

Pavages canoniques substitutifs

(Thèse de Edmund Harriss, février 2004)

N. Pytheas Fogg

Marseille, 20 mai 2016

1 Pavages canoniques

Le principe général est le suivant (voir livre de Baake et Grimm p.264). Soit \mathcal{L} un réseau inclus dans un espace $V \times W$ et des projections sur V et W . On sélectionne d'abord les points de \mathcal{L} qui se projettent dans l'espace interne W dans un certain sous-ensemble Ω appelé **fenêtre**. On les projette ensuite W , appelé **espace réel** ou **espace physique**. On peut enfin relier les points obtenus par les projetés des générateurs du réseau pour avoir, si tout se passe bien (**tiling property**, p.42) un joli pavage. .

Le cas *canonique* correspond au réseau des points entiers de \mathbb{R}^n avec une fenêtre Ω qui est le projeté de l'hypercube unité de dimension n . On obtient des pavages par losanges ou rhomboèdres, les **canonical projection tilings**.

Généralement V est un espace qui ne contient pas de sous-espace rationnel (pour avoir des pavages aperiodiques), mais pas forcément W : on peut cependant l'imposer quitte à écrire $\mathbb{R}^n = V \oplus W \oplus \mathbb{R}$ avec \mathbb{R} espace rationnel. C'est ce que fait Harriss, qui introduit également plusieurs notations (p.39) :

- $H_{r,t} := H_0 + r + t$ où $H_0 := [0, 1]^n$, $r \in \mathbb{R}$ et $t \in V + W$
- W_j : un plan parallèle à W qui coupe la fenêtre et passe par $\Pi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}^n)$
- $\Omega_{r,t}^j := W_j \cap \Pi_{W+\mathbb{R}}(H_{r,t})$ (une sorte de sous-fenêtre associée à W_j)

Exemple 1 (Mot sturmien) Dans \mathbb{R}^2 , V et W sont des droites irrationnelles, \mathbb{R} est réduit à 0, la fenêtre est un intervalle.

Exemple 2 (Mot du billard) Dans \mathbb{R}^3 , V est une droite irrationnelle, W est un plan, R est réduit à 0 , la fenêtre est un hexagone.

Exemple 3 (Mot d'Arnoux-Rauzy) Dans \mathbb{R}^3 , V est une droite irrationnelle, W est un plan, R est réduit à 0 , la fenêtre est un fractal de Rauzy (ce n'est donc pas un pavage canonique).

Exemple 4 (Plan discret) Dans \mathbb{R}^3 , V est un plan irrationnel, W est une droite, R est réduit à 0 , la fenêtre est un intervalle.

Exemple 5 (Ammann-Beenker) Dans \mathbb{R}^4 , V et W sont des plans irrationnels (algébriquement conjugués), R est réduit à 0 , la fenêtre est un octogone. Plus précisément, V est engendré par

$$(\cos(k\pi/4))_{0 \leq k < 4} \quad \text{et} \quad (\sin(k\pi/4))_{0 \leq k < 4}$$

tandis que W est orthogonal à V .

Exemple 6 (Penrose) Dans \mathbb{R}^5 , V et W sont des plans irrationnels (algébriquement conjugués), R est une droite, la fenêtre est un triacontaèdre rhombique, i.e., un dé à 30 faces (Fig. 1). Plus précisément, V est engendré par

$$(\cos(2k\pi/5))_{0 \leq k < 5} \quad \text{et} \quad (\sin(2k\pi/5))_{0 \leq k < 5},$$

ou bien encore, en notant φ le nombre d'or, par

$$(\varphi, 0, -\varphi, -1, 1) \quad \text{et} \quad (-1, 1, \varphi, 0, -\varphi).$$

Le plan W lui est orthogonal, et R est engendré par $(1, 1, 1, 1, 1)$. Il y a 5 (ou 6 si r est entier) plans W_j et $\Pi_{W+R}(\mathbb{Z}^n)$ n'est pas dense dans Ω mais seulement dans l'union des Ω^j (Fig. 1).

2 Substitutions

De manière générale, une **substitution** est une application (pas forcément déterministe) d'un ensemble fini de tuiles (éventuellement décorées) dans un ensemble de motifs finis. On peut lui associer une **matrice d'incidence** qui compte le nombre de tuile de chaque type dans l'image de chaque tuile.

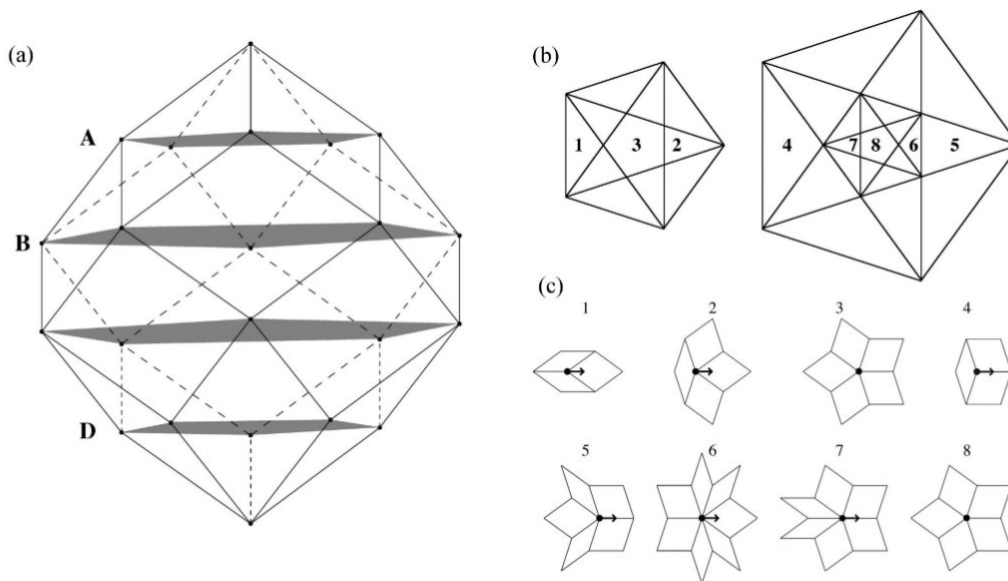


FIGURE 1 – La fenêtre pour le pavage de Penrose

L'idée est ensuite d'appliquer itérativement cette substitution sur une tuile pour avoir des motifs de plus en plus grands et, à la limite si tout se passe bien, un pavage, dit **substitutif**. On peut aussi définir un pavage substitutif comme un pavage qui admet une suite infinie d'antécédents par la substitution (c'est légèrement différent). Tout le problème est de placer l'une par rapport à l'autre les images des tuiles.

Une solution classique, qui est celle retenue par Harriss, est d'exiger que la substitution dilate toutes les tuiles par un même **facteur d'expansion** puis les remplace par des tuiles de l'ensemble original.

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\text{dilate}} \lambda\mathcal{T} \xrightarrow{\text{remplace}} \mathcal{T}'.$$

Le pavage $\lambda\mathcal{T}$ est appelé **expansion predecessor** de \mathcal{T}' . *A priori* il peut y avoir des problèmes de recouvrement ou de trou quand on remplace. Ça n'arrive pas quand chaque tuile dilatée est remplacée par un ensemble de tuiles qui occupe le même espace - on parle de substitution **edge-hierarchic**.

Exemple 7 *Chair, table ou sphinx tilings sont engendrés par des substitutions edge-hierarchic (mais ce ne sont pas des pavages canoniques).*

Exemple 8 *Les substitutions sur les mots ne sont pas edge-hierarchic, sauf celles à longueur constante. On peut cependant jouer sur la “taille” des lettres (longueur des tuiles les représentant) pour que ça marche quand même.*

Exemple 9 *Les substitutions engendrant les pavages d’Ammann-Beenker ou de Penrose ne sont pas edge-hierarchic (Fig. 2) mais on peut cependant les rendre edge-hierarchic en coupant certaines tuiles selon une diagonale bien choisie (Fig. 2).*

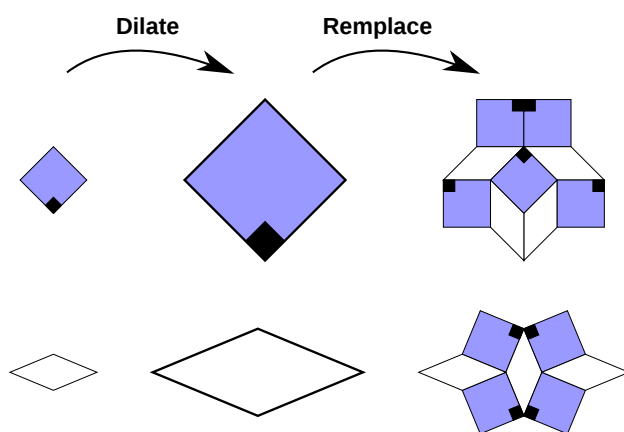


FIGURE 2 – Une substitution vertex-hierarchic pour Ammann-Beenker.

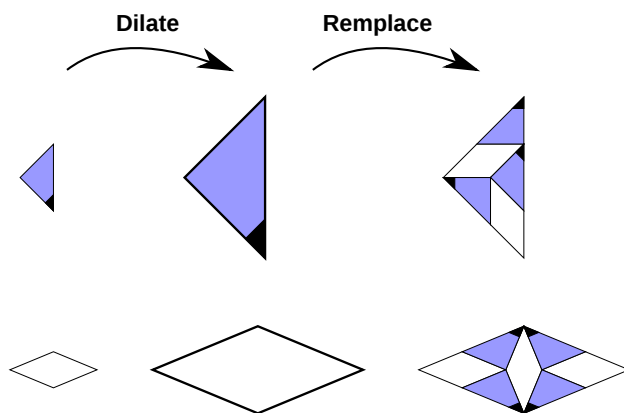


FIGURE 3 – Une substitution edge-hierarchic pour Ammann-Beenker.

La substitution est dite **vertex-hierarchic** si tout sommet d'une tuile dilatée est aussi un sommet des tuiles qui la remplacent (c'est toujours le cas dans la thèse d'Harriss).

3 Résultats

La question principale est de caractériser les pavages par coupe et projection canoniques qui sont substitutifs. Clairement les pentes obtenues sont algébriques car les fréquences des tuiles forment un vecteur propre de la matrice d'incidence de la substitution. Peut-on être plus précis ?

Def. 2.17 p.41 :

Définition 1 (Quadratic expansion matrix)

Soit $\mathbb{R}^n = V \oplus W \oplus R$ avec $\dim(V) = \dim(W)$. Une matrice d'expansion $\lambda > 1$ est une matrice entière M qui dilate de λ sur V , contracte de $\pm\lambda^{-1}$ sur W , laisse stable R et vérifie

$$\Pi_{V \oplus W}(M\mathbb{Z}^n) = \Pi_{V \oplus W}(\mathbb{Z}^n).$$

En particulier, λ est nécessairement quadratique. Si R est réduit à 0 la dernière condition est automatique (et sinon ?).

Exemple 10 Pour la décomposition $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ associée à Ammann-Beenker, on vérifie que la matrice suivante est d'expansion avec $\lambda = 1 + \sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle décrit en fait l'action de la substitution sur la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Exemple 11 Pour la décomposition $\mathbb{R}^5 = V \oplus W \oplus R$ associée à Penrose, la matrice suivante est d'expansion avec $\lambda = \varphi$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle décrit en fait l'action de la substitution sur la base canonique de \mathbb{R}^5 .

Le résultat principal :

Théorème 1 *Un canonical projection tiling défini par V, W, R et $r \in R$ est substitutif ssi les espaces V, W et R sont les espaces propres d'une matrice d'expansion λ vérifiant $r \in \Pi_R(\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Q}(\lambda))$ et la vertex hierarchy property :*

$$\forall j, \quad W_j \cap \Pi_{W+R}(MH_{r,0} + s) \subset \Omega_{r,0}.$$

Donc ça marche pour Ammann-Beenker et Penrose, mais pas pour un plan discret ou un 7-fold (car $\dim(V) \neq \dim(W)$). A priori ça marche pour le dodécagonal ($\dim(V) = \dim(W) = \dim(R) = 2$).

Harriss caractérise en plus toutes les substitutions possibles dans le cas $\dim(V) = \dim(W)$ et $\dim(R) = 0$, ainsi que dans le cas de Penrose.

4 Idées de la preuve

Soit un canonical projection tiling défini par V, W, R et $r \in R$.

S'il est substitutif, soit λ son facteur d'expansion et M sa **edge substitution matrix** (expliquer). Alors M agit sur V comme une multiplication par λ , lequel est algébrique car c'est une valeur propre de M . Ce sont les conjugués algébriques de λ qui agissent sur $W + R$. On utilise (lemme 5.2.3 p.114) le fait que la fenêtre soit polygonale et soit l'union de translatés de l'image par M d'elle-même (**pourquoi ?**) pour montrer qu'il y a au plus un conjugué algébrique de λ (sinon on obtient une fenêtre fractale comme pour les mots de Rauzy). Le fait que $r \in \Pi_R(\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Q}(\lambda))$ vient du résultat pour $\dim(V) = \dim(W) = 1$ appliqué aux projections sur les plans $A_{k,j}$ (déf. p.91).

Inversement, si on a une expansion matrix M de facteur d'expansion λ quadratique, superposons le pavage et son dilaté par λ . Le pavage original décore les supertuiles et, peut-être, en différencie certaines qui sinon seraient identiques. On note ça par une décoration qu'on reporte sur le pavage original (en contractant par $1/\lambda$). Peut-être que ça différencie à nouveau des supertuiles (déjà décorées) qui seraient sinon identiques : on note ça par une décoration et on itère. Harriss prouve que ça s'arrête au bout d'un nombre

fini d'étapes. Le fait que λ soit quadratique et $r \in \Pi_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Q}(\lambda))$ doit jouer ici **mais j'ai pas bien compris comment** (en particulier il a l'air de se ramener au cas d'une coupe de \mathbb{R}^2 par une droite en projetant sur des plans $A_{k,j}$ bien choisis). L'application qui à une tuile (a priori décorée) associe sa supertuile (a priori décorée aussi) est la substitution voulue. La figure 4 illustre le cas du pavage d'Ammann-Beenker.

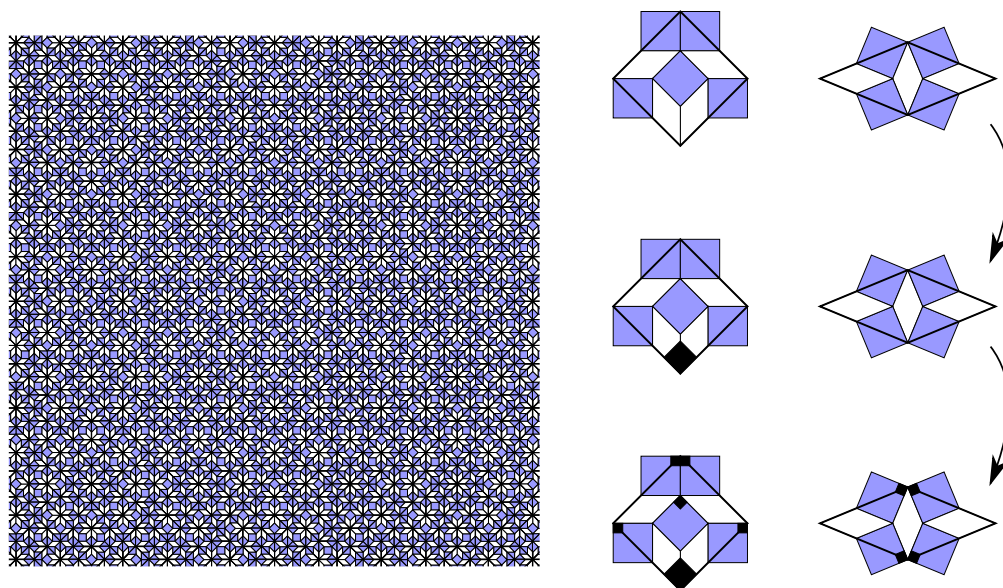


FIGURE 4 – Le pavage d'Ammann-Beenker sur lequel sont surimposées les arêtes des tuiles de son expansion predecessor (à gauche). Les tuiles du pavage décorent les tuiles de son expansion predecessor : les symétries du losange sont conservées mais pas celles du carré, ce qui conduit à distinguer un coin des carrés dilatés (à droite, deux premières lignes). Ce coin distingué doit être reporté dans les tuiles du pavage original. Dans ce cas, par chance, ça ne brise pas plus de symétries (à droite, deux dernières lignes).