Master Androide - Module MAOA - Sorbonne Université

Recherche Opérationnelle
et Optimisation Combinatoire

Cahier de Travaux Manuels Encadrés (TME)
sur le logiciel PORTA

1 Caractérisation de polyèdres

1.1 Polytopes et polyèdres

Dans ce document, on considère des polyèdres plongés dan $I\!R^n$ pour un n connu.

• Un polytope P de pleine dimension peut être entièrement décrit :
- soit par la donnée de tous ses points extrêmes (dont il est l'enveloppe convexe)
- soit par la donnée d'un système contenant au moins une inégalité pour chacune de ses facettes.

Un système décrivant un polype peut-être minimal s'il contient exactement une inégalité par facette. Ainsi, un système non-minimal contiendra des inégalités valides ne définissant pas de facettes, ou alors plusieurs inégalités décrivant la même facette.

• Plus généralement, un polytope P, qui n'est pas de pleine dimension, peut-être décrit :
- soit par la donnée de tous ses points extrêmes
- soit par un système contenant au moins $n - dim(P)$ égalités et la donnée d'au moins une égalité pour chacune de ses facettes.

Un système minimal contiendra alors exactement $n - dim(P)$ égalités linéairement indépendantes et exactement une inégalité par facette.

• Encore plus généralement, un polyèdre P peut-être non borné et P est alors décrit :
- soit par la donnée de tous ses points extrêmes plus un ensemble de vecteurs R (appelés rayons extrêmes). Si on note Q l'enveloppe convexe des points extrêmes, P est alors le cone convexe obtenu par l'intersection de tous les cônes de rayons R issus des points de Q.
- soit par un système d'égalités et d'inégalités.

Bien entendu, il y a des polyèdres non bornés de dimensions quelconques.

1.2 Passage

Le "passage" d'une description par les points (ou points et rayons) à une desciption par un système (et inversement) est un problème difficile. Notez que la sortie d'une tel algorithme est fréquemment exponentielle, donc ce n'est pas un problème dans NP.

Le principe algébrique repose basiquement
- des inégalités vers les points : de calculer les intersections
- des points vers les inégalités : d'utiliser la définition de l'enveloppe convexe pour obtenir des inégalités ou égalités.

Dans les deux cas, la description passe par un espace de plus grande dimension, puis une projection de Fourier-Motzkin est appliquée.

A partir d'une dimension de 10 ou 12, il faut souvent plusieurs semaines de calculs !

---

2 Le logiciel PORTA

Le nom PORTA est l'abrévation de *POlyhedron Representation Transformation Algorithm*. Il s'agit d'une collection de programmes pour analyser les polyèdres.

Ce logiciel a été écrit par Thomas Christof. A sa suite, il a été maintenu par Andreas Löbel puis par Sebastian Schenker. Le site pas plus officiel que ça mais bon c'est le seul est `http://porta.zib.de` où le logiciel est cité sous licence GNU General Public Licence.

Son installation est simple sous Linux : il suffit de décompacter l'archive, d'aller dans le répertoire gnu-make et de taper la commande "make".
Les différents programmes sont alors compilés dans le répertoire "gnu-make/bin".
A la PPTI, Porta a été déjà compilé dans le répertoire "/Vrac/porta-1.4.1"... mais pour des utilisations lourdes, il est conseillé de l'installé en local sur une machine.
Pour utiliser facilement les programmes à la PPTI, ajouteé dans le fichier bashrc (ou bash_profile suivant les cas) :

```
export PATH=$PATH:/Vrac/porta-1.4.1/gnu-make/bin:.
```

Les informations complètes sont dans les fichiers README et surout INFO. La suite de ce document pointe sur quelques utilisations de Porta dans le cadre du cours MAOA.

2.1 Les formats et les programmes

Porta contient plusieurs programmes dont

dim retourne la dimension d'un polyèdre

traf passe d'une description point (ou point-rayon) à un système minimal d'égalités et d'inégalités... et inversement !

vint énumère tous les points entiers solutions d'un système d'inégalités

Porta contient d'autres programmes qui ne sont pas commentés ici.

Tout repose sur deux formats :
- l'un d'extension ieq décrivant les inégalités
- l'autre d'extension poi décrivant les points

qui sont décrits dans la partie exercice.

Pour **traf** :
La ligne de commande `traf fichier.ieq` produit un fichier `fichier.ieq.poi` qui est le résultat de la transformation des inégalités vers les points.
Et inversement La ligne de commande `traf fichier.poi` produit un fichier `fichier.poi.ieq` qui est le résultat de la transformation des points vers les inégalités.

Pour **vint** :
La ligne de commande `vint fichier.ieq` produit un fichier `fichier.poi` qui liste tous les points entiers contenus dans le système.
Attention : vint nécessite des champs LOWER_BOUND et UPPER_BOUND spécifique à ce programme (voir plus loin).

---

3 Exercice rapide sur le polytope du stable

3.1 Cycle à 5 sommets

On considère le graphe C_5 d'un cycle à 5 sommets, numérotés 1,. . . 5.

Question 1 *Enumèrer toutes les inégalités triviales et d'arêtes de la formulation PLNE du problème du stable sur* C_5.

Au format PORTA "ieq", on obtient ceci

```
DIM = 5

VALID
```

```
0 0 0 0 0

INEQUALITIES_SECTION
x1+x2<=1
x2+x3<=1
x3+x4<=1
x4+x5<=1
x5+x1<=1
x1>=0
x2>=0
x3>=0
x4>=0
x5>=0
x1<=1
x2<=1
x3<=1
x4<=1
x5<=1
END
```

où

- les variables x_i correspondent à la prise ou non d'un sommet dans un stable
- DIM désigne le nombre de variables. **Attention :** ce n'est pas la dimension.
- VALID est un point réalisable : ici le vecteur nul qui est un stable
- et une section des inégalités d'arêtes et triviales.

Remarque : les variables dans porta sont toujours x_1, x_2,... ce qui est super pour le polytope du stable mais vraiment pas très pratique pour des polyèdres où la numération des objets (par exemple des arêtes) est tout autre.

Question 2 *Ecrivez le texte précédant dans un fichier* `cycle5.ieq`. *Utiliser* `traf` *pour obtenir la description sommet correspondante.*

Normalement vous allez obtenir le fichier `cycle5.ieq.poi` suivant :

```
DIM = 5

CONV_SECTION
(  1)   0   0   0   0   0
(  2) 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2
(  3)   0   0   0   0   1
(  4)   0   0   0   1   0
(  5)   0   0   1   0   0
```

```
(  6)    0    1    0    0    0
(  7)    1    0    0    0    0
(  8)    0    0    1    0    1
(  9)    0    1    0    0    1
( 10)    0    1    0    1    0
( 11)    1    0    0    1    0
( 12)    1    0    1    0    0
END
```

Il s'agit de tous les points extrêmes de la formulation linéaire décrite dans `cycle5.ieq`. On peut noter que cette formulation n'est pas entière car elle possède un point extrême fractionnaire !

On veut à présent connaître un système minimal d'inégalités décrivant le polytope des stables associé à C_5. Pour cela, on va procéder en 2 temps :

- d'abord on va énumérer tous les vecteurs d'incidence d'un stable de C_5
- puis utiliser **traf** pour obtenir l'enveloppe de ces points.

Question 3 *Obtenir tous les vecteurs d'incidence des stables de C_5.*

On peut les énumérer à la main mais on peut aussi utiliser `vint` : pour cela, on ajoute au fichier `cycle5.ieq` à la fin

```
LOWER_BOUNDS
0 0 0 0 0

UPPER_BOUNDS
1 1 1 1 1
```

qui précisent les bornes entières des variables

Normalement, vous devez obtenir le fichier `cycle5.poi`

```
DIM =  5

CONV_SECTION
(  1) 0 0 0 0 0
(  2) 0 0 0 0 1
(  3) 0 0 0 1 0
(  4) 0 0 1 0 0
(  5) 0 0 1 0 1
(  6) 0 1 0 0 0
(  7) 0 1 0 0 1
(  8) 0 1 0 1 0
(  9) 1 0 0 0 0
```

```
( 10) 1 0 0 1 0
( 11) 1 0 1 0 0

END
```

Question 4 *En utilisant* `traf cycle5.poi`*, obtenez alors* `cycle5.poi.ieq`*, c'est-à-dire le polytope du stable pour* C_5 *!*

Question 5 *Que remarquez-vous sur cette description minimale* `cycle5.poi.ieq` *?*

Question 6 *Sans utiliser Porta, que sera* `cycle5.poi.ieq.poi` *?*

3.2 Cycle à 5 sommets

Question 7 *Refaire la même démarche pour la roue* W_5*, c'est-à-dire un cycle* C_5 *plus un sommet numéroté 6 qui est relié à tous les sommets du cycle.*

Question 8 *Interpréter chacune des inégalités du polytope du stable pour* W_5*.*

3.3 Prisme

Même démarche sur ce graphe (qui est issu du graphe appelé "prisme").