûts de setup (production et recyclage) et de stockage (des produits utilisables et des produits retournés) sur l'horizon de planification.

Question 9 (1/12) — Proposer une formulation du problème. Justifier la réponse.

Question 10 (1/12) — En vous appuyant sur l'instance suivante : $T = 2$, $h^r = 1$, $h^u = 2$, $d = (2, 100)$, $q = (1, 98)$, $f^r = 10$, $f^n = 10$, que peut-on dire des propriétés définies dans la partie 2.1? Justifier la réponse.