

# Reconnaissance de plan et fractions continues

Thomas Fernique

LIRMM – Univ. Montpellier 2

LIAFA, 23 octobre 2007

Problème général : vectorisation d'objets discrets.  
Par triangulation ou par polyédrisation.

Sous-problème : reconnaissance de droite/plan.

Approches existantes :

- géométrie computationnelle ;
- préimage ;
- droites : prop. locales et recodage.

Dans cet exposé : prop. locales et recodage d'hyperplans.

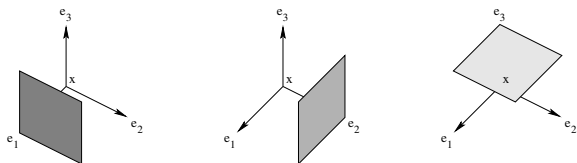




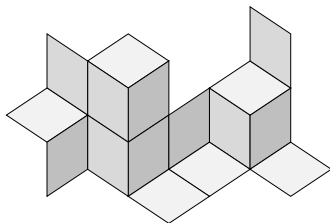
## Définition (face)

La *face* localisée en  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$  de type  $i \in \{1, \dots, d\}$ , notée  $(\vec{x}, i^*)$  est la fonction sur  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  valant 1 en  $(\vec{x}, i)$  et 0 ailleurs.

Interprétation géométrique ( $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$  base canonique de  $\mathbb{R}^d$ ) :



Une fonction de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  dans  $\{0, 1\}$  est dite *binnaire*.  
C'est une somme (finie ou non) de faces. Interp. géom. naturelle :



On note  $\mathfrak{B}$  l'ensemble des fonctions binaires. Plus généralement :  
On note  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, d\}$  dans  $\mathbb{Z}$ .  
Ce sont les sommes pondérées de faces (pas d'interp. géom.)

### Définition (plan en escalier)

Le *plan en escalier* de vecteur normal  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\vec{0}\}$  et d'intercept  $\rho \in \mathbb{R}$  est la fonction binaire  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  définie par :

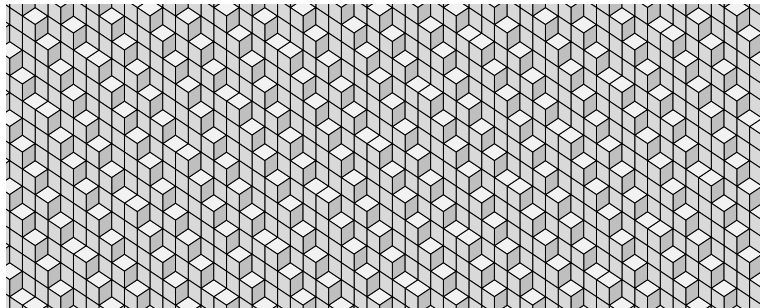
$$\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}(\vec{x}, i) = 1 \Leftrightarrow \langle \vec{x} | \vec{\alpha} \rangle < \rho \leq \langle \vec{x} + \vec{e}_i | \vec{\alpha} \rangle.$$

Le plan en escalier  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  est une discrétisation du plan réel :

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \vec{x} | \vec{\alpha} \rangle = \rho\}.$$

On note  $\mathfrak{P}$  l'ensemble des plans en escalier. On a :

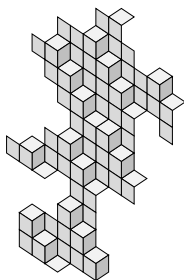
$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}.$$



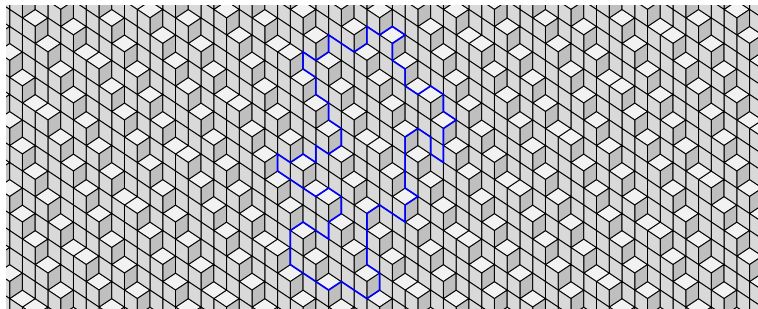
Selon la terminologie de Réveilles, l'ensemble des sommets de  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  forme un *plan discret standard* de paramètres  $(\vec{\alpha}, \rho)$ .



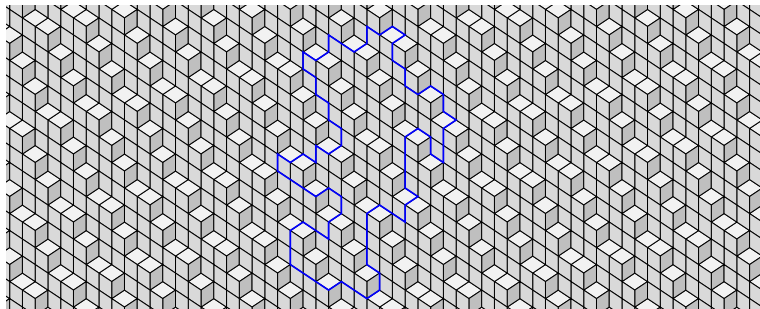
Un *morceau* d'un plan  $\mathcal{P}$  est une fonction binaire inférieure à  $\mathcal{P}$ .  
Son interprétation géométrique est incluse dans celle de  $\mathcal{P}$ .



Un *morceau* d'un plan  $\mathcal{P}$  est une fonction binaire inférieure à  $\mathcal{P}$ .  
Son interprétation géométrique est incluse dans celle de  $\mathcal{P}$ .



Un *morceau* d'un plan  $\mathcal{P}$  est une fonction binaire inférieure à  $\mathcal{P}$ .  
Son interprétation géométrique est incluse dans celle de  $\mathcal{P}$ .



Soulignons que plusieurs plans peuvent partager un même morceau.

Plus généralement, étant donné une fonction binaire  $\mathcal{B}$ , on note  $P(\mathcal{B})$  l'ens. des paramètres des plans dont  $\mathcal{B}$  est un morceau :

$$P(\mathcal{B}) = \{(\vec{\alpha}, \rho) \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\vec{0}\} \times \mathbb{R} \mid \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}\}.$$

On parle des *paramètres acceptables* de  $\mathcal{B}$ . C'est un polytope convexe de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , non vide ssi  $\mathcal{B}$  est un morceau de plan.

Le problème de la reconnaissance de plan revient alors à *calculer* l'ensemble  $P(\mathcal{B})$  (e.g., ses points extrémaux).



Un mot est une concaténation de lettres d'un alphabet fini.  
 Une substitution est un morphisme non effaçant sur les mots.

Par exemple,  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  est une substitution t.q. :

$$\sigma(1213) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1)\sigma(3) = 1213121.$$

À un mot  $w$  sur  $\{1, \dots, d\}$  est associé le vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  défini par :

$$\vec{f}(w) = (|w|_1, \dots, |w|_d).$$

La *matrice d'incidence* d'une substitution  $\sigma$  est définie par :

$$M_\sigma = (|\sigma(i)|_j)_{ij} = (\vec{f}(\sigma(1)), \dots, \vec{f}(\sigma(d))).$$

Par exemple,  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  vérifie :

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces notions s'étendent naturellement au groupe libre à  $d$  éléments (groupe engendré par les lettres  $1, \dots, d$ ).

Par exemple, la substitution  $\sigma$  ci-dessus est alors inversible (automorphisme), d'inverse  $\sigma^{-1} : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3^{-1}1, 3 \mapsto 3^{-1}2$  :

$$\sigma^{-1}(1213121) = (3)(3^{-1}1)(3)(3^{-1}2)(3)(3^{-1}1)(3) = 1213.$$

L'*application duale* d'une substitution *unimodulaire*  $\sigma$ , notée  $E_1^*(\sigma)$ , est l'unique endomorphisme de  $\mathfrak{F}$  vérifiant :

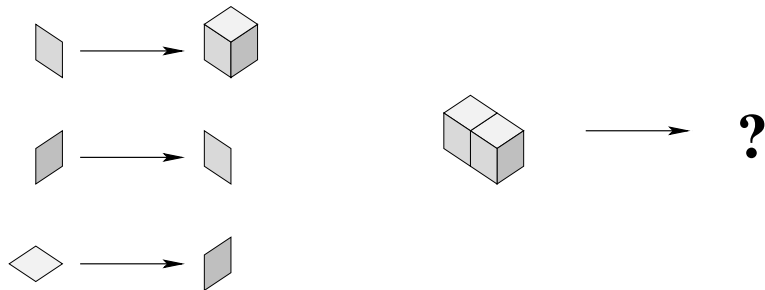
$$E_1^*(\sigma)(\vec{x}, i^*) = \sum_{j|\sigma(j)=p \cdot i \cdot s} (M_\sigma^{-1}(\vec{x} - \vec{f}(p)), j^*).$$

Notion introduite par Ito, Ohtsuki et Arnoux (1992–2001)  
Étendue au cas des morphismes de groupe libre par Ei (2003).

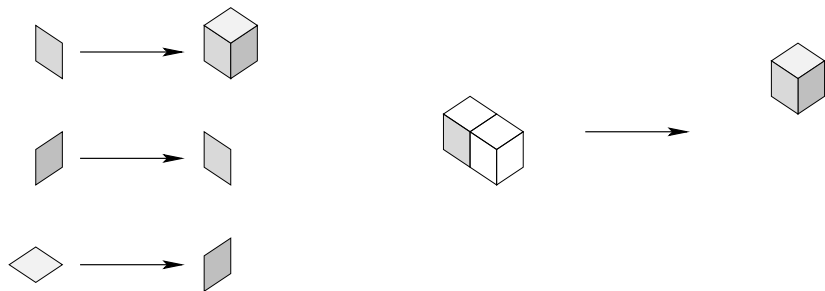
Objectifs originels : caractérisation des morphismes inversibles,  
construction explicite de partitions de Markov particulières.

Ici : recodage de plans ou morceaux de plans en escalier (suite).

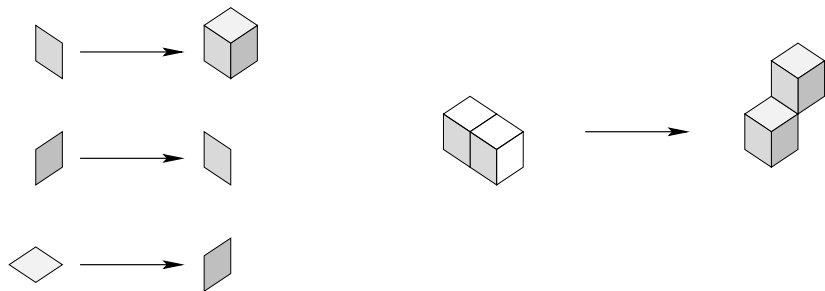




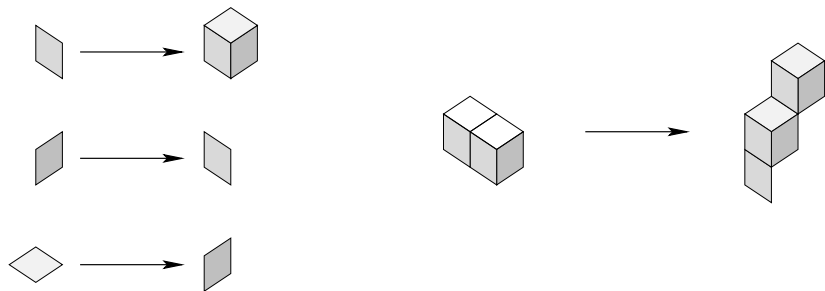
Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_{\sigma}^{-1}$ .



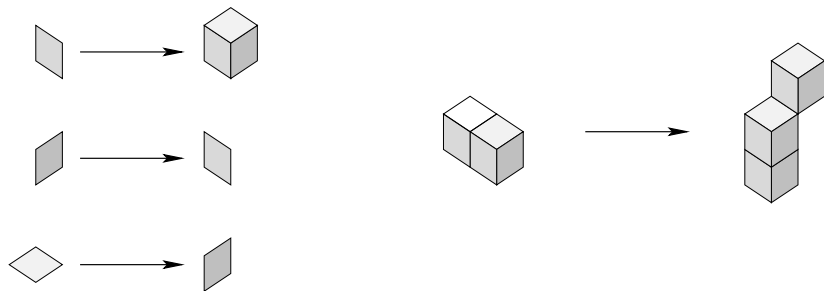
Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_\sigma^{-1}$ .



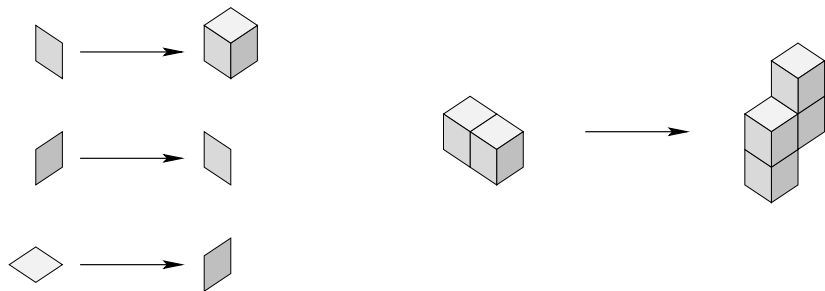
Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_{\sigma}^{-1}$ .



Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_{\sigma}^{-1}$ .



Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_{\sigma}^{-1}$ .



Application duale de la substitution  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ .  
 L'image d'une face ne dépend, à translation près, que de son type.  
 Les translations sont gouvernées par la matrice  $M_\sigma^{-1}$ .

Rappel : seules les fonctions binaires ont une interp. géom.  
Mais elles ne sont pas stables par applications duales. Par contre :

### Théorème (F. 2006)

Si  $\sigma$  est une substitution unimodulaire,  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\vec{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  
alors on a :

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}) = \mathcal{P}_{{}^t M_\sigma \vec{\alpha}, \rho}.$$

S'étend naturellement au cas des morphismes de groupe libre  
quand  ${}^t M_\sigma \vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$  (Berthé-F. 2007).

Il y a un résultat analogue pour les morceaux de plan :

### Proposition

Si  $\sigma$  est une substitution unimodulaire,  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d \setminus \{\vec{0}\}$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ , alors on a :

$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} \Rightarrow 0 \leq E_1^*(\sigma)(\mathcal{B}) \leq \mathcal{P}_{tM_\sigma \vec{\alpha}, \rho}.$$

S'étend mal au cas des morphismes de groupe libre, même quand  ${}^tM_\sigma \vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^d$  (voir plus loin).





Fractions continues classiques : l'application de Gauss

$$T : \alpha \mapsto \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$$

permet de définir le *développement*  $(\lfloor |T^n(\alpha)|^{-1} \rfloor)_n$  du réel  $\alpha$ .

$$\frac{11}{14} \rightsquigarrow [1, 3, 1, 2].$$

Nombreuses extensions multi-dim. (*c.f.* Brentjes, Schweiger).  
Aucune n'est canonique.

*Applic. de Brun*  $T$ , définie pour  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  :

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_i} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_i} \right\rfloor, \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_d}{\alpha_i} \right),$$

où  $i = \min\{j \mid \alpha_j = \|\vec{\alpha}\|_\infty\}$ .

*Développement de Brun*  $(a_n, i_n)_n$  de  $\vec{\alpha}$  :

$$a_n = \lfloor \|T^n(\vec{\alpha})\|_\infty^{-1} \rfloor \quad \text{et} \quad i_n = \min\{j \mid \langle T^n(\vec{\alpha}) | \vec{e}_j \rangle = \|T^n(\vec{\alpha})\|_\infty\}.$$

$$\left( \frac{11}{14}, \frac{19}{21} \right) \rightsquigarrow [(1, 2), (1, 1), (6, 1), (1, 2), (1, 1), (3, 1), (1, 2)].$$

Brun matriciellement :

$$(1, T(\vec{\alpha})) \propto B_{a,i}^{-1}(1, \vec{\alpha}) \quad \text{avec} \quad B_{a,i} = \begin{pmatrix} a & & & 1 \\ & I_{i-1} & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & I_{d-i} \end{pmatrix}.$$

On introduit alors les substitutions inversibles suivantes :

$$\beta_{a,i} : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^a(i+1), \\ (i+1) & \mapsto 1, \\ j & \mapsto j. \end{cases}$$

Notons :  $M_{\beta_{a,i}} = B_{a,i}$ .

vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

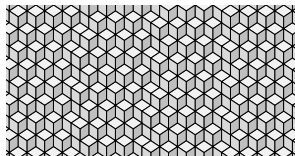
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, \alpha, \beta) = \left(1, \frac{11}{14}, \frac{19}{21}\right)$$



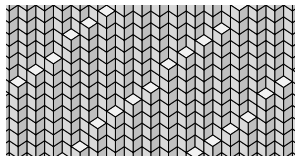
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, \frac{33}{38}, \frac{2}{19}) \propto B_{1,2}^{-1}(1, \frac{11}{14}, \frac{19}{21})$$



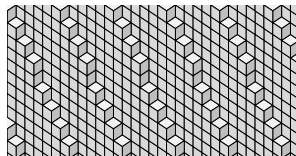
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$\left(1, \frac{5}{33}, \frac{4}{33}\right) \propto B_{1,1}^{-1}\left(1, \frac{33}{38}, \frac{2}{19}\right)$$





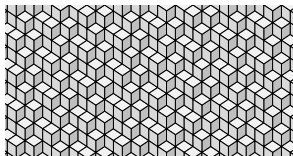
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}) \propto B_{6,1}^{-1}(1, \frac{5}{33}, \frac{4}{33})$$



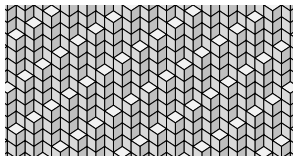
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \propto B_{1,2}^{-1}(1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5})$$



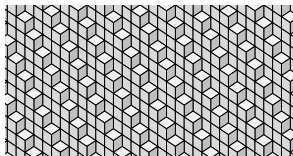
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \propto B_{1,1}^{-1}(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$$



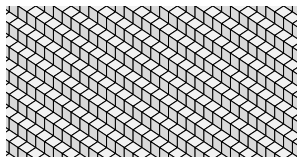
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, 0, 1) \propto B_{3,1}^{-1}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$



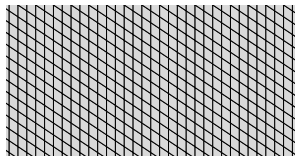
vecteur  $\vec{\alpha} \in [0, 1]^d$

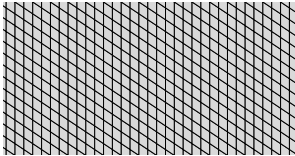
$$(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)$$

plan en escalier  $\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}$

$$\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})$$

$$(1, 0, 0) \propto B_{1,2}^{-1}(1, 0, 1)$$



<p>vecteur <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p><math>(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \propto B_{a_n, i_n}^{-1}(1, \vec{\alpha}_n)</math></p>	<p>plan en escalier <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})} = E_1^*(\beta_{a_n, i_n}^{-1})(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)})</math></p>
<p><math>(1, 0, 0) \propto B_{1,2}^{-1}(1, 0, 1)</math></p>	

Par abus, on parle de *développement de Brun de plan*.

Comment calculer le développement d'un plan *directement dessus* ?





### Proposition (Berthé-F. 2007)

Les  $(i, j)$ -paliers de  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  sont de tailles  $\lfloor \alpha_i / \alpha_j \rfloor$  ou  $\lceil \alpha_i / \alpha_j \rceil$ .

Ceci permet de définir deux fonctions effectives  $a$  et  $i$  t.q. :

$$i(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}), \rho}) = \min\{i \mid \alpha_i = \|\vec{\alpha}\|_\infty\} \quad \text{et} \quad a(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}), \rho}) = \lfloor \|\vec{\alpha}\|_\infty^{-1} \rfloor.$$

En définissant alors  $\tilde{T} : \mathcal{P} \mapsto E_1^*(\beta_{a(\mathcal{P}), i(\mathcal{P})}^{-1})(\mathcal{P})$  :

$$\mathcal{P}_{(1, T(\vec{\alpha}), \rho) = \tilde{T}(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}), \rho}).$$

$\rightsquigarrow$  calcul du développement de Brun d'un plan via  $\tilde{T}$ .



On veut prolonger  $\tilde{T}$  sur  $\mathfrak{B}$  pour avoir :

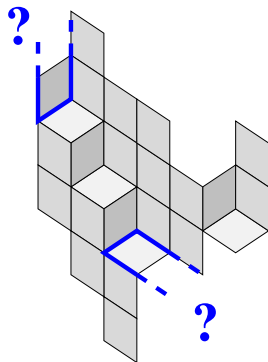
$$0 \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{P} \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{T}(\mathcal{B}) \leq \tilde{T}(\mathcal{P}).$$

Intérêt :

- $\tilde{T}(\mathcal{B})$  généralement beaucoup plus *petite* que  $\mathcal{B}$  ;
- $P(\mathcal{B})$  se déduit facilement de  $P(\tilde{T}(\mathcal{B}))$ .

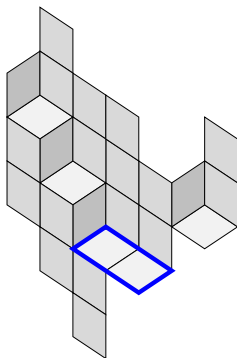
↪ Recodage de l'objet à reconnaître (*c.f.* intro, cas des droites)

Paliers toujours définis, mais insuffisants :



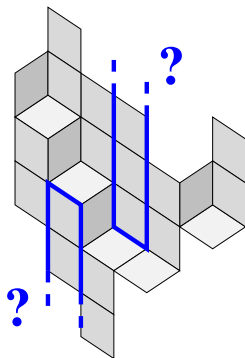
$$\text{Si } \mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta),\rho}$$

Paliers toujours définis, mais insuffisants :



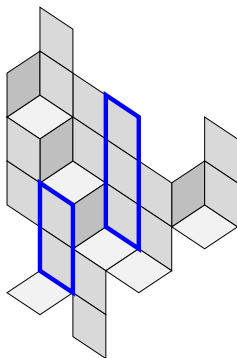
Si  $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta),\rho}$  alors  $\beta > \alpha$

Paliers toujours définis, mais insuffisants :



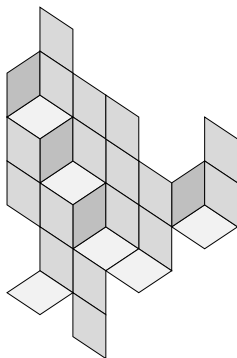
Si  $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta),\rho}$  alors  $\beta > \alpha$

Paliers toujours définis, mais insuffisants :



Si  $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta),\rho}$  alors  $\beta > \alpha$  et  $2 < \beta < 3$

Paliers toujours définis, mais insuffisants :

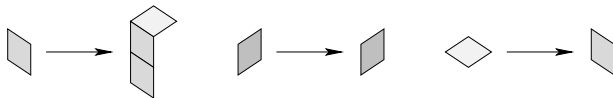


Si  $\mathcal{B} \leq \mathcal{P}_{(1,\alpha,\beta),\rho}$  alors  $\beta > \alpha$  et  $2 < \beta < 3 \rightsquigarrow$  reconnaissable !



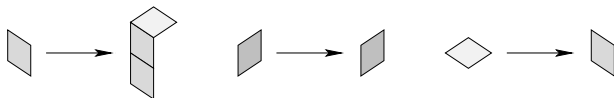
$\mathcal{B}$  reconnaissable ne suffit pas, il faut aussi  $\tilde{T}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{B}$ .

Action de  $E_1^*(\beta_{a,i})$  :



$\mathcal{B}$  reconnaissable ne suffit pas, il faut aussi  $\tilde{T}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{B}$ .

Action de  $E_1^*(\beta_{a,i})$  :



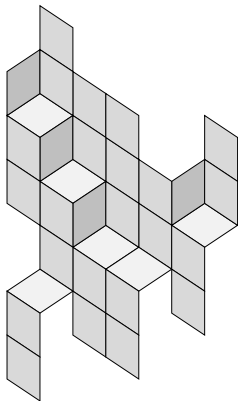
Idée : jouer sur les classes d'équivalences de la relation :

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Leftrightarrow P(\mathcal{B}') = P(\mathcal{B}).$$

Ces classes sont généralement grandes  $\rightsquigarrow$  degrés de liberté.

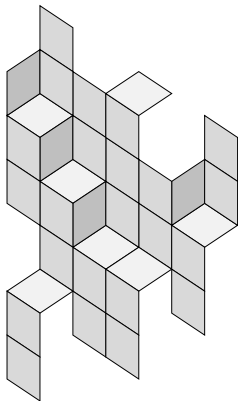


L'image par  $E_1^*(\beta_{2,2}^{-1})$  de cette fonction binaire n'est pas binaire :



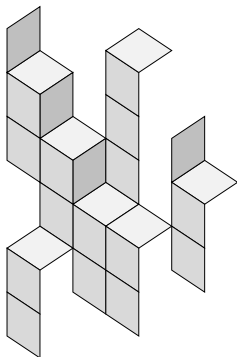
On prolonge les petits paliers,

L'image par  $E_1^*(\beta_{2,2}^{-1})$  de cette fonction binaire n'est pas binaire :



On prolonge les petits paliers, on ferme les grands

L'image par  $E_1^*(\beta_{2,2}^{-1})$  de cette fonction binaire est binaire :



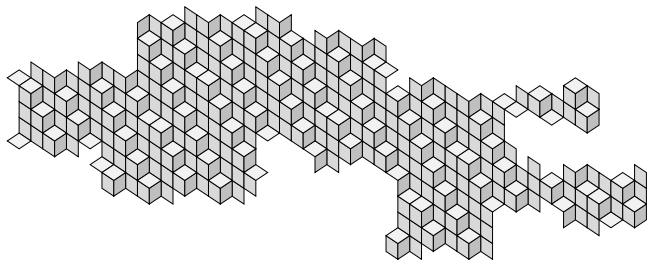
On prolonge les petits paliers, on ferme les grands et on élague.

Algorithme :

- 
1. **tant que**  $\mathcal{B}$  est reconnaissable **faire**
  2.       prolonger et élaguer  $\mathcal{B}$ ;
  3.       recoder  $\mathcal{B}$  en  $\tilde{T}(\mathcal{B})$ ;
  4. **fin tant que**;
  5. calculer  $P(\mathcal{B})$  par un autre algorithme;
  6. remonter aux paramètres de la fonction binaire initiale;
- 

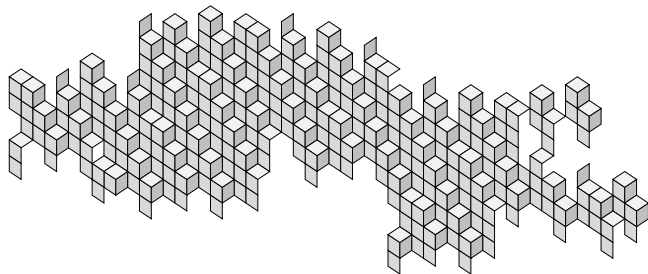
Complexité :

Quadratique au pire, linéaire attendu en pratique.

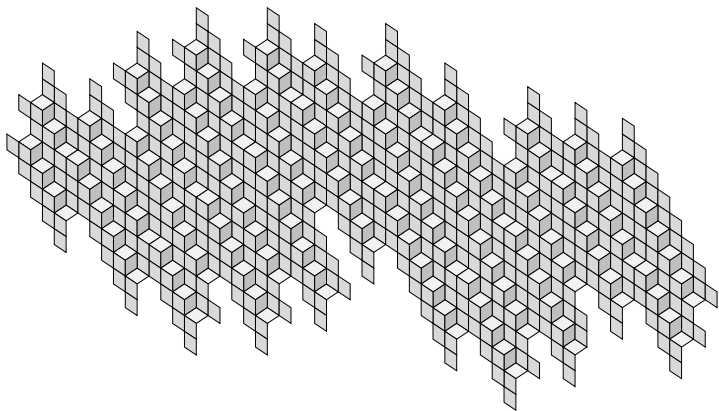


Fonction binaire de 407 faces, reconnaissable,  $(a, i) = (2, 2)$ .

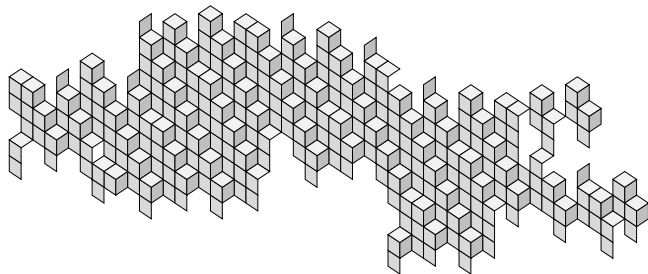




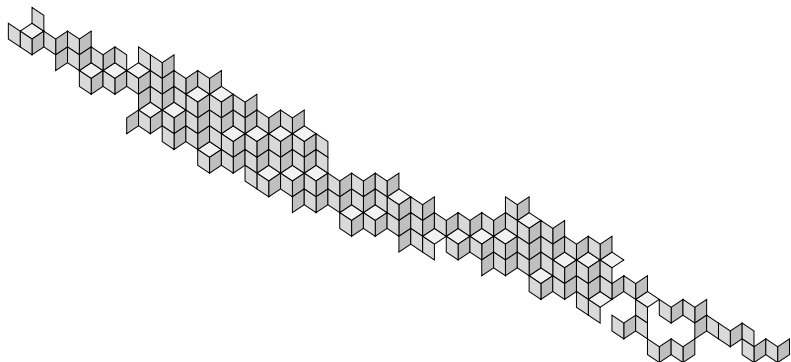
Après prolongements/élagage (416 faces).



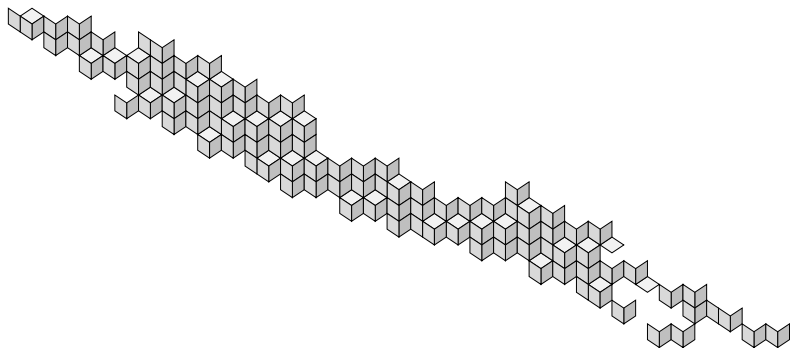
L'info des paliers permettrait de prolonger plus (758 faces).



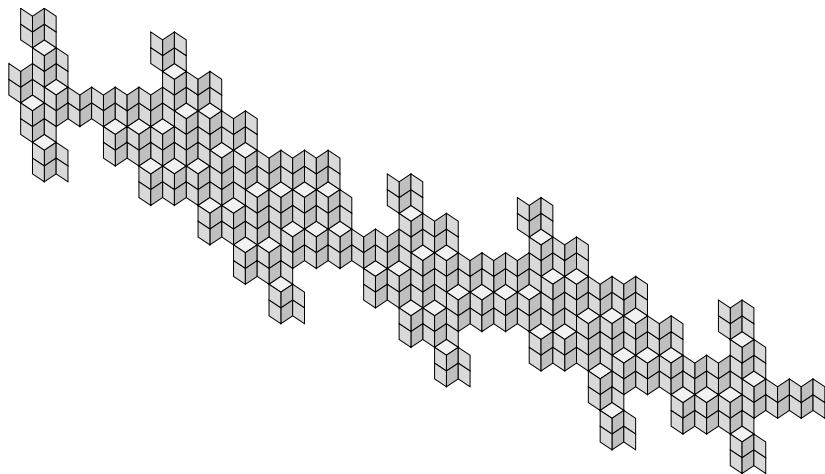
Mais on veut désubstituer par  $E_1^*(\beta_{2,2}^{-1})$ .



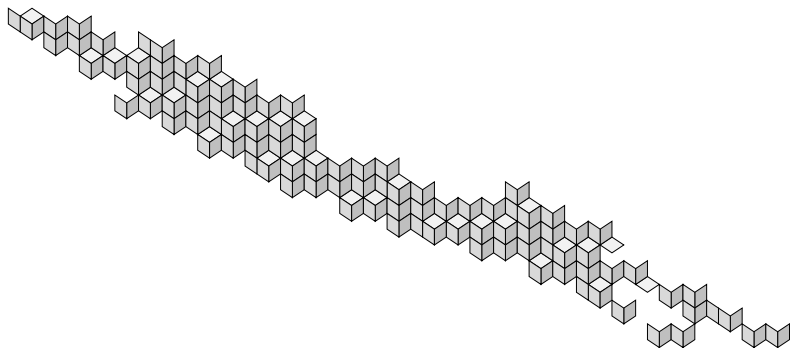
Fonction binaire de 216 faces, reconnaissable,  $(a, i) = (1, 1)$ .



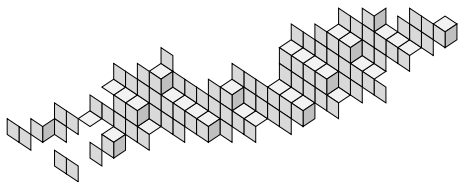
Après prolongements/élagage (217 faces).



L'info des paliers permettrait de prolonger plus (476 faces).

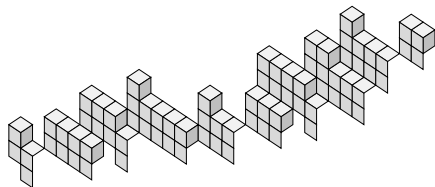


Mais on veut désubstituer par  $E_1^*(\beta_{1,1}^{-1})$ .

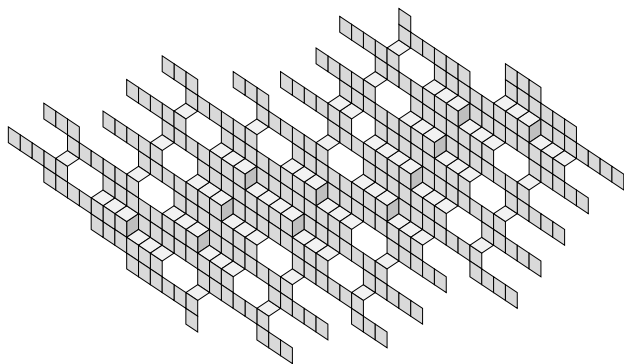


Fonction binaire de 129 faces, reconnaissable,  $(a, i) = (2, 2)$ .

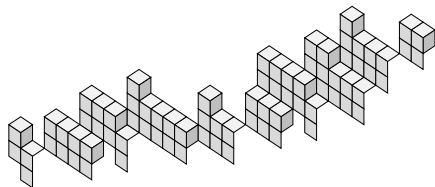




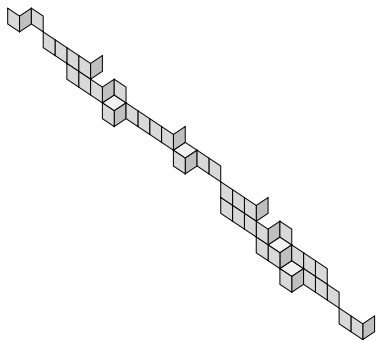
Après prolongements/élégage (126 faces).



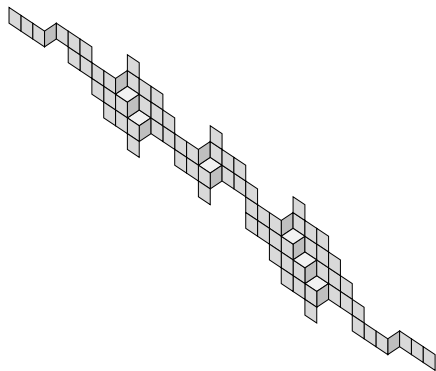
L'info des paliers permettrait de prolonger plus (427 faces).



Mais on veut désubstituer par  $E_1^*(\beta_{2,2}^{-1})$ .



Fonction binaire de 52 faces, non reconnaissable.



L'info des paliers ne suffit pas à la rendre reconnaissable.

Intérêt de la reconnaissance par recodage :

- nouveau (sauf pour les droites) ;
- bonne complexité potentielle (linéaire) ;
- reconnaissance floue (Brun) ;
- recodage “en sens inverse”  $\rightsquigarrow$  génération de plan.

Défauts :

- robustesse (adaptable ?) ;
- pas de tests “sérieux” (*benchmark etc..*)