

Written medieval sources on Persian-Islamic tilings.

Jan P. Hogendijk

Mathematics Department, Utrecht University, Holland

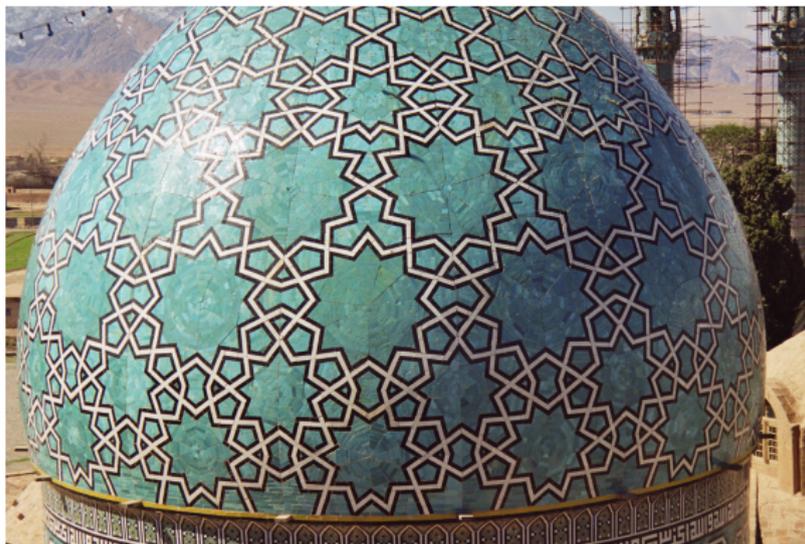
Isfahan, CIMPA summer school,
27 August 2015

'Mathematical art' in Islamic civilization (5th-12th c. Hijra / ca. 1020-1780 AD): 1. Plane tilings



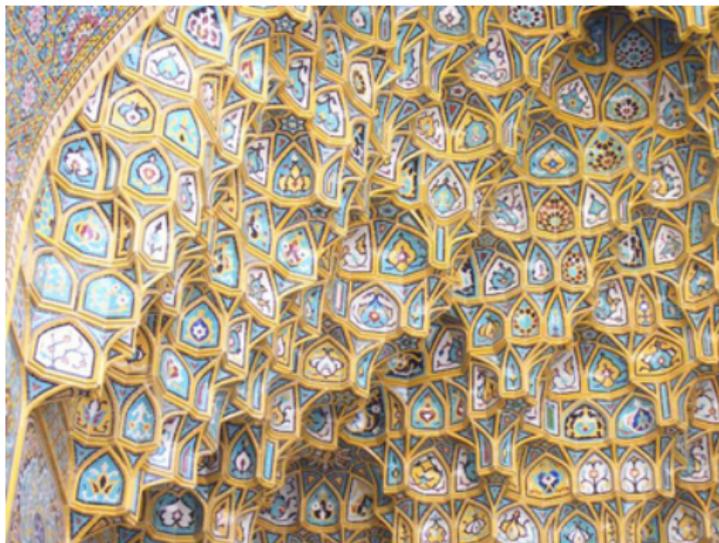
Darb-e Imam, Isfahan, Iran (15th c. AD)

2. Tiled cupolas



Shrine of Shah Nematollah Vali, Mahan, Iran (15th c. AD)

3: Three-dimensional art: Muqarnas



Shiraz, Iran

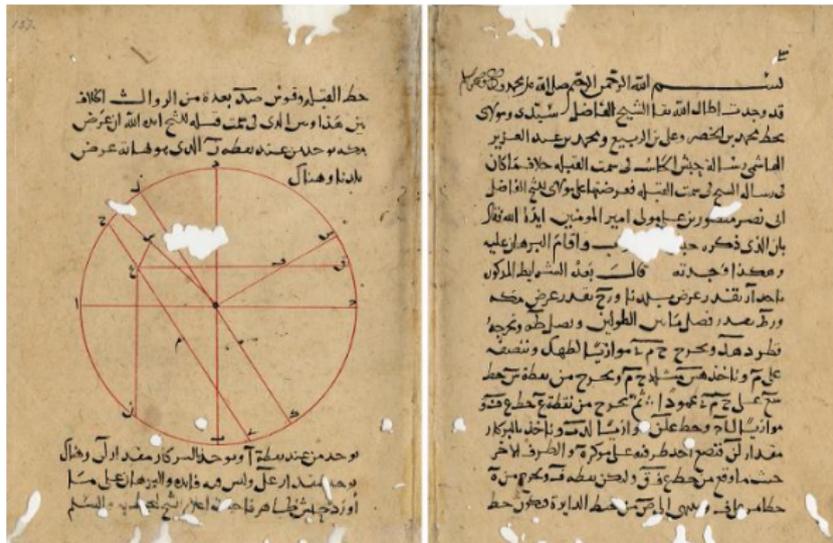
The Medieval Islamic Mathematical Tradition

One of the great mathematical traditions.

Between 800 AD - 1450 AD (middle of second - end of eighth century Hijra) the dominant mathematical tradition in the world.

Continued the traditions of Greece and India; taught mathematics to the Christian West.

Hundreds of Arabic and Persian mathematical manuscripts have been preserved in libraries all over the world.



Old Arabic manuscript in Leiden, Holland.

$\sum_{n=1}^N n^4 = \left(\frac{1}{5}n + \frac{1}{5}\right) \cdot n \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n(n+1) - \frac{1}{3}\right)$ is modern notation

Ibn-e Haytham said:

“If we take one-fifth of the greatest of the successive numbers beginning with one and increasing from one by one, plus one-fifth of one, and if the result is multiplied by the greatest number, and if we then multiply this product by the greatest number plus one-half, and if we keep the result, and if we add one to the greatest number and multiply the result by the greatest number, and if we subtract [the number] one-third from the product, and if we multiply the remainder by the result which we kept in mind, then the final result of the sum of the squares of the squares of the successive numbers.”

Why advanced mathematics in Islamic civilization?

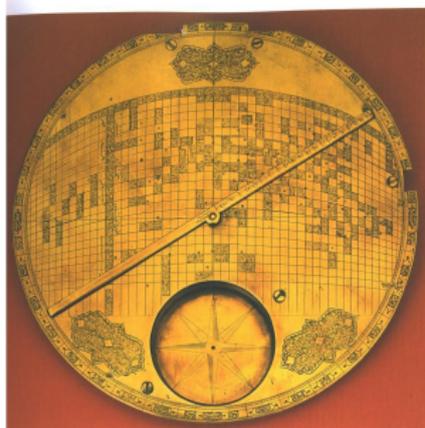
1. For astronomy [prediction of solar and lunar eclipses etc.] and geography.



The Muslims continued the work of the Babylonians and the Greeks and always compared predictions with observations to improve the methods.

Why advanced mathematics in Islamic civilization?

2. For religious purposes [finding qibla etc.]



3. Because of its theoretical interest

Basis of geometry in Islamic civilization

The *Elements* of Euclid (ca. 300 BC), which existed in several Arabic translations.

A very difficult work! Many very good commentaries were written in Islamic civilization.

Difficulty of geometry in Islamic civilization: an example: definition of $a : b = c : d$

Euclid Book 5 Definition 5 says:

“Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if equimultiples be taken of the first and third, and equimultiples of the second and fourth, whatever equimultiples they are, then the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.”

(Ask yourself what this means)

Difficulty of geometry in Islamic civilization: an example:

$$a : b = c : d$$

Euclid means in modern notation:

$a : b = c : d$ if for all integers m, n

$$ma > nb \rightarrow mc > nd$$

$$ma = nb \rightarrow mc = nd$$

$$ma < nb \rightarrow mc < nd$$

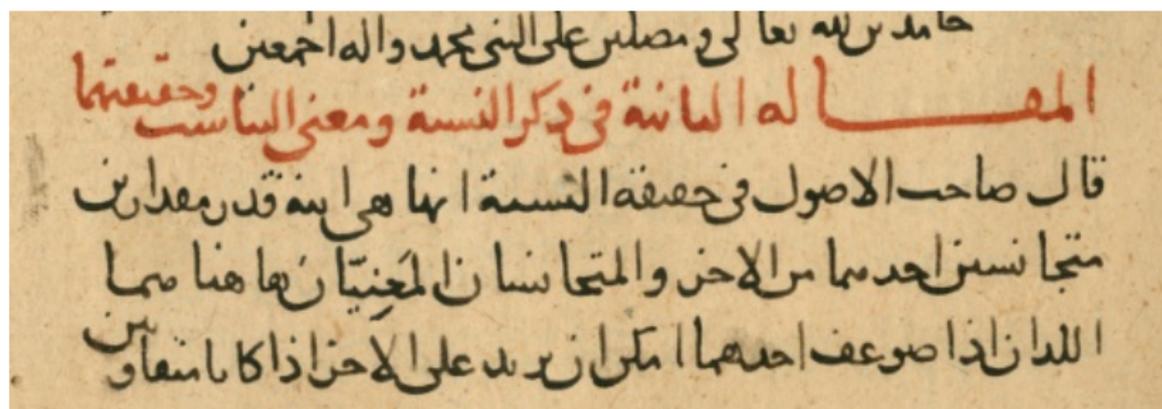
Def. 5 "Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if equimultiples be taken of the first and third, and equimultiples of the second and fourth, whatever equimultiples they are, then the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of the latter equimultiples respectively taken in corresponding order."

The Arabic translation was clearer than the original Greek!
(al-Ḥajjāj. 9th c. CE, Codex Leidensis 399,1)

قال اقليدس يقال في المقادير أنها في نسبة واحدة الأول إلى الثاني والثالث إلى الرابع متى كانت أضعاف الأول والثالث المتساوية المرات إما أن تفضل معًا على أضعاف الثاني والرابع المتساوية المرات أي الأضعاف كانت وإما أن تساويها معًا وإما أن تنقص عنها معًا إذا قست على الولاء بعضها ببعض

Omar Khayyam says in the 11th c. CE: this should all be done differently.

Beautiful manuscript in Leiden University Library Or. 199.



What did these famous Islamic mathematicians write about decorative tilings?

What do you think?

What did these famous Islamic mathematicians write about decorative tilings?

What do you think?

(Next to) nothing!

What did these famous Islamic mathematicians write about decorative tilings?

What do you think?

(Next to) nothing!

Why?

Decorative tilings were not designed by mathematicians but by craftsmen (Arabic: *ṣunnā^c*), and no theory of “tilings” was developed by the mathematicians at that time.

What were the “mathematical” design methods of the craftsmen?

Old (oral) traditions may still exist in Iran



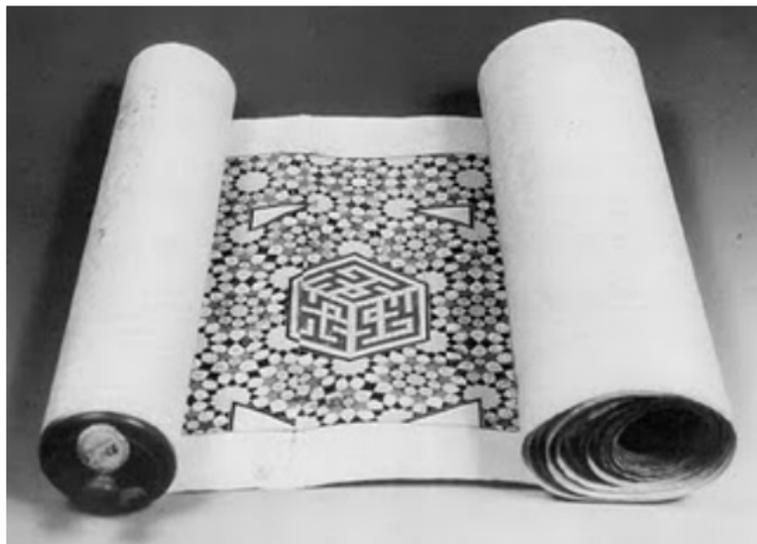
Reviving the old crafts in the House of Mathematics, Isfahan.

Written medieval sources on tilings

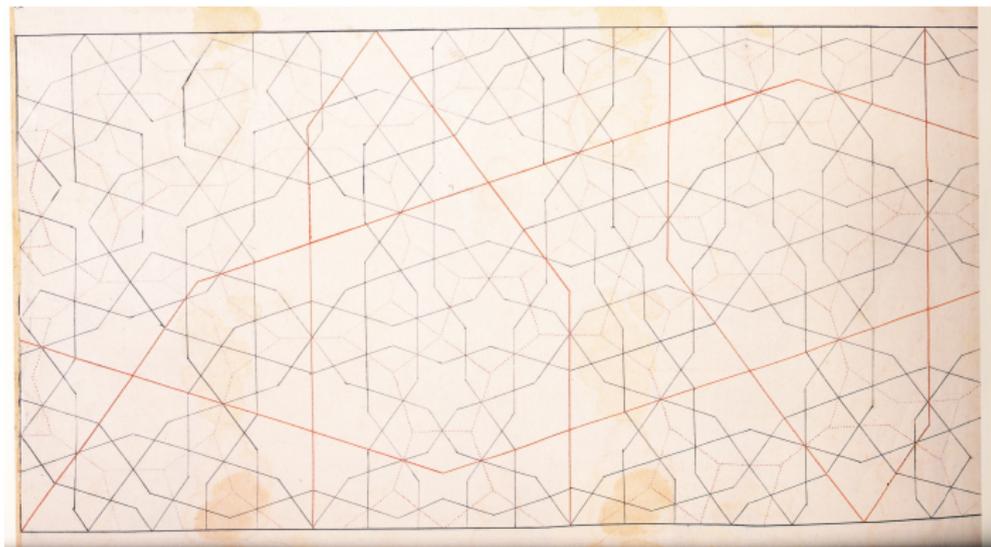
There are only very few written sources. Three categories:

1. Scrolls [diagrams without text]
2. Manuscript containing drawings with text [only one is known]
3. Small works by mathematicians, inspired by (or criticizing) the craftsmen / designers.

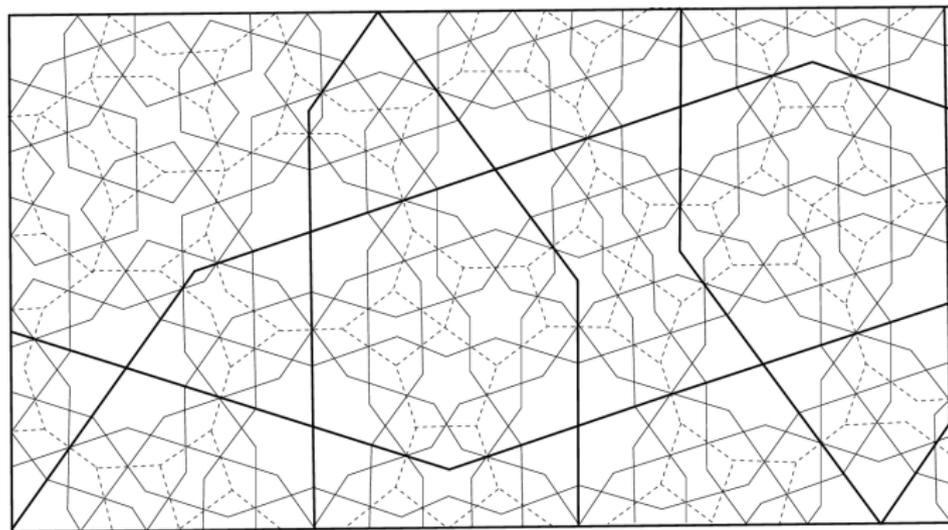
1. The Topkapi Scroll: a document by/for craftsmen, with more than 100 drawings.



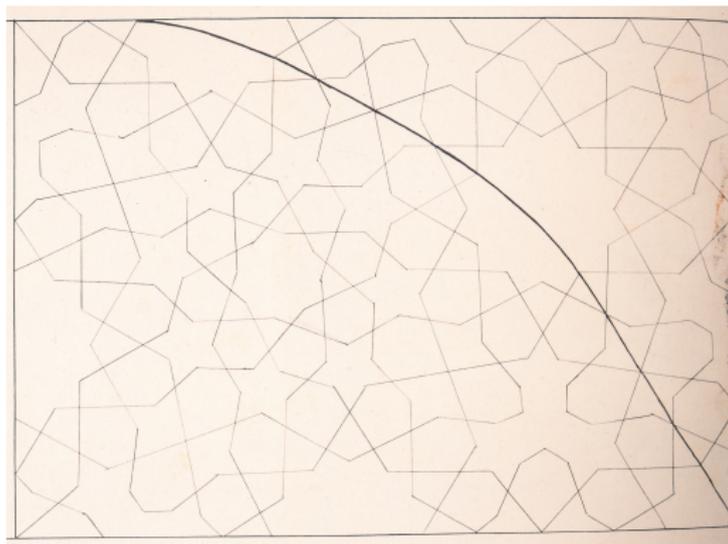
Topkapi Scroll: a diagram of a plane tiling



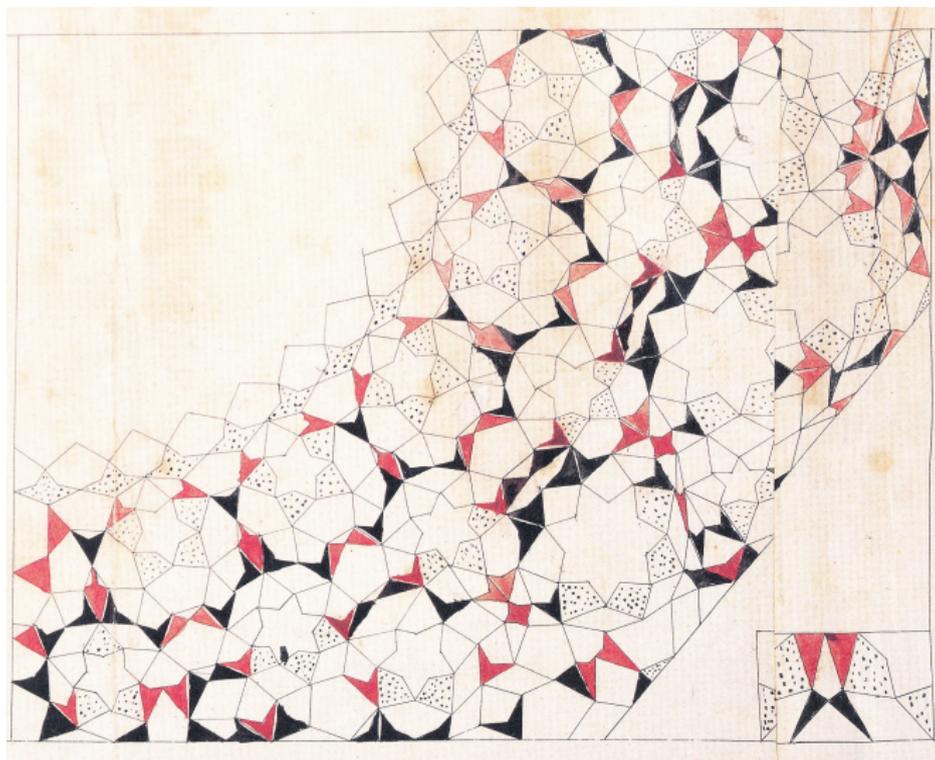
Transcription of the diagram: the dotted figures (“gireh tiles”) were probably used in the design process



Another plane tiling in the Topkapi scroll, without gireh tiles, but with arch



Horizontal projection of muqarnas in the Topkapi scroll

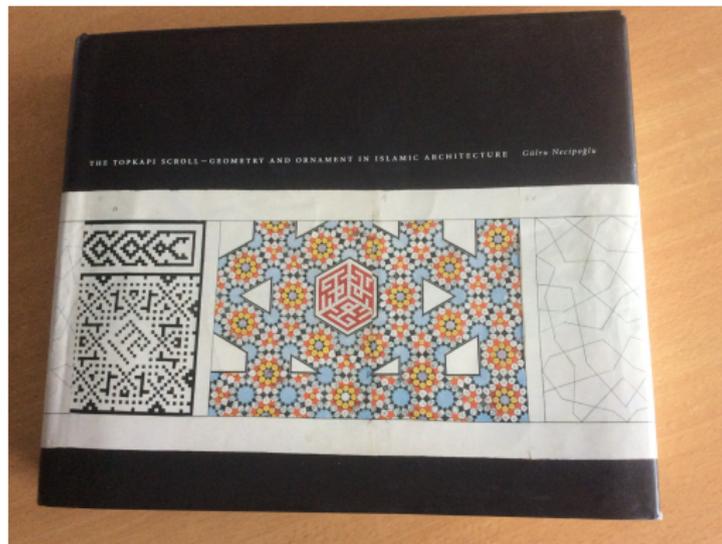


Calligraphy in the Topkapi scroll: can you read?

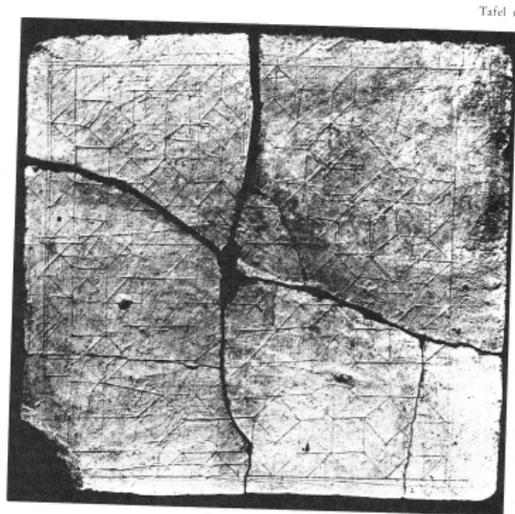


Topkapi Scroll published in expensive edition

Glu Necipoglu: The Topkapi Scroll: geometry and ornament in Islamic architecture. Santa Monica, CA: Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995



Gypsum plate for muqarnas [model of horizontal projection], ca. 1370 AD



r. Takht-i Soleyman, Entwurfsplatte

found at archeological site: Takht-e Soleyman, near Takab,
Province of West Azerbaijan, Iran

Drawing of the gypsum plate

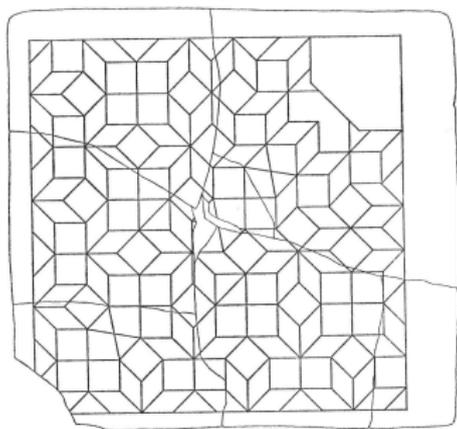


Abb. 31. Entwurfsplatte des Takhti-Soleiman, Umzeichnung

Publication of the gypsum plate

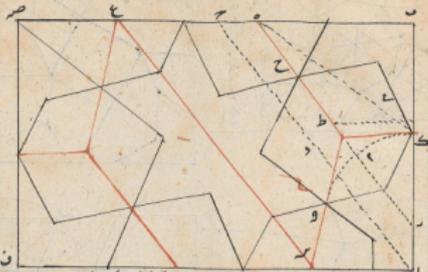
Published with analysis (in German) in a small book:

Ulrich Harb, Ilkhanidische Stalaktitengewölbe, Berlin 1978.

Publisher: Dietrich reimer verlag. Archäologische Mitteilungen aus Iran, Ergänzungsband IV

2. Anonymous 16th c (?) Persian manuscript, Paris, Bibliothèque Nationale, Or. 169, 40 pages

192

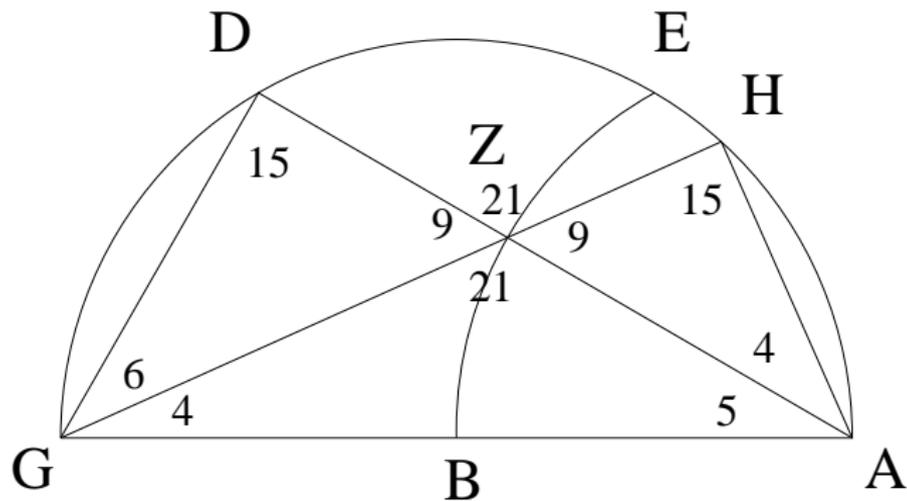


زاویه ب آن مثل اسیاع نازل علی کت و خط آن تصیف کند نقطه دوت مثل او
 جدا کند و خط ه ر موازی آن برود و خط ط س موازی ب ه بکشد و ط تصیف کند
 نقطه ح و ط س مثل ح ن کند و خط ه س اخراج کند تا منقطع خط ا ب
 شود نقطه خ ه ک موازی ب ه برود آورد و از مرکز ه قوس بکشد که برود اند
 چنانکه قسم حکم مثل م او باشد حکم او اخراج کند تا بر خط آن نقطه
 سه بگیرد و این مرکز مسج باشد و خط اسان کردد ان شماره تقاس
 و الا از اویسه او مثل زاویه ا ب که علی کند و خطال او سه مرکز بگیرد و الا
 مع مثل ه ل فصل کند که نقطه ی مرکز مسج باشد و خط ج سه موازی ج او مثل او در نقطه
 سه مرکز مسج آفرود که بر ج مع مثل او سه باشد و $\frac{1}{2}$ ا ه اعلم



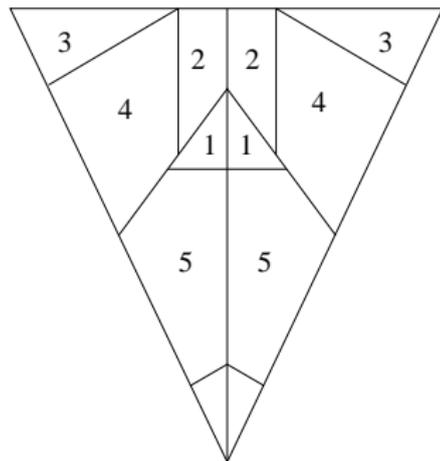
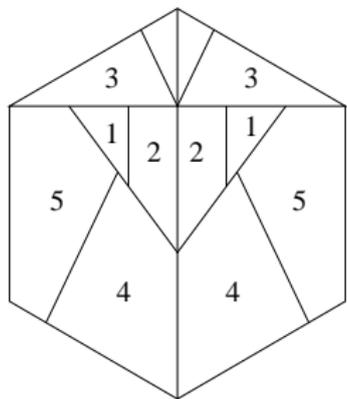
Persian manuscript: example of approximate pentagon-construction with fixed compass-opening

Construction of side of pentagon (DH) inscribed in the circle with center B and circumscribing set-square ADG with angles $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (in modern terms)



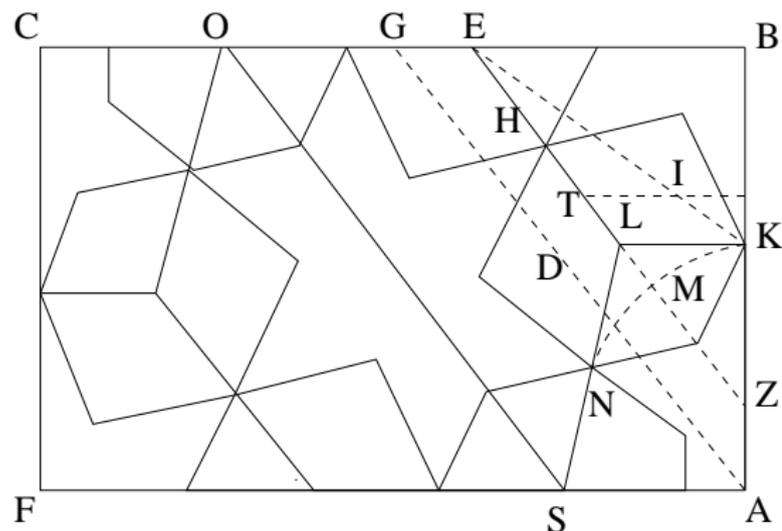
manuscript has this figure with brief explanation

Persian manuscript: example of cut-and-paste construction



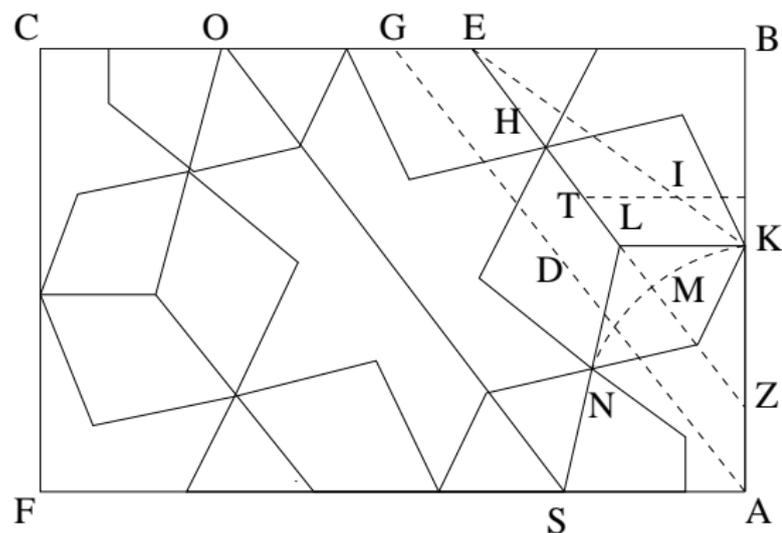
Only figures, no text

Persian manuscript: example of tiling with explanation



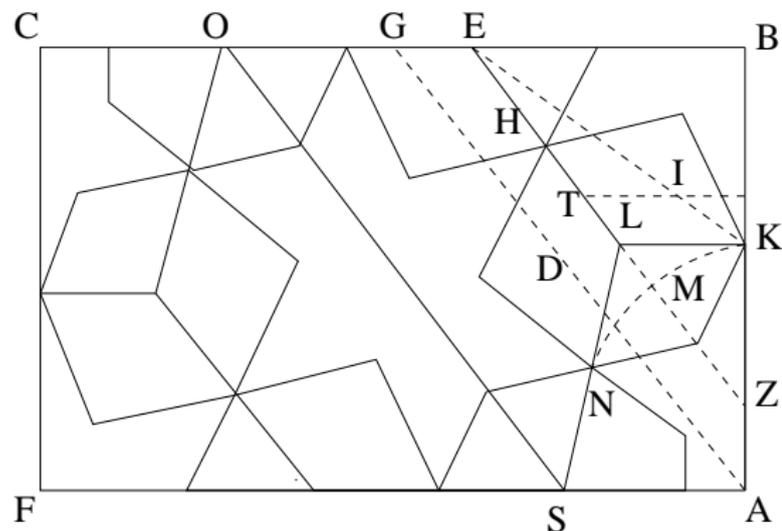
“Make angle BAG three sevenths of a right angle. Bisect AG at point D . Cut off BE equal to AD . Produce line EZ parallel to AG .”

Explanation (continued)



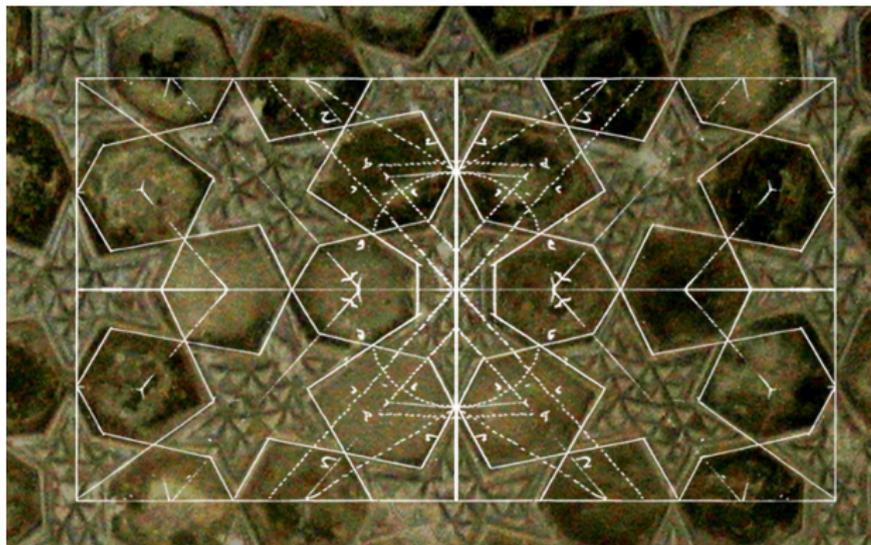
“Draw line TI parallel to BE , bisect TE at point H , and make TI equal to TH . Extend EI until it intersects AB at point K .”

Explanation (continued)

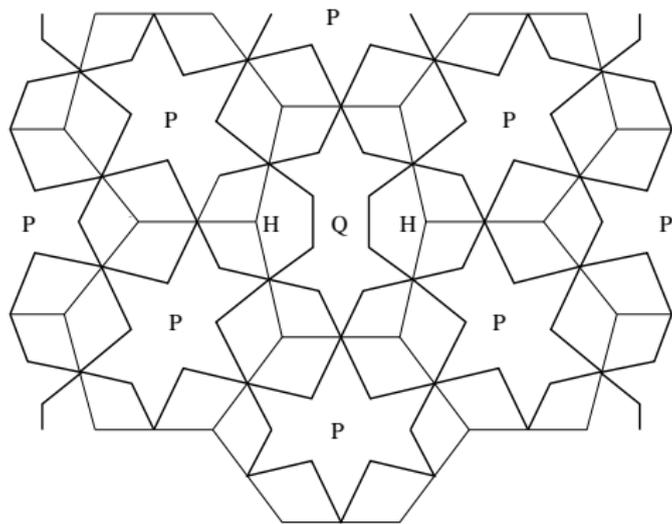


“Produce KL parallel to BE . With center Z draw circular arc KMN in such a way that its part KM is equal to MN . On line AF take point S and that is the center of a heptagon. Complete the construction, if God Most High wants.”

Tiling realized in Isfahan, North Cupola of the Friday Mosque (ca. 1080)



The putting together of the tiling is not explained in the Persian manuscript



Where is the Persian manuscript published?

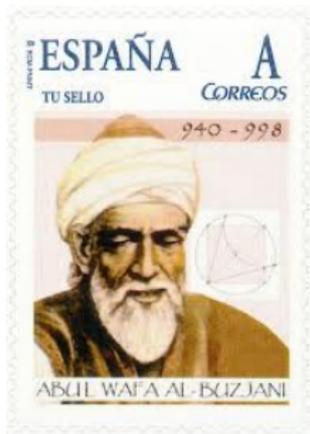
Russian translation by Bulatov, 1980s

Persian translation by Seyyed Alireza Jazbi, 1990s

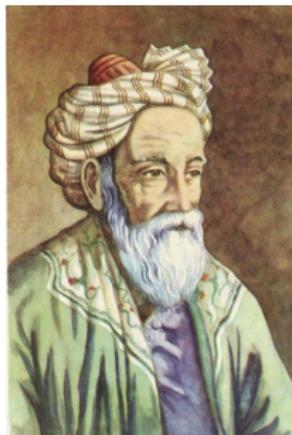
Original published in 2015 with English translation, under supervision of Prof. G. Necipoglu (Brill publishers, Holland).

3. Works by known mathematicians and astronomers: Abu'l-Wafa, Umar Khayyām, Jamshīd Kāshānī

Abu'l-Wafā'
(940-998 AD)



Umar Khayyām
(1048-1131 AD)



Jamshīd Kāshānī
(al-Kāshī,
1380-1429 AD)



All portraits on the internet (and elsewhere) are fake.

Abu'l-Wafā, ʿUmar Khayyām, Jamshīd Kāshānī

They are the (only!) three famous mathematicians whose extant writings concern tilings or muqarnas, and they wrote very little about these subjects!

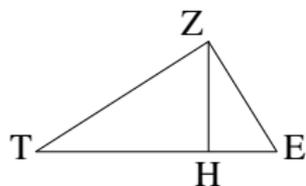
They do not write about the design of tilings or the design of muqarnas.

3a. Abū'l-Wafā' (10th-c.) mathematician and astronomer: booklet on the geometry necessary for craftsmen

Abū'l-Wafā' criticizes the designers (*ṣunnā^c*) because they use geometrical constructions but no proofs, and because they do not distinguish between exact and approximate constructions.

He then shows how one can construct some figures needed by the designers (such as a regular pentagon) by mathematically exact methods.

Umar Khayyām in a short letter on algebra (ca. 1100)



To Construct a right-angled triangle such that: altitude + shortest side = hypotenuse
(EZT such that $EZ + ZH = ET$, notation mine.)

If $EH = 10$ and $ZH =$ “thing” (modern: x) then
“a cube and two hundred things are equal to twenty squares plus two thousand in number”

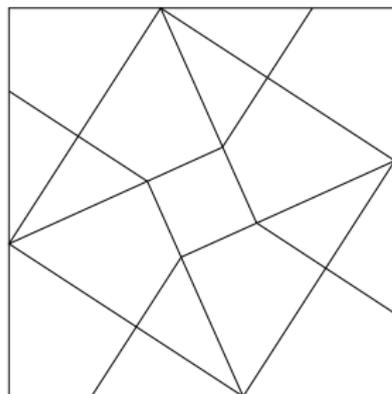
modern $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$.

segment with length x can be constructed by means of conic sections.

Umar Khayyām did not say why he studied this triangle:
it is related to a decorative pattern.

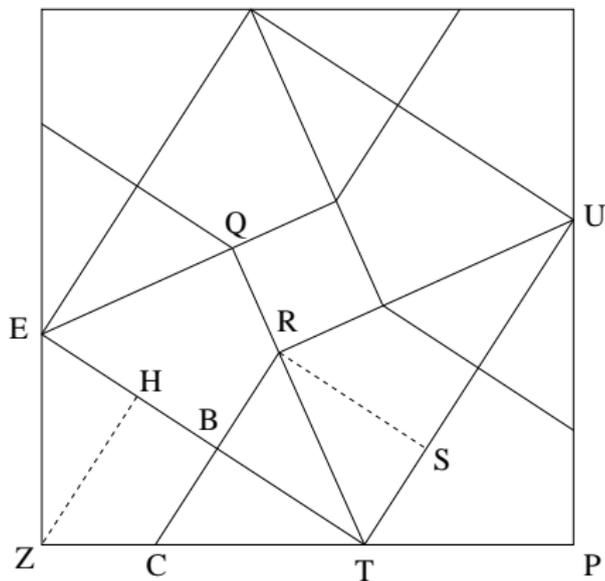


Four kite pattern
Isfahan, Hakim mosque



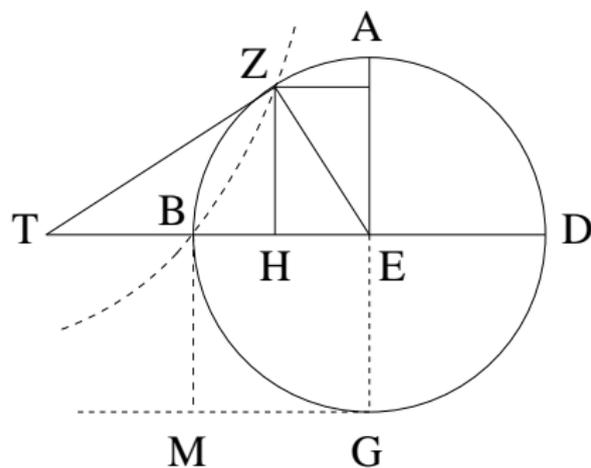
Twelve kite pattern in Persian
manuscript:
4 big kites, each subdivided
into 2 smaller kites and 2
triangles.

The Twelve Kite Pattern and a special right angled triangle (EZT), also in the Persian manuscript.



altitude plus shortest side is hypotenuse ($EZ + ZH = ET$)

Exact construction of the triangle (*EZT*) by means of conic sections, in an anonymous appendix to ‘Umar Khayyām’s short letter on algebra



$$EZ + ZH = ET.$$

Circle, center E , two perpendicular diameters AG , BD .

Hyperbola through B , asymptotes AG and line through G parallel to BD .
 Z point of intersection

How to access all these texts

See handout which you can ask me after the talk.

Conclusions

Medieval Islamic mathematicians wrote very little on tilings and did not always like the (approximate) methods of the craftsmen.

We have only few medieval sources on the design methods of the craftsmen. The written sources are very incomplete, oral instruction must have been important. For more information one can investigate the oral tradition.

Medieval Islamic tilings can be useful illustrations of modern mathematical concepts. It does not follow that these mathematical concepts were present in the minds of the medieval designers.

Fortunately, Tilings are now considered to be part of mathematics, so tilings are studied in the House of Mathematics in Isfahan (the City of Tilings).

Old building



Mathematics and Art Conference, Isfahan, 2006



Workshop on Mathematics and Islamic art in Holland

Lorentz
center

Geometric Patterns in Islamic Art

Workshop 11 - 15 September 2006 Leiden University

Organizers

- Jan P. Hogendijk, Utrecht
- Remke Kruk, Leiden
- Mohammad Bagheri, Teheran

Full page article in a Dutch national journal on the collaboration

bij de hoop had opgevoert het ooit nog eens in het licht te zetten.

"In Noord-Amerika", zegt Hagendijk op een bankje in een Leiden tuin. "De figuratie ging uit van de ruimtelijke zeventhoek. Die is niet meer en is lijniaal te construeren, dat heb je parabolen of hyperbolen voor nodig. Je waart er in die tijd weinig mensen die daar overweg konden. Ik heb een sterke vermoeden wie er achter zat: de beroemde Perzische wiskundige, astronoom en dichter Omar Khayyam." Een foto van dat zeventhoeksmozaïek uit Isfahan, met daarop geprojecteerd het gekillende patroon uit het handschrift, staat op de poster van een symposium voorloop van de Leidse Lorentz Center "Geometrie Patrimons in Islamic Art". Een halve eeuw voor de huidige generatie op het thema de 'za van het leeuw' gereisd worden, in de Middeleeuwen en tijdens de dynamiek van de Idrisid (788-833) koninkrijk Perzië - net als nu - een hoogstaande cultuur. Daarvan getuigen ook de rijk opkeuze en verfijnde miniaturen, maar ook vele geografische theoretische posities op meerkantige buis.

SEMANTIEK Slide Mohammad in 630 Mekka veroverde, in de ka'ba de godbeelden liet vernietigen en de tempel tot islamitisch heiligdom benoemde, zijn in moskaten afbeeldingen van de profet, van heiligen en van de verde wezere in het algemeen verdedigen. Kalligrafie (van koranverzen) en geometrische patronen mochten wel. Zo ken sich een islamitische architectuur ontweek met veelvuldige versamenstelling op vlakke met meerkantige figuren.

Betragingen van vlakke rozen en van kroesjes bestaan soms uit ingewikkelde, zich herhalende patronen en ook rozen, driedimensionale structuren om de ervaring van wand naar hoogte te maken, bevaten veel geometrie, in die het Alhambra (Granada) op grote schaal gepoel met driehoeken, vierkanten, vijfhoeken en zeshoeken, die zich geometrisch patroon zijn in steden in Iran, regelmatig vijfhoeken en zeshoeken en zelfs zeven- en negenhoeken. Oorsel in Iran zijn ze te bewonderen, het mozaïek in de Vierdriehoek in Isfahan. Ook in profane architectuur is veel geometrische ornamentiek te vinden en bij seltic, metaalopbouw, miniatuur

TENTOONSTELLING

Tijdsde workshop "Geometrie Patrimons in Islamic Art" exposeert hantwaantien geometrische getuigen woek in de oorsos rozen en op de gang van het Lorentz Center. Het gaat om twee groepen kunstenaars en studenten die een prievraag hebben. De prevering is door Jan Hagendijk uitgezochten en aafloop van een bloektoeken in Isfahan van de Leidse Lorentz Center. Het mozaïek, gefolpen met. Raan hooftende Iraanse studenten namen toe deed aan



ALFA'S EN BETA'S DOEN SAMEN EEN WORKSHOP ISLAMITISCHE MOZAÏEKEN

De zevenhoek te Isfahan



en andere vormen van materiele cultuur is het niet anders. Hagendijk, een dat per week toegelate gerechdelde van de wiskunde in Leiden (de rest van de tijd zit hij in rijkelijke en veelvuldige miniaturen, maar ook vele geografische theoretische posities op meerkantige buis).



prachtige meerkantige mozaïeken die hij hier overal in je achtertuin hebt. Zege Hagendijk toen hij weer eens in Isfahan was. "Ze hadden er nooit bij stilgestaan. Negen maanden later kreeg ik een mailtje dat ze bezig waren met een conferentie. Vanuit Leiden zijn we toen een samenwerkingsverband opzetten. Zo heb ik met studenten workshops opgezet over wiskunde en mozaïeken, bijvoorbeeld met hoogleraren in de faculteit. Algemeen met waren we in Isfahan om te te geven aan een geavanceerd grafisch studium - drie groepen mozaïek en een groep jongens."

Ook hemic Kruk, hoogleraar Architectuur in Leiden, was de workshop, met volgende

toeken van de Leidse Lorentz Center tussen Alfa's en beta's "bruggen worden gemaakt". "Het is geen gebouwt dat letteroemen met soort dood-

angst ervaren door de term 'driehoek' was. Aan de andere kant zijn nogal wat wiskundigen en andere beta's die groep betaal hebben van het belang van cultureel-historische contexten. Islamitische ornamentiek is bij uitstek een onderwerp om ontstaan te realiseren die eigen vageheld te buiten gaan. Ik hoop vurig dat al die specialisten met hun uiteenlopende achtergronden en de kunstenaars, die de lijnen vormen naar die huidige nog altijd sprengende islamitische geometrische kunst, met elkaar in gesprek raken. Nu bestaat er nauwelijks interactie tussen die groepen terwijl ze toch orrom van elkaar kunnen leren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

Die verhoeding tussen "hoop" wemend op een ornamentiek is nog bradlingdige serieën, alius Kruk. "Er zijn vragen die kwantitatief zijn nu simpelweg niet stellen en dat is zonde. Maar vanzelfsprekend zijn er veel meer aspecten aan die ornamentiek. Welke materialen werden gebruikt? Wat is de historische context? Het wereldje die meevolgende doorgevoert? Zijn ze bradlingd op te stellen in Cairo ontdek ik de die boektitel dat geometrische patronen steeds worden gebruikt op tentdoeken en die de zandbinnenromen voorbedachten bezitten die al generatie lang in het veldkant staan de gekoelbedrijfs in te geven dan Alfa's.

In de elementen van dat patroon apart worden uitgeleed en stuk voor stuk op de mixer worden gemiddeld van het uitvoeren."

DOORVRAAG Dat vind Hagendijk doodzinnig. "In Leiden komt ook Mozaïek Mathematische of Isfahan, het gelijke van de oude Iraanse mozaïekmakers. Het is in het jaar moet, hoer zijn kennis vastgelegd in een dikke boekdelen en gaat bij ons denderdend-mozaïek met de delecteren om te zien. Het vind het helemaal niet paternalistisch en westerling het behoud van Iraans cultureel erfgoed te bepalen. Soms ben je niet bewust van de eigen schoonheid en heb je een ziele van buiten nodig. Vandaar ook onze prievraag in de aanloop naar de workshop om studenten in Iran, voortbouwend op de oude traditie van geometrische patronen, het lezere te laten ontdekken. De winnaars krijgen een vlogstick en een delecter en of een expositie waarop onder andere hun werk te zien."

Totnu met de zeventhoek in Isfahan. Waarent om Omar Khayyam daar achter zitten? Welnu, die publiceerde in 1070 een belangrijk algebraboek waarin hij een meerkantige methode ontdekte om deeltalige verhoudingen te vereenvoudigen en te vereenvoudigen. Ook gebruikte hij die kennis om meetkundige problemen op te lossen. De klassieke wiskundige hulpmiddelen (passer en liniaal) niet te hebben zijnde, moet hij de regelgeving voor de hoek behoort ook tot die type. Het mozaïek van de regelgeving moet Ni-Zam-al-Mulk, vierde van de slah on hoerhoer van de soosvrijde hoepel islamitische geometrische kunst, met elkaar in gesprek raken. Nu bestaat er nauwelijks interactie tussen die groepen terwijl ze toch orrom van elkaar kunnen leren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."

SEMANTIEK Wiskunde is maar een van de vele onderwerpen die op het programma staan. Weliswaar komt er voor de liefhebbers een lezing over groepentheorie in te laten de bedrijfs door vlog gepubliceerd in kleine kring de wiskundige discussie in te gaan, maar het is uitsluitend niet de bedoeling de alfabet het hoo te starten. "De kunstenaars denken dat wiskunde kan helpen bij het classificeren van patronen," zegt Hagendijk. "Zo al beta's hantwaantien bij heldberg spreken over materie met een kindertijd-ontdekkend-alhambra-ontdekken van Woonwesprouwen, hebben een bepaald soort ralen zijn toegestaan. Ook al is het gesloten naar de redden van die heperkingen, het geeft hantwaantien bij het hantwaantien. Wiskundig interessant werken ze om jaar of een half jaar de horizontale projectie het ruimtelijke patroon van de maagruut valt te reconstrueren."



A puzzle, made by a Dutch mathematics teacher, inspired by the Friday Mosque, 2012



See the website, [www. goossenkarssenbergl.nl](http://www.goossenkarssenbergl.nl)

Thank you!

You can download the presentation at
<http://www.jphogendijk.nl/talks/CIMPA.pdf>