M2 Androide - Sorbonne Université
2018-2019

Module MAOA: Modèles et Applications en Ordonnancement et optimisation combinAtoire

Projet

"Autour du problème des tournées de techniciens"

Le projet qui vous est proposé dans ce module MAOA présente un problème d'Optimisation Combinatoire en Recherche Opérationnelle. Son objectif est de traiter un sujet issu d'un problème industriel jusqu'à la réalisation d'un logiciel de résolution en utilisant différentes méthodes approchées et exactes. Il s'agit ainsi de développer un logiciel permettant de résoudre des instances du problème en tenant compte de sa vitesse d'exécution et surtout sur la qualité de la solution obtenue.

Nous nous intéressons ici au problème d'Optimisation Combinatoire connu dans la littérature scientifique sous le nom des "Tournées de techniciens" que l'on peut traduire en anglais par "Resource Constrained or Skill-based Routing Problem".

Une première partie va s'intéresser au problème classique de tournées de véhicules. Il est à noter que cette partie est assez cadrée.
Une deuxième partie vous propose d'aborder certains aspects plus vastes et récents des tournées de spécialites. Il est à noter que cette partie abordera davantage de notions issues de travaux de recherche récents.

1 Le problème de tournée de véhicules (VRP)

Soit un graphe orienté complet $G = (\mathcal{N}, A)$ possédant $n+1$ sommets notés $\mathcal{N} = \{0, 1, ..., n\}$: on appelle le sommet 0 le dépôt et les sommets $\mathcal{N}_C = \mathcal{N} \setminus \{0\}$ les revendeurs (ou clients). Les arcs sont donc l'ensemble $A \subseteq \{(i,j) \mid i,j \in \mathcal{N}, i \neq j\}$. A chaque client $i \in \mathcal{N}_C$, on associe une valeur réelle positive d_i appelée *demande* du sommet i. A chaque arc $(i,j) \in A$, on associe un *coût* c_{ij} strictement positif correspondant au coût de transport du sommet i au sommet j. Le *problème de tournées de véhicules* (Vehicule Routing problem ou VRP) consiste à déterminer des tournées de véhicules partant du dépôt et passant livrer la quantité demandée par chacun des revendeurs.
On considère une flotte $K = \{1, \ldots, m\}$ de m véhicules identiques qui ont chacun une capacité maximale Q: un véhicule peut transporter au plus Q quantité de produits à partir du dépôt. On appelle *tournée* un circuit non vide de G passant par le sommet 0 et dont la somme des demandes des sommets du cycle est inférieure à Q. Comme le graphe G est complet, on peut écrire une tournée T comme une séquence $(i_0, i_1, ..., i_p)$ de sommets où $i_0 = 0$ et $\sum_{l=1}^{p} d_{i_l} \leq Q$.

Le problème VRP consiste à déterminer un ensemble d'au plus m tournées $(T_1, ..., T_k)$, $k \leq m$, telles que, chaque revendeur soit servi par exactement une tournée et que la somme totale des coûts des arcs utilisés est minimum.
On suppose qu'un revendeur peut être servi par une unique tournée, *i.e.* $d_i \leq Q$ pour tout $i \in \mathcal{N}_C$. On peut noter que dans une solution, les tournées n'ont aucun client en commun en

dehors du sommet 0.

1.0.1 Métaheuristique pour le VRP

- Heuristique initiale:

Le problème de partition des clients en m tournées (réalisables) est déjà un problème difficile. Il s'agit du problème du Bin-Packing qui revient à déterminer s'il existe une répartition des clients en m boîtes satisfaisant chacune la contrainte de sac-à-dos de la capacité d'un véhicule.
Remarquons que si cette première phase de répartition est obtenue, une deuxième phase revient à résoudre m problèmes du voyageur de commerce (TSP) pour lequel des techniques gloutonnes sont bien connues (le plus proche voisin par exemple).

Pour résoudre l'étape de partition des clients, on peut lister trois techniques:
- tenter de résoudre exactement ce problème (donc sans prendre en compte les distances) par PLNE: cela n'est possible que pour des petite tailles.
- tenter de résoudre heuristiquement ce problème pour exactement m tournées. Il faut alors une méthode méta-heuristique dédiée.
- soit relaxer la contrainte du "m tournées" en résolvant un problème avec un nombre potentiellement plus grand de tournées; puis en confiant l'objectif de réduire le nombre de tournées à une étape ultérieure.

- Méthode itérative:

A l'issue d'une étape initiale, on obtient une solution réalisable ou alors une solution utilisant plus de m tournées (chacune réalisable).
Une métaheuristique itérative peut alors être utilisée sur la base de plusieurs voisinages:
- les voisinages classiques du TSP (2-opt) pour améliorer chaque tournée indépendemment.
- la possiblité pour un client de changer de tournées
- supprimer une tournée vide
- éventuellement ajouter une tournée vide si le nombre est inférieur à m

Si le nombre de tournées de la solution initiale est supérieur à m, il est possible d'utiliser dans un premier temps une fonction objective artificielle pour forcer à réduire le nombre de tournées.

D'autres méta-heuristiques sont bien entendu possible (algorithme génétique, etc).

1.0.2 Formulations PLNE pour le VRP

Il existe plusieurs formulations PLNE classiques pour ce problème, en voici deux qui nous intéressent pour ce projet
- une formulation compacte basée sur les inégalités de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)
- une formulation à nombre exponentiel de contraintes, basée sur les coupes

D'autres formulations existent, comme celles indexées sur les véhicules (qui peuvent être vues comme des formules où l'on désagrège les variables des deux citées ci-dessus), ou des formulations à nombre exponentiel de variables qui se résolvent par génération de colonnes.

Attention: si les instances ont des coûts symétriques, il peut être intéressant de prendre une formulation utilisant des variables non-orientées. Or la scection suivante présente des versions orientées!

- *Formulation MTZ*

On considère des variables binaires x_{ij} si un véhicule utilise l'arc $(i,j) \in A$ et des variables réelles w_i associées à chaque sommet $i \in \mathcal{N}_C$.

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{(i,j)\in A} & c_{ij}x_{ij} && \\
\sum_{j=1}^{n} x_{0j} &\le m && && (1)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{i0} &\le m && && (2)\\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 && \forall i \in \mathcal{N}_C, && (3)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 && \forall j \in \mathcal{N}_C, && (4)\\
w_i - w_j &\ge d_i - (Q + d_i)(1 - x_{ij}) && \forall (i,j) \in A, && (5)\\
0 \le w_i &\le Q && \forall i \in \mathcal{N}_C &&\\
w_i &\in I\!R && \forall i \in \mathcal{N}_C &&\\
x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall (i,j) \in A. &&
\end{aligned}
$$

Les contraintes de degré (1)-(4) imposent qu'il y ait exactement un arc entrant et un arc sortant pour chaque revendeurs, alors que le dépôt peut avoir jusqu'à m arcs entrants et m arcs sortants. Ces inégalités suffisent à décrire des tournées partant du dépôt, malheureusement il peut y avoir des sous-tournées (comme dans le problème du voyageur de commerce) qui ne passe pas par le dépôt. Pour briser les sous-tournées, on ajoute ici les contraintes MTZ (5) qui indiquent qu'à chaque arc $(i,j) \in A$ avec $i,j \neq 0$, pris dans la solution, le sommet j a une valeur w_j inférieure à $w_i - d_i$ (si $x_{ij} = 1$, alors $w_j \le w_i - d_i$). Ainsi, tout circuit qui ne passe pas le sommet 0 est impossible. En revanche, si l'arc n'est pas pris, l'inégalité reste bien valide (si $x_{ij} = 0$, alors $w_j - w_i \le Q$). Les contraintes MTZ ont une seconde utilité pour la formulation: elles permettent de limiter les tournées à charger au plus Q unités de produit par véhicule. En effet, on peut voir que w_i est une borne supérieure sur la quantité chargée dans le véhicule après le passage d'un véhicule au sommet i: sur une tournée $t = (i_0, i_1, ..., i_p)$ si on somme les contraintes MTZ des arcs, on obtient $w_{i_1} - w_{i_p} \ge \sum_{l=1}^{p} d_{i_l}$, donc si w_{i_p} est la charge du véhicule au retour de sa tournée, w_{i_1} est la charge de la tournée, or $w_i \le Q$ pour chaque revendeur i.

- *Renforcement*

Une formulation plus forte peut venir renforcer la formulation MTZ précédente en utilisation des inégalités brisant les sous-tournées, c'est-à-dire empêchant l'existence de circuit ne passant par le dépôt 0.

Par exemple les "blossom inequalities" qui sont utilisées dans le polyèdre des couplages et dans celui du voyageur de commerce.

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leq |S|-1 \qquad \forall S\subset \mathcal{N}_C, |S|\geq 2, \tag{6}$$

Ces inégalités indiquent que, dans tout sous ensemble de s clients, on ne peut pas avoir plus de s arcs: en effet, si on a s arcs pour s sommets, cet ensemble de clients induit un circuit ne passant pas par 0.

En utilisant les égalités de degré (3), on peut transformer les inégalités "blossom" en inégalités dites de coupes. En effet, considérons $S \subset \mathcal{N}_C$, avec $|S| \geq 2$, alors sommons les inégalités (3) sur S, on obtient:

$$\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = |S|$$

or on peut remarquer que les arcs issus d'un sommet de S sont partitionnés entre ceux allant vers un autre sommet de S et ceux sortant de S, c'est-à-dire

$$\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} + \sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'inégalité (6), on obtient alors les inégalités de coupes

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall S\subset \mathcal{N}_C, |S|\geq 2, \tag{7}$$

Ces inégalités de coupes (8) sont donc exactement les inégalités de blossom: il n'y a donc aucun impact de ces inégalités dans la formulation. Ces deux inégalités sont en même quantité exponentielle dans la formulation. En revanche, elles diffèrent sur leur algorithme de séparation: les inégalités de blossom sont séparables en temps polynomial, mais avec un degré de polynôme élevé par l'algorithme de Edmonds et Trotter; alors que les inégalités de coupes sont séparables plus efficacement au prix de la recherche d'une coupe minimum dans un graphe (voir cours).

- *Formulation par les coupes*

Dans cette formulation non-compacte, on remplace totalement les contraintes MTZ et les variables MTZ par l'inégalité suivante:

$$\sum_{i\in W}\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus W} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{\sum_{i\in W} d_i}{Q} \right\rceil \qquad \forall W\subset\{1,\ldots,n\}, W\neq\emptyset, \tag{8}$$

Ces contraintes (8) sont dites *contraintes de coupes*. L'idée principale est la suivante: la demande totale d'un ensemble W de clients est $\sum_{i \in W} d_i$, si elle est non nulle, le nombre de tournées nécessaires pour servir les clients de W est supérieur à $\frac{\sum_{i \in W} d_i}{Q}$. On peut montrer que cette inégalité est suffisante pour formuler le problème VRP (voir exo de cours à venir).

Les inégalités de coupes ont un algorithme de séparation NP-difficile pour le cas général. Mais pour le cas entier, le problème est très simple: il suffit de regarder s'il existe un cycle ne passant pas par 0: ainsi on peut utiliser ces inégalités dans une séparation ne coupant que les points entiers; ceci donne une résolution exacte du problème.
D'autre part, on sait efficacement les séparer par des méthodes approchées (taboo search) basées sur les inégalités où la borne est relaxée en $\frac{\sum_{i \in W} d_i}{Q}$ pour lesquelles le problème de séparation est alors polynomial. A l'inverse, on peut noter que le terme de droite des inégalités de coupes peut être amélioré par des bornes plus grandes, mais le problème de séparation associé est alors encore plus difficile à résoudre. (Voir documentation annexe à venir)

2 Le problème de tournées de techniciens

On considère ici des problèmes des clients pour lesquels une intervention requiert des compétences particulières. Les tournées de véhicules sont alors plutôt appelées *tournées de techniciens* et un technicien possède ou non les compétences requises pour servir un client.

On peut trouver de nombreux cadres où les tournées de techniciens ont leur importance. Par exemple, dans l'industrie de services (maintenances de matériels, techniciens de surfaces spécialisées,...), dans les centres de soins (infirmiers, aide-soignant,...) mais aussi dans la manutention où un technicien est accompagné d'un véhicule particulier (pelleteuse, porte-charge,...). On peut trouver une liste plus exhaustive dans la recension (ou "survey") [1].

Différents problèmes peuvent être issus de cette notion de compétences suivant la définition que l'on désire considérer. On peut citer en particulier l'article [2] qui propose un modèle complet et plusieurs formulations mathématiques du problème.

3 Contenu du projet

3.1 Cadre du sujet

La difficulté de résolution d'un problème d'optimisation réaliste comme celui du VRP avec prise en compte des compétences intègre ainsi deux problèmes très classiques d'Optimisation Combinatoire en Recherche Opérationnelle: le problème de tournée de véhicules et celui d'affectation. Ce problème est apparu récemment dans la littérature scientifique et représente un challenge en RO de part sa difficulté à combiner les difficultés.

Dans ce sujet, il vous est demandé:
- **partie 1:** de traiter le problème VRP classique dans le cadre de la description faite dans la section 1
- **partie 2:** et de considérer un problème provenant de la prise en compte des compétences. Pour cela, il est important de lire les introductions des deux articles [1] et [2]. Une alternative est possible à la deuxième partie: approfondir la résolution du problème du VRP en tentant de résoudre de très grandes instances du problème.

Il est souhaité que l'ensemble des binômes aient ainsi une diversité importante dans les sujets et dans les approches considérées.

Le projet est ainsi divisé en deux parties. Pour chacune des parties, il est demandé de mettre en œuvre les trois programmes: résolution heuristique, résolution exacte et évaluation expérimentale.

3.2 Résolution heuristique

Même si le but de ce projet (ainsi que de l'UE MAOA) est une résolution exacte du problème, il est utile de commencer votre étude par la mise en place d'une heuristique ou d'une méta-heuristique. Cela vous permettra d'apréhender facilement le problème et ses instances, ainsi que d'avoir un élément de comparaison pour le reste du projet.

D'autre part, la nature NP-difficile des problèmes traités issus d'applications réelles rendent nécessaires la mise au point d'une telle approche heuristique.
Les objectifs sont:
- permettre de produire une première solution utile aux méthodes exactes,
- produire une solution quelque soit la taille de l'instance à traiter,
- la comparaison entre cette méthode et les bornes obtenues par les méthodes exactes vous permettra dans certains cas d'avoir une garantie expérimentale de vos solutions.

3.3 Résolution exacte et bornes par PLNE

Il vous est demandé de mettre en place au moins une méthode exacte **performante** ou un calcul de **bornes pertinentes**, en utilisant la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE).
Les objectifs possibles sont:
- résoudre exactement des instances de tailles réduites,
- fournir des bornes pour le problème pour des tailles moyennes,
- utiliser les techniques d'arrondi à partir des solutions fractionnaires,

Les tailles réduites vous permettront également de vérifier si vos solutions heuristiques sont de bonne qualité.

Nous vous proposons, comme lors des séances de TME, d'utiliser l'outil CPLEX avec concert technology.

3.4 Evaluation expérimentale

Comme évoqué ci-dessus, une évaluation expérimentale est nécessaire pour valider vos différentes méthodes approchées et exactes, en utilisant des bornes pour obtenir des garanties expérimentales. La meilleure façon de convaincre de la qualité de votre travail est de pouvoir donner des statistiques (courbes, chiffres éloquents,...) pour illustrer la performance de vos outils. N'hésitez pas à avoir recours à des tableurs ou des logiciels de tracé de courbes (gnuplot par exemple).

4 Instances

Voir les sources des instances et les sections de chacune des parties.

Il vous est demandé d'utiliser un ensemble d'instances de tailles et de dimensions suffisantes pour effectuer des tests expérimentaux. La nature de ces instances (particularités, corrélation,...) est aussi à examiner de près.

Il est aussi très utile d'avoir une visualisation de ces instances (voir document concernant les instances).

5 Rendu du projet

Le projet nécessite un travail personnel qui s'étale sur tout le semestre: il vous sera demandé:
- un rapport synthétique
- une production logicielle
- une validation expérimentale
- une présentation finale de votre projet devant vos camarades.

Le projet est à réaliser en binômes.

Il vous est demandé un travail régulier afin de pouvoir rendre le projet complet à temps: n'hésitez pas à discuter par mail avec les encadrants tout au long du projet sur des questions constructives ou des problèmes particuliers d'ordre théorique ou technique. Le sujet est assez libre pour laisser place à l'intuition et à l'initiative.

5.1 Evaluation du projet

Plusieurs facteurs seront pris en compte dans l'évaluation:
- Le but de ce projet est clairement d'aboutir à un produit fini: c'est-à-dire à un logiciel complet permettant de résoudre un problème de Recherche Opérationnelle allant de l'instance à une solution compréhensible. Pour cela, vous pouvez par exemple utiliser en entrée un fichier texte contenant les données du problème pratique et en sortie une visualisation compréhensible de la solution (graphique,...).
- Un des objectifs est d'obtenir un logiciel performant. Vous devez fournir une évaluation de ses performances par rapport aux instances fournies et à des instances générées aléatoirement, en utilisant des mesures expérimentales.
- L'apport d'idées nouvelles (originalité), de recherche dans la littérature scientifique, de mise au point d'algorithmes fins,... sera bien évidemment pris en compte.

Le projet proposé est vaste: à chacun de trouver la partie et le développement qui convient à ses capacités informatiques et mathématiques.

5.2 Calendrier du projet

Mercredi 10 octobre 2018: début du projet.

Mercredi 24 octobre 2018: séance de travail avec les encadrants: Décisions par binôme du déroulé de votre travail.

Mercredi 7 et 28 novembre, 19 décembre 2018 et 9 janvier 2019: Séances de travail avec les encadrants.

Soutenances: Mercredi 16 Janvier 2019 (et non plus 23 janvier)

Date limite de rendu de projet: Vendredi 25 Janvier 2019.

References

[1] D.C. Paraskevopoulos, G. Laporte, P.P. Repoussis and C.D.Tarantilise. Resource constrained routing and scheduling: Review and research prospects. European Journal of Operational Research 263-3, 737-754 (2017). `https://www.cirrelt.ca/DocumentsTravail/CIRRELT-2016-03.pdf`

[2] P. Cappanera, L. Gouveia and M.G. Scutellà. Models and valid inequalities to Asymmetric Skill-Based Routing Problems, EURO Journal on Transportation and Logistics, 2(1-2), 29-55, (2013) `http://www-desir.lip6.fr/~fouilhoux/documents/Cappanera2013_Article_ModelsAndValidInequalitiesToAs.pdf`