Exercices

Modélisation PLNE, algorithmes de coupes et approches polyédrales

Pierre Fouilhoux

---

1 Modélisation PLNE

Exercice* 1 : *Problème de production (tiré d'un livre de 1ereS)

Un fabriquant de yaourt produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de fraise, de lait et de sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

Les matières premières sont en quantité limitée: 800 kilos de fraises, 700 kilos de lait et 300 kilos de sucre. La vente des yaourts A rapportent 4€ par kilo et les yaourts B 5€ . On considère que, lors du mélange à froid, aucune perte n'a lieu, ainsi le poids final du yaourt est celui de ses ingrédients.
a) Donner une formulation du problème sous la forme d'un programme linéaire.
b) Donner la représentation graphique du problème.
c) Donner la solution optimale.

Exercice* 2 : *Problème de transport

Une entreprise de construction d'automobiles possède 3 usines à Paris, Strasbourg et Lyon. Elle a besoin d'acheminer les métaux nécessaires à partir du Havre ou de Marseille. Chaque usine nécessite hebdomadairement 400 tonnes à Paris, 300 tonnes à Strasbourg et 200 tonnes à Lyon. Les ports du Havre et de Marseille peuvent fournir respectivement 550 tonnes et 350 tonnes.
Les coûts de transport entre ces villes sont donnés en kilo-€ par tonne dans le tableau suivant.

	Paris	Strasbourg	Lyon
Le Havre	5	6	3
Marseille	3	5	4

Proposer une modélisation de ce problème de transport de manière à satisfaire la demande, à partir des quantités disponibles et en minimisant les coûts de transport.

Exercice* 3 : *Centres de loisir

Une région est divisée en six zones (zones 1,...,6). La commune souhaite construire des centres de loisir dans certaines de ces zones. Et elle désire monter un nombre minimum de centres de telle manières que, pour chaque zone, il existe au moins un centre qui se trouve à au plus 15 minutes (en voiture) de cette zone. Le temps nécessaire pour aller d'une zone à l'autre est donné dans la table suivante:

de	zone 1	zone 2	zone 3	zone 4	zone 5	zone 6
zone 1	0	10	20	30	30	20
zone 2	10	0	25	35	20	10
zone 3	20	25	0	15	30	20
zone 4	30	35	15	0	15	25
zone 5	30	20	30	15	0	14
zone 6	20	10	20	25	14	0

3.1) Formuler le problème qui consiste à déterminer le nombre minimum de centres à construire ainsi que les zones où ceux-ci doivent être construits comme un programme linéaire en nombres entiers.

3.2) Modifier le programme pour qu'il corresponde à la contrainte suivante: si un centre est construit dans la zone 1, alors un centre doit être construit dans la zone 4.

3.3) Quelle inégalité permet de modéliser la contrainte suivante: une zone au moins parmi les zones 1, 2 et 3 doit avoir au moins un centre à au plus 15 minutes. Est-il nécessaire de l'ajouter au programme?

3.4) En utilisant les idées de la question précédente, peut-on ainsi réduire la formulation en ôtant des inégalités?

Exercice 4 ***: Diététique avare***

Le cuisinier de l'hôtel doit préparer le petit-déjeuner de La Castafiore. La cantatrice doit suivre un régime auquel son avarice donne raison. Le cuisinier doit donc composer un menu comportant au plus 1000 calories et qui soit le moins cher possible, à partir des ingrédients suivants:

	Poids unitaire en grammes	Calories par gramme	Prix unitaire en euros
toast	40	3,4	1,50
miel (par toast)	15	2,8	0,50
confiture (par toast)	10	5	0,40
thé (une tasse)	100	0,2	1,00
lait (un verre)	100	0,5	0,70
beurre (par toast)	10	8	0,30
oeuf (sur le plat)	60	1	0,50
bacon (la tranche)	20	8	1,00
jus d'orange	30	4	1,20
sucre (morceau)	5	4	0,10

Exercice 5 ***: Décision en production industrielle***

Une entreprise produisant des billes de plastique veut s'implanter sur une nouvelle zone géographique. Ces billes de plastique sont la matière première de nombreux objets industriels (sièges, manches d'outils, bidons,...). L'entreprise a démarché n clients et prévoit de vendre, sur un horizon de 5 années à venir, d_i tonnes de billes de plastique à chaque client $i \in \{1, ..., n\}$. L'entreprise dispose de m sites potentiels $s_1, ..., s_m$ pour installer ses usines. On a évalué à c_j euros le coût d'installation d'une usine sur le site s_j, $j = 1, ..., m$. Les usines prévues ne sont pas toutes de même capacité de production: un site s_j aura une capacité de M_j tonnes de billes sur les 5 années à venir, $j = 1, ..., m$. On suppose que le coût de production est indépendante du lieu de production. Enfin, on connaît les coûts de transports par tonne c_{ij} entre un client i et un site s_j, pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$.

L'entreprise souhaite déterminer les sites sur lesquels établir ses usines pour pouvoir satisfaire la demande de ses clients tout en minimisant le coût total (installation, production et livraison) sur les 5 prochaines années.

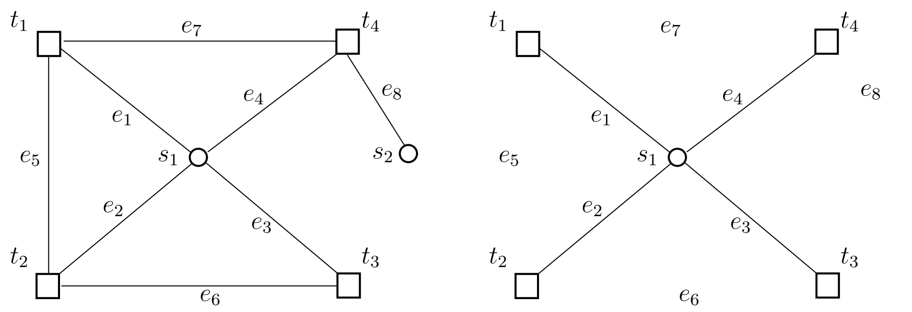
Donner une modélisation de ce problème par un PLNE.

2 Problème de l'Arbre Steiner

Soit un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On associe à toute arête $e \in E$ un poids $w(e)$ strictement positif. L'ensemble V des sommets est partitionné entre l'ensemble T des *terminaux* et l'ensemble S des *sommets Steiner*. Le *problème de l'arbre Steiner* dans G consiste à déterminer un sous-graphe de G qui soit un arbre couvrant tous les terminaux et dont le poids total des arêtes est minimal. Remarquons qu'un arbre Steiner peut contenir ou non des sommets Steiner, qui peuvent être ainsi vus comme des sommets optionnels: un sommet Steiner ne sera pris dans la solution que s'il est nécessaire ou s'il permet d'obtenir une meilleure solution.

On rappelle qu'un un arbre est un graphe connexe sans cycle. Pour un sous-graphe H de G, on notera $w(H)$ la somme des poids des arêtes de H.

Pour illustrer les définitions, ci-dessous à gauche un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ associé à l'ensemble des terminaux $T_1 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ et comportant 2 sommets Steiner s_1 et s_2 et à droite un arbre Steiner qui contient les 4 terminaux et un seul sommet Steiner.



Déterminer un arbre Steiner minimum est un problème NP-difficile. Toutefois, il existe des algorithmes pseudo-polynomiaux pour le résoudre. Nous allons ici étudier une formulation PLNE permettant de le résoudre exactement et efficacement au travers d'un algorithme de Branch-and-Cut.

Exercice* 6 *: Conception de circuits électroniques

Le problème de la recherche d'un arbre Steiner dans un graphe trouve une application naturelle dans la conception de circuits électroniques. La conception de circuits électroniques consiste à placer les composants et les pistes conductrices d'un circuit sur support, par exemple une carte. Parmi toutes les étapes nécessaires, l'une d'entre elles consiste à relier tous les composants (puces, condensateurs,...) aux bornes générales d'alimentation électrique du circuit, qui sont généralement placées dans un coin de la carte. La patte correspondant à la borne "+" (respectivement "-") de chacun des composants doit donc être reliée à la borne générale "+" (respectivement "-"). On appelle cette étape *le routage d'alimentation électrique* qui a lieu sur les différentes couches du circuit (ainsi deux des couches sont réservées à l'alimentation). Tous les emplacements de pistes ne sont pas utilisables: on doit donc choisir les pistes parmi un sous-ensemble connu de pistes possibles: ces pistes potentielles se croisent en différents *points* du circuits dont certains sont les pattes des bornes des composants et d'autres sont simplement des croisements entre deux pistes potentielles. On désire évidemment réduire le poids et le coût d'un circuit, on veut donc effectuer ce routage en utilisant une longueur totale minimale de pistes conductrices.

6.1) Montrer qu'un arbre Steiner minimum d'un graphe G est un sous-graphe connexe de coût minimum de G contenant tous les terminaux.

6.2) Expliquer brièvement pourquoi déterminer le routage d'alimentation électrique d'un circuit électronique revient à rechercher deux arbres Steiner minimaux.

Exercice 7 : Formulation du problème de l'Arbre Steiner

Soit χ un vecteur binaire sur les arêtes de G vérifiant toutes les inégalités suivantes

$$\sum_{e\in\delta(W)} \chi(e) \geq 1 \qquad \begin{array}{l} \forall W \subset V,\ \ \emptyset \neq W \neq V, \\ W\cap T \neq \emptyset \text{ et } (V\setminus W)\cap T \neq \emptyset, \end{array} \tag{1}$$

où $\delta(W)$ est l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans $V \setminus W$.
Soit $H = (V(F), F)$ le sous-graphe de G défini par l'ensemble d'arêtes $F = \{e \in E \mid \chi(e) = 1\}$ et l'ensemble $V(F)$ des sommets extrémités des arêtes de F.

7.1)
a) Prouvez que H contient tous les terminaux.
b) Soit deux terminaux t_1 et t_2 de T. Prouvez que H possède une composante connexe contenant t_1 et t_2. (Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe dans lequel toute paire de sommets est reliée par une chaîne.).
c) En déduire que si H est de poids minimum, alors H est connexe. Montrer également que H est alors un arbre (c'est-à-dire sans cycle).

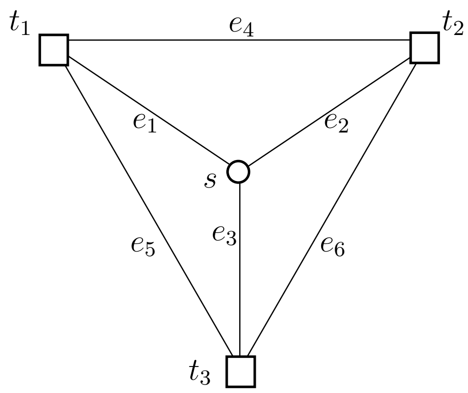
7.2) En déduire que le problème de l'arbre Steiner dans G peut se formuler comme le programme en nombres entiers suivant.

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lll} Min & \displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x(e) & \\ & \displaystyle\sum_{e\in\delta(W)} x(e) \geq 1 & \begin{array}{l} \forall W \subset V,\ \ \emptyset \neq W \neq V, \\ W\cap T \neq \emptyset \text{ et } (V\setminus W)\cap T \neq \emptyset, \end{array} \quad (1) \\ & 0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E & \quad (2) \\ & x(e) \text{ entier} \quad \forall e \in E. & \quad (3) \end{array} \right.$$

7.3) Indiquer le nombre de variables et d'inégalités que possède cette formulation? Quelle solution algorithmique peut-on envisager pour la résoudre?

Exercice 8 : ***Points extrêmes et contraintes valides pour le problème de l'Arbre Steiner***

On considère le graphe $G = (V, E)$ comme suit (les carrés représentent les terminaux et le cercle un sommet Steiner).



Soit y^* la solution donnée par $y^*(e_1) = y^*(e_2) = y^*(e_4) = \frac{1}{2}$, $y^*(e_3) = 1$ et $y^*(e_5) = x(e_6) = 0$.

8.1) **a)** Montrer que y^* est une solution du programme donné par les contraintes(1) et (2).
b) Donner 6 contraintes de ce polyèdre vérifiée à l'égalité par y^* et indiquer comment on peut prouver (sans le faire) que y^* est point extrème de ce polyèdre.

8.2) On considère la partition des sommets du graphe G entre $V_1 = \{t_1\}$, $V_2 = \{t_2\}$ et $V_3 = \{s, t_3\}$. On définit le graphe G' en contractant chacun de ces ensembles en un sommet: V_1 (resp. V_2, V_3) devient u_1 (resp. u_2, u_3). (Par cette opération, G' conserve toutes les arêtes de G sauf e_3).
a) Montrer que les arêtes du graphe G', qui sont prises dans une solution du problème de l'arbre Steiner pour G, forment un graphe connexe dans G'.
b) En déduire que la contrainte

$$x(e_1) + x(e_2) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) \geq 2 \tag{1}$$

est valide pour le problème de l'arbre Steiner dans G.
c) Montrer que l'ajout dans $\mathcal{P}$ de la contrainte (1) est utile.

Exercice 9 : ***Algorithme de séparation pour les inégalités (1)***

On dispose de la fonction $cutmin(y)$
- où $y \in I\!R^{|E|}$ et $0 \leq y(e) \leq 1$ pour tout $e \in E$
- qui renvoie l'ensemble de sommets W avec $\emptyset \neq W \neq V, W \cap T \neq \emptyset$ et $(V \setminus W) \cap T \neq \emptyset$, tel que la valeur $\sum_{e \in \delta(W)} y(e)$ soit minimun par rapport au vecteur y.

Donner le schéma d'un algorithme de coupes et branchements (Branch-and-Cut) pour la formulation $(\mathcal{P})$ composée des inégalités (1), (2) et (3).

3 Problème de la coupe maximale

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et une fonction poids quelconque $c(e), e \in E$. On note $ij \in E$ une arête du graphe. Pour un sous-ensemble non vide de sommets $W \subset V$, avec $\emptyset \neq W \neq V$, on note $\delta(W)$ l'ensemble des arêtes avec exactement une extrémité dans W (et donc l'autre dans $V \setminus W$. On appelle *coupe* du graphe G, un ensemble B d'arêtes tel qu'il existe $W \subset V$, avec $\emptyset \neq W \neq V$ avec $B = \delta(W)$.

Le *problème de la coupe de poids maximum* (Max-Cut) consiste à déterminer un ensemble d'arêtes $B \subset E$ tel que B soit une coupe et que $c(B) = \sum_{e \in B} c(e)$ soit maximum.

Ce problème est NP-difficile. En revanche, lorsque les poids sont tous négatifs, il est donc équivalent à déterminer une coupe de plus petit poids (en prenant l'opposé des poids): dans ce cas, le problème est polynomial.

Pour une variable ou un vecteur v indicé sur les arêtes de E, on notera $v(B) = \sum_{e \in B} v(e)$ pour tout sous-ensemble $B \subset E$.

Exercice* 10 *: Modélisation d'un verre de spin

En physique statistique, on appelle *verre de spin* un état de la matière, caractérisé à l'échelle microscopique par une aimantation (moment magnétique ou spin) de chaque atome dans une direction particulière. A l'état de verre de spin, le système a des propriétés de supra-conducteur, comme par exemple d'être un puissant éléctro-aimant. On mesure la faculté d'un matériau à s'aimanter sous l'action d'un champ magnétique, par sa *susceptibilité magnétique*. En fait, l'état de verre de spin s'obtient à une température qui minimise la susceptibilité magnétique du système.

On sait par exemple obtenir l'état de verre de spin pour des système magnétiques obtenus en diluant des atomes d'un matériau magnétique (Fer) dans un matériau non magnétique (Or) et en plaçant le système à la bonne température. Dans un tel système, la susceptibilité magnétique peut être définie comme la somme des énergie d'interaction magnétique entre les atomes de fers. Entre deux atomes de fer i, j, il existe une énergie d'interaction

$$H_{ij} = -J(d) S_i S_j$$

où S_i (resp. S_j) est le moment magnétique (spin) de l'atome i (resp. j) et $J(d)$ une fonction qui dépend de la distance d entre les deux atomes. Ce phénomène intrigue énormément les physiciens et ils ont proposé divers modèles pour comprendre le lien entre cette fonction de susceptibilité et l'état de verre de spin. Un des plus célèbres modèles est de considérer que les valeurs possibles pour leurs spins sont uniquement +1 ou -1 et que les interactions entre atomes n'ont lieu qu'entre les plus proches voisins. Ainsi le problème de minimisation de la fonction susceptibilité dépend uniquement de la configuration S des spins, c'est-à-dire une affection de +1 ou de -1 à chaque atome) et vaut alors

$$H(S) = \sum_{ij \in L} -J_{ij} S_i S_j$$

où L est l'ensemble des couples d'atomes ayant une interaction et J_{ij} un valeur constante (dépendant uniquement de la distance entre i et j).

Soit $G = (V, E)$ un graphe où les sommets correspondent aux atomes de fer et les arêtes aux liaisons de L. On associe à chaque arête ij le poids $w_{ij} = -J_{ij}$.

10.1) Montrer que le problème de minimisation de la fonction H pour un verre de spin revient à minimiser une fonction quadratique à valeurs bivalentes prises dans $\{-1, +1\}$.

10.2) Pour une affectation S de valeurs -1 ou +1 aux sommets de V, on définit les ensembles $S_+ = \{i \in V \mid S_i = +1\}$ et $S_- = \{i \in V \mid S_i = -1\}$. Montrer que ce problème se ramène au problème de la coupe maximum dans le graphe G. (Indication: $\sum_{ij \in E} w_{ij}$ est une quantité constante).

Exercice 11 *: Formulation pour le problème de la coupe maximale*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et une fonction poids $c(e), e \in E$. On admet le résultat suivant:
Lemme 1: Un ensemble B d'arête de G est une coupe si et seulement si B intersecte tout cycle de G en un nombre pair d'arêtes.

11.1) **a)** Soit B une coupe de G. Montrer que pour tout cycle C de G et pour tout $F \subseteq C$ avec $|F|$ impair, $B \cap C \neq F$.

b) Soit $B \subseteq E$ un ensemble quelconque d'arêtes. On pose $\chi^B(e) = \begin{cases} 1 \text{ si } e \in B \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Montrer que le vecteur χ^B associé à une coupe B de G vérifie l'inégalité suivante:

$$\chi^B(F) - \chi^B(C \setminus F) \leq |F| - 1 \quad \text{pour tout cycle } C, F \subseteq C, |F| \text{ impair.} \quad (1)$$

11.2) Montrer que déterminer une coupe de poids maximum dans G revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant

$$(P) \begin{cases} \text{Maximiser } \displaystyle\sum_{e \in E} c(e)x(e) & & \\ \quad x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1, & \text{pour tout cycle } C,\ F \subseteq C,\ |F| \text{ impair}, & (1) \\ \quad 0 \leq x(e) \leq 1, & \text{pour toute arête } e \in E, & (2) \\ \quad x(e) \text{ entier}, & \text{pour toute arête } e \in E. & (3) \end{cases}$$

On appelle les contraintes de type (1) des *contraintes de cycles*, de type (2) des *contraintes triviales* et de type (3) des *contraintes d'intégrité*.

11.3) Indiquer le nombre de variables et d'inégalités que possède cette formulation? Quelle solution algorithmique peut-on envisager pour la résoudre?

4 Approches polyédrales

Exercice* 12 : *Polytope du sous-graphe 2-connexe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un arête e de E peut se noter uv où u et v sont les extrémités de e. On note une chaîne P comme une liste d'arêtes $(e_1 = u_1u_2, e_2 = u_2u_3, ..., e_l = u_{l-1}u_l)$. Pour une arête $e \in E$, on note $G \setminus e$ le graphe comprenant les sommets de V et les arêtes de $E \setminus \{e\}$. On dit que G est connexe si, pour tout couple de sommets (u, v), il existe une chaîne reliant u et v.

Deux chaînes P_1 et P_2 sont dits *arête-disjoints* si P_1 et P_2 n'ont aucune arête en commun (remarquons qu'ils peuvent avoir des sommets en commun). On dit que G est 2-connexe si, pour tout couple (u, v), il existe deux chaînes arêtes-disjoint reliant u et v. On associe à présent à chaque arête e de V, un poids $c(e)$. Le *problème du sous-graphe 2-connexe* consiste à déterminer un sous-ensemble F d'arêtes tel que le graphe $G' = (V, F)$ soit 2-connexe et tel que la somme des poids des arêtes de f soit minimum. Remarquons pour cela que G doit, au départ, être 2-connexe.

Modélisation et formulation

Le problème du sous-graphe 2-connexe a une application directe en conception de réseaux de télécommunications ou de réseaux électriques. Un tel réseau $G = (V, E)$ est composé d'un ensemble E de stations et E de liaisons entre stations. On appelle réseau *fiable* un réseau connexe qui résiste aux pannes sur les liaisons, c'est-à-dire un réseau qui reste connexe quand on une arête tombe en panne, i.e. pour toute arête $e \in E$, $G \setminus e$ reste connexe.

12.1) Montrer qu'un réseau 2-connexe est fiable.

12.2) On veut montrer qu'un réseau fiable est 2-connexe. Pour cela, considérons un graphe G fiable et un couple de sommets distincts (u, v). Comme G est connexe, il existe une chaîne P entre u et v. Montrer qu'il existe une deuxième chaîne arête-disjointe entre u et v.

On peut donc en déduire que la conception d'un réseau fiable est équivalent à la conception d'un réseau 2-connexe. On admet le théorème suivant (dit de Menger): un graphe G est 2-connexe si et seulement si toute coupe C de G contient au moins deux arêtes.
Par conséquent, le problème du sous-graphe fiable est équivalent à

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} Min & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e)x(e) \\ & \displaystyle\sum_{e \in \delta(W)} x(e) \geq 2 \quad \text{pour tout ensemble } W \subset E \text{ tel que } \emptyset \neq W \neq V, & (\mathbf{1}) \\ & 0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E, & (\mathbf{2}) \\ & x(e) \text{ entier}, \quad \forall e \in E. \end{cases}$$

On appelle *contraintes de coupes* les contraintes de type (2).

12.3) Quelles sont les caractéristiques de ce programme en terme de nombres de contraintes et de variables? Quels sont les possibilités pour résoudre un tel programme?

Dimension du polytope

Soit un graphe $G = (V, E)$ avec $n = |V|$ et $m = |E|$. On note $P_{2C}(G)$ les polytope des sous-graphes 2-connexes de G, i.e.

$$P_{2C}(G) = conv\{x^F \in I\!R^m \mid (V, F) \text{ est 2-connexe}\}.$$

12.4) Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ un graphe 3-connexe, c'est-à-dire que pour toute arête e, le graphe $G_1 \setminus e$ est 2-connexe. Montrer que, dans ce cas, $P_{2C}(G_1)$ est de pleine dimension.

12.5) Soit G_2 un graphe qui est 2-connexe mais non 3-connexe.
- Montrer qu'il existe une arête e telle que l'égalité $x(e) = 1$ est valide pour $P_{2C}(G_2)$.
- On note E' l'ensemble de ces arêtes, que l'on appelle *essentielles*. En déduire une borne supérieure de la dimension de $P_{2C}(G_2)$.
- En montrant que le polyèdre $P' = P_{2C}(G_2) \cap \{x(e) = 1 \mid e \in E'\}$ est de pleine dimension, déduisez la dimension de $P_{2C}(G_2)$.

Exercice* 13 *: Facettes du polytope du sac-à-dos en 0-1

Considérons un problème de sac à dos P en 0-1 (0-1 knapsack polytope).

$$\begin{array}{rl} Max & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_x \leq b \\ x_i \in \{0,1\} & \text{pour } i = 1, ..., n \end{array}$$

On suppose que, $i = 1, ..., n$,
- $c_i > 0$ (sinon on ne prendrait jamais i dans une solution optimale).
- $a_i > 0$ (sinon, on prendrait systématiquement i dans une solution optimale).
- $a_i < b$ (sinon, on ne prendrait jamais i dans une solution).

Donc $b > 0$.
Enfin, on suppose que $sum_{i=1}^n a_i > b$ (sinon $\{1, \ldots, n\}$ serait trivialement la solution optimale).

On note le polytope du knapsack, comme étant l'enveloppe convexe des vecteurs entiers $\chi \in \{0,1\}^n$ qui satisfont la contrainte de sac-à-dos, *i.e.*

$$P_K(a, b) = conv\{\chi \in \{0,1\}^n \mid a\chi \leq b\}.$$

13.1) Donnez la dimension du polyèdre $P_K(a, b)$

Un sous-ensemble R de $\{1, ..., n\}$ est dit *recouvrement* (cover) de P si $\sum_{i \in R} a_i > b$. Dans un exercice précédent, on a prouvé que si R est un recouvrement de P alors la contrainte suivante (dite de recouvrement ou cover inequality) est valide pour $P_K(a, b)$

$$\sum_{i \in R} x_i \leq |R| - 1.$$

13.2) Soit un recouvrement donné R. Donnez une condition nécessaire pour qu'une contrainte de recouvrement définisse une facette de $P_K(a, b)$.

13.3) On considère un recouvrement particulier: celui contenant tous les items $\tilde{R} = \{1, \dots, n\}$, c'est bien un recouvrement par hypothèse de l'exercice. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que la contrainte de recouvrement associée à $\tilde{R}$ définisse une facette de $P_K(a, b)$.