Empilements d'Oranges et Variations

Thomas Fernique

CNRS & Université Paris Nord

Plan

Thue a un problème

Empilements d'oranges

Variations

Plan

Thue a un problème

Empilements d'oranges

Variations

Circle packing

Empilement de disques : disques d'intérieurs disjoints, dans le plan.

Circle packing

Empilement de disques : disques d'intérieurs disjoints, dans le plan.

Densité :

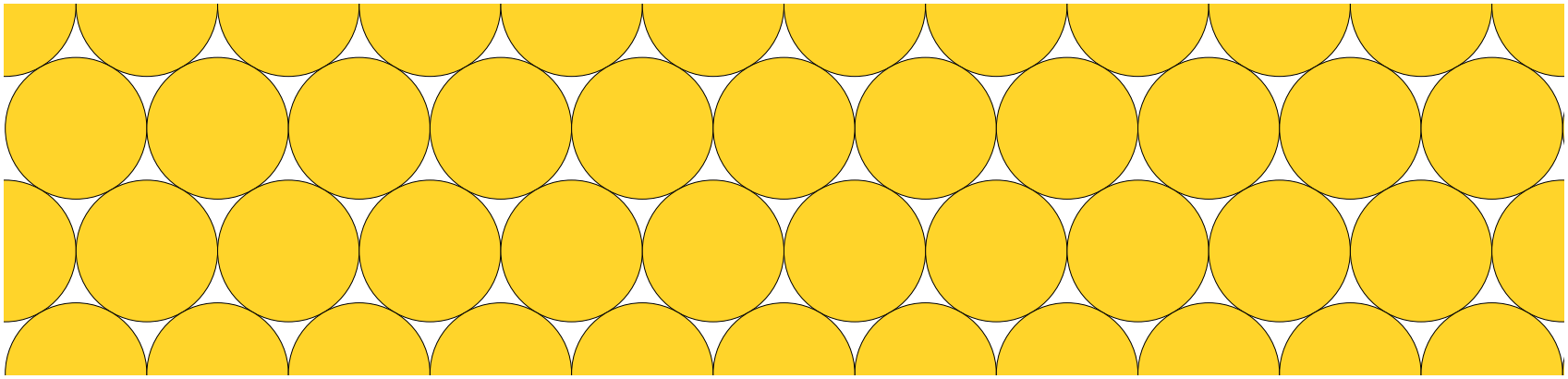
$$\delta := \limsup_{k\to\infty} \frac{\text{aire du carré } [-k,k]^2 \text{ couverte par les disques}}{\text{aire du carré } [-k,k]^2}.$$

Circle packing

Empilement de disques : disques d'intérieurs disjoints, dans le plan.

Densité :

$$\delta := \limsup_{k\to\infty} \frac{\text{aire du carré } [-k,k]^2 \text{ couverte par les disques}}{\text{aire du carré } [-k,k]^2}.$$



Theorem (Thue, 1910)

La densité d'un empilement de disques identiques est au plus $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)

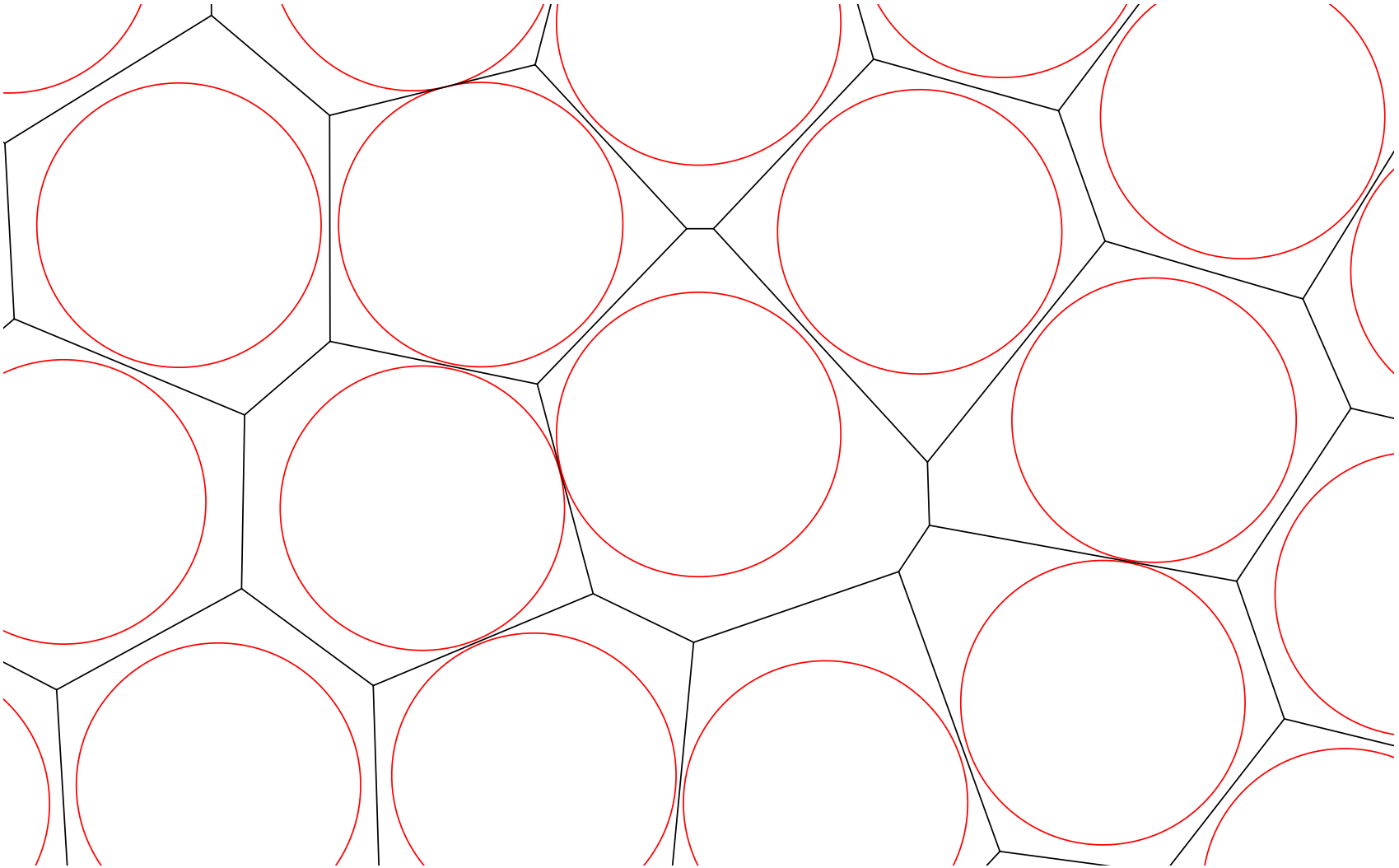
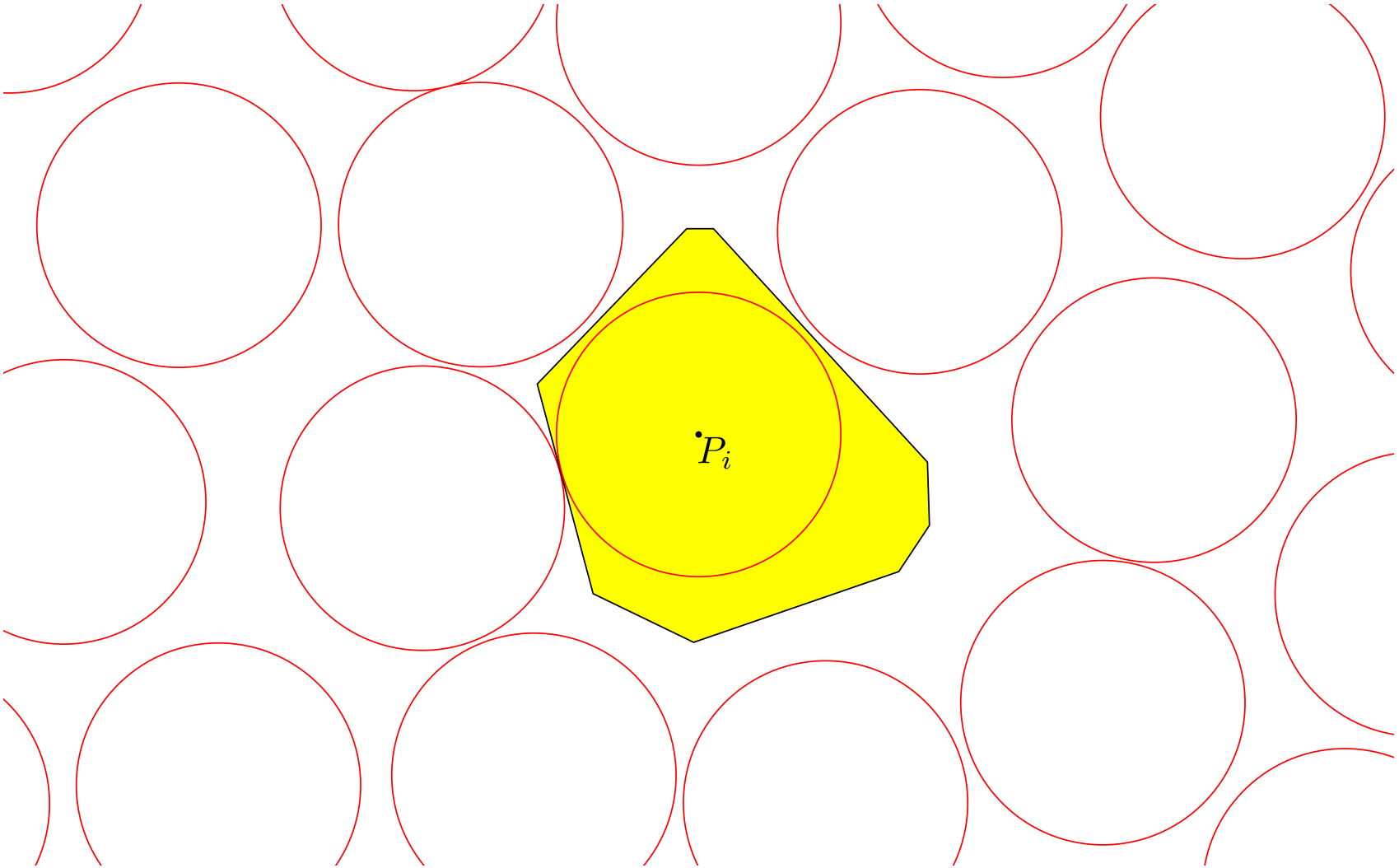


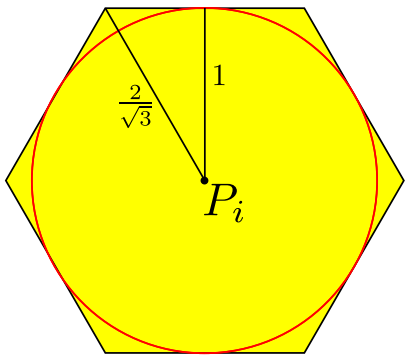
Diagramme de Voronoï d'un empilement de disques de rayon 1.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



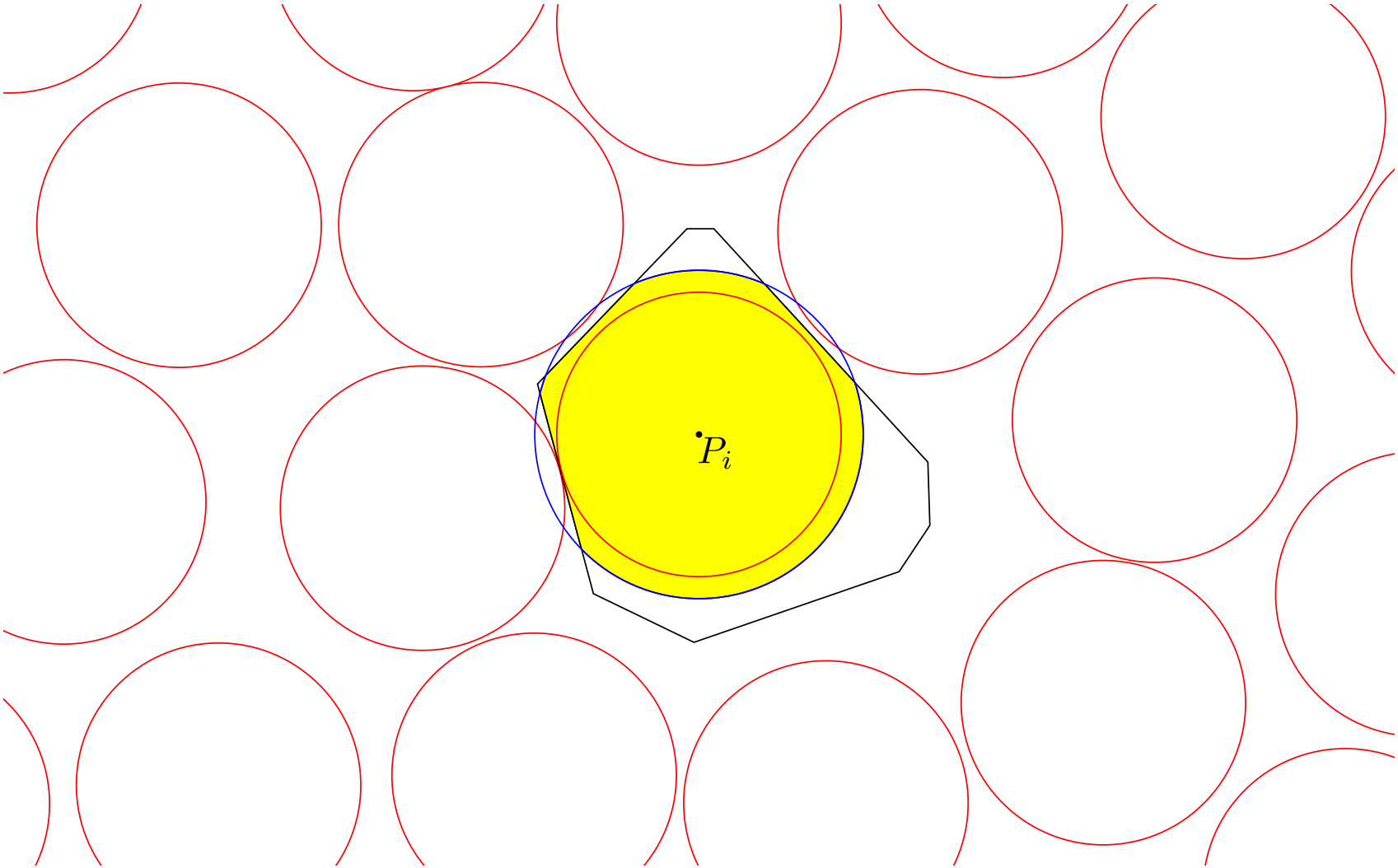
Il suffit de montrer que *chaque* cellule est d'aire au moins $2\sqrt{3}$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



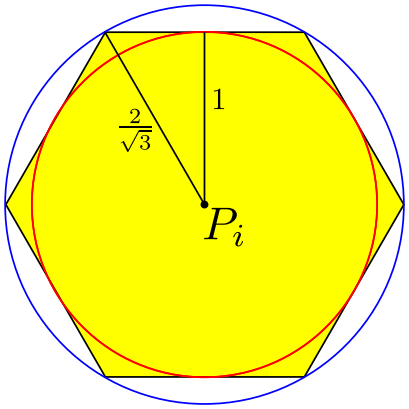
C'est l'aire de l'hexagone régulier avec un disque inscrit de rayon 1.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



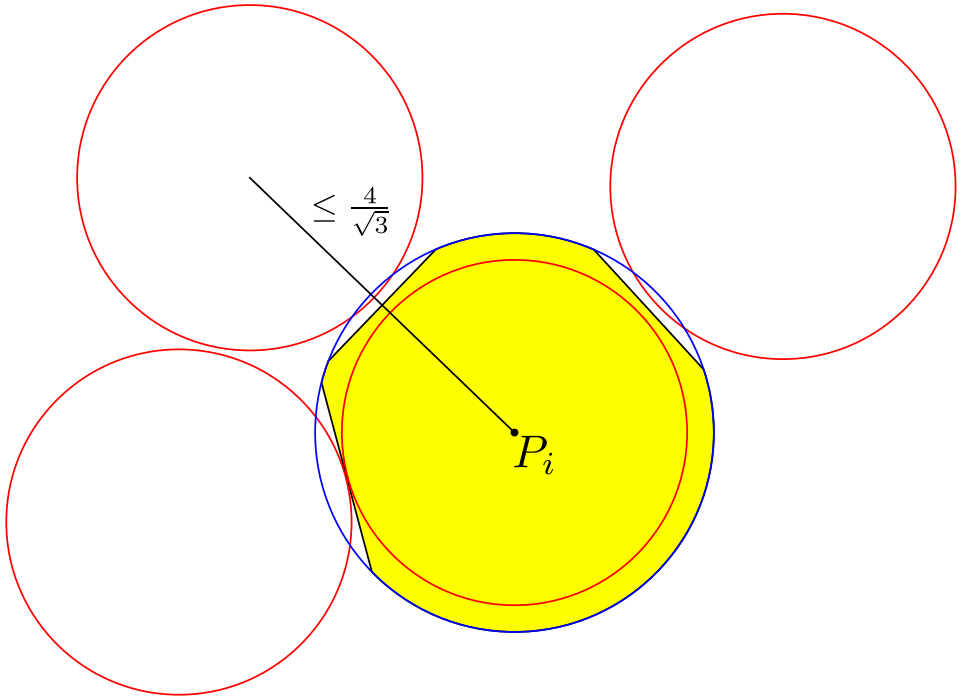
On va même ne considérer que l'aire dans un disque de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



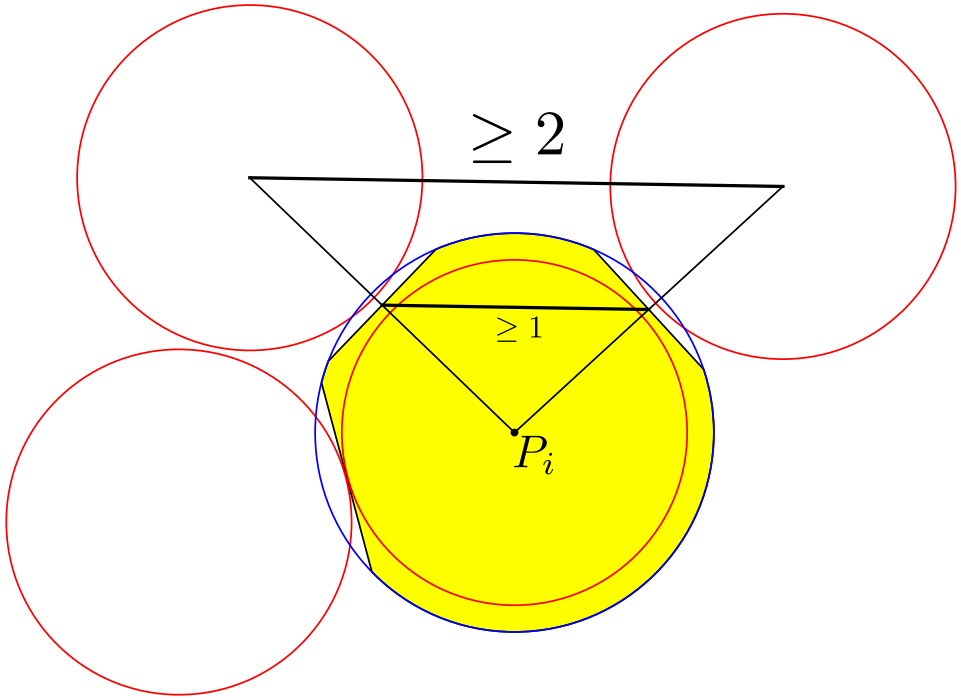
C'est le rayon du cercle circonscrit à notre hexagone régulier.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



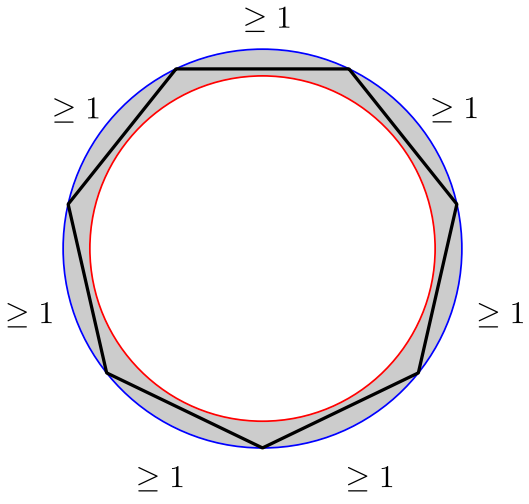
Intérêt : très peu de disques voisins vont influer sur cette aire.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



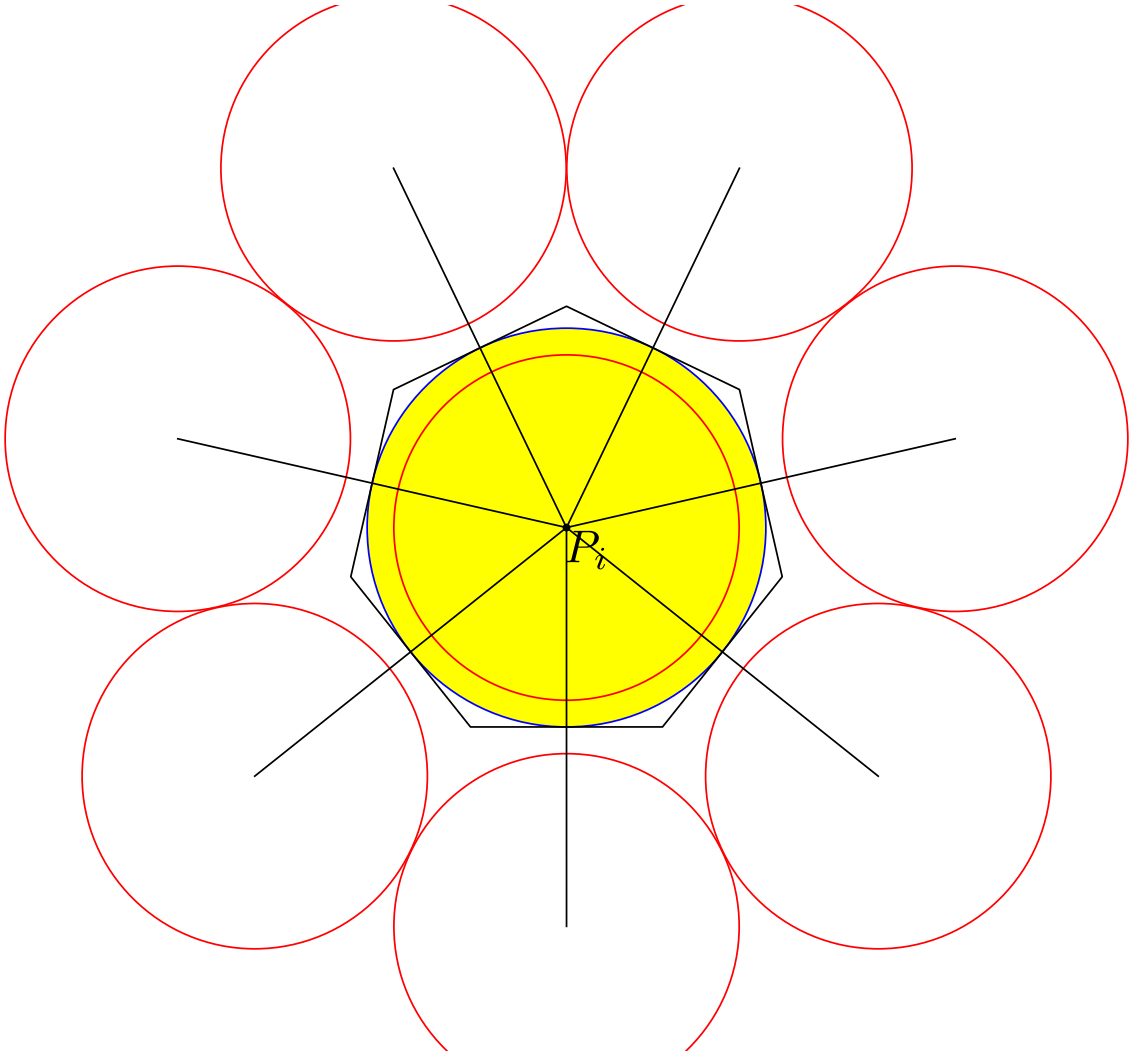
k disques $\rightsquigarrow$ k points à distance ≥ 1 dans la couronne $r \in [1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



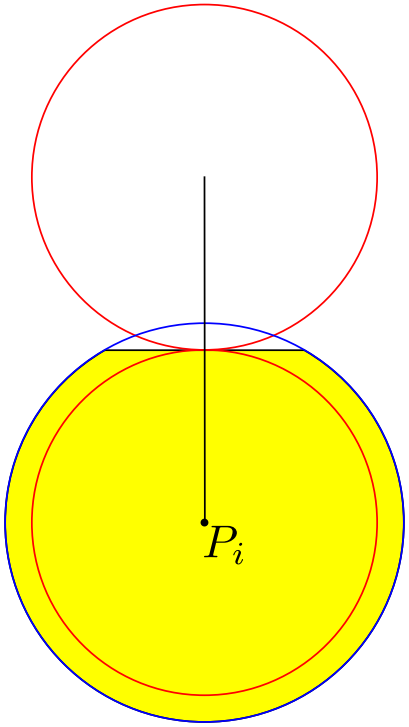
On montre $k \leq 7$, avec égalité pour un heptagone presque régulier.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



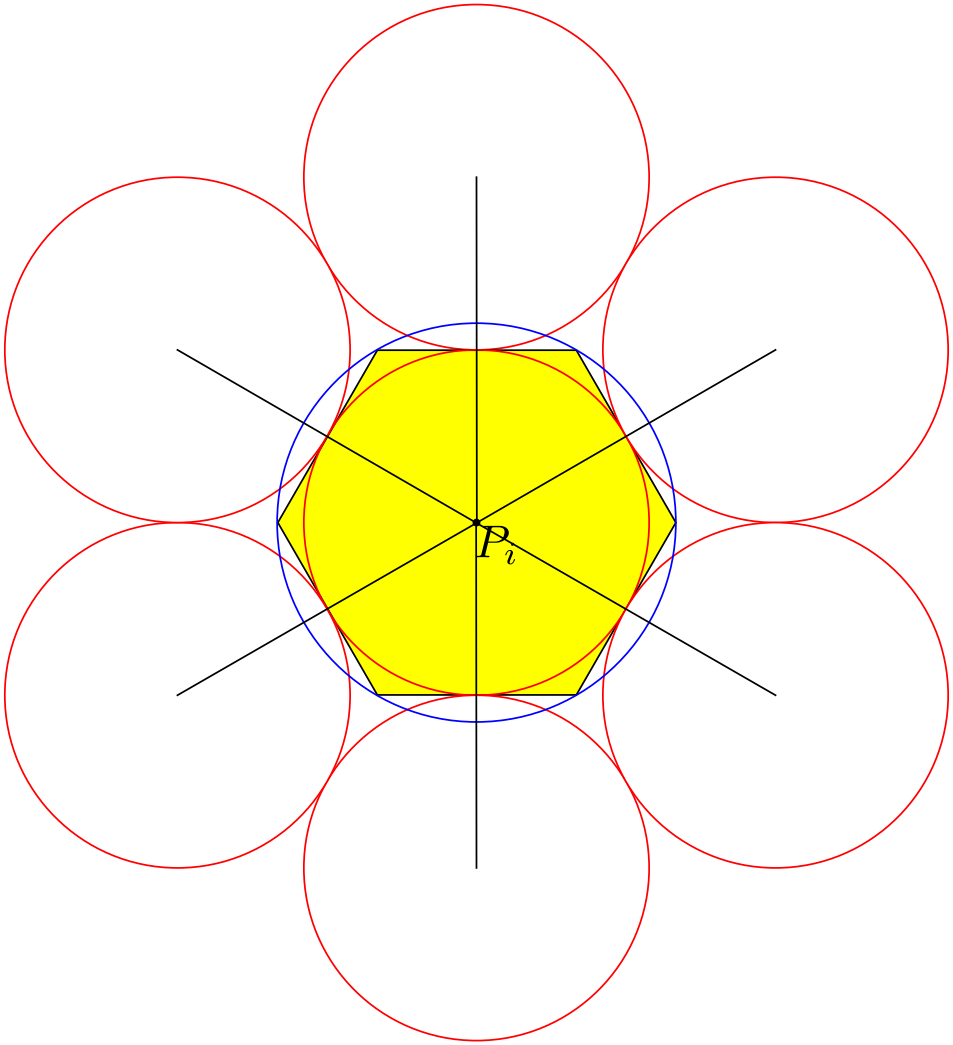
Pour $k = 7$, on montre que l'aire est bien plus grande que $2\sqrt{3}$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



Chaque disque enlève une "calotte" d'aire $\mathcal{A} \leq \frac{1}{6}(\pi(\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 2\sqrt{3})$.

Preuve (Fejes Tóth, 1940)



Il reste exactement $2\sqrt{3}$ pour 6 disques tangents, plus sinon.

Autres preuves

- Lagrange (1773) : cas régulier (centres sur un réseau)
- Thue (1910) : apparemment pas de preuve (papier ?)
- Fejes Tóth (1940) : lapidaire (2 pages, auf Deutsch)
- Segre & Mahler (1944) : plus détaillée (10 pages)
- Hsiang (1992) : pas très convaincante...
- Chang & Wang (2010) : élémentaire (4 pages)

Plan

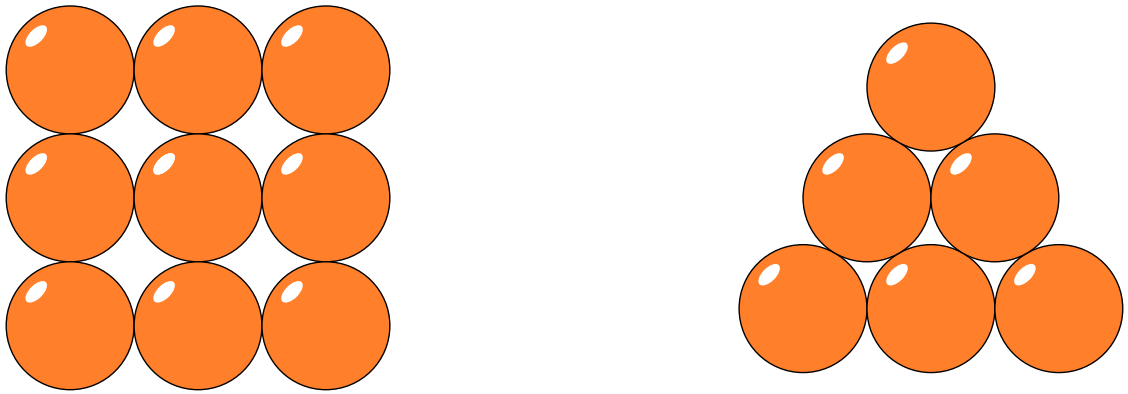
Thue a un problème

Empilements d'oranges

Variations

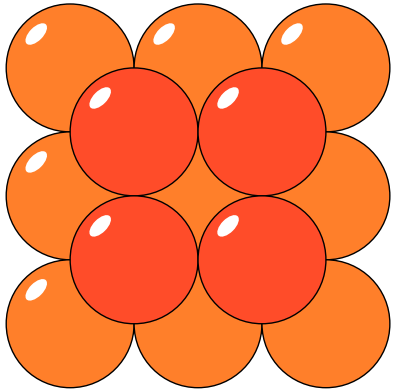
Comment maximiser la densité ?

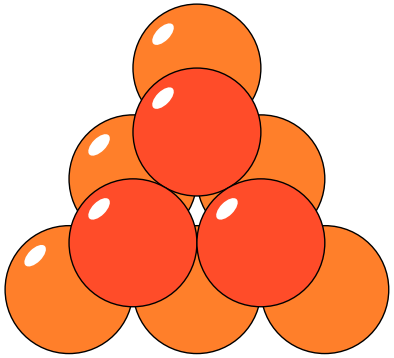
Comment maximiser la densité ?



Couches carrées *vs* couches triangulaires

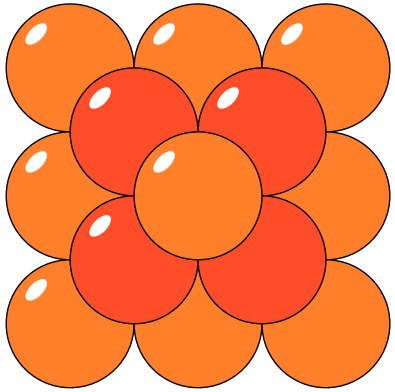
Comment maximiser la densité ?

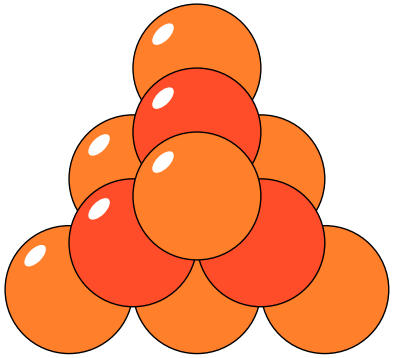




Couches carrées *vs* couches triangulaires

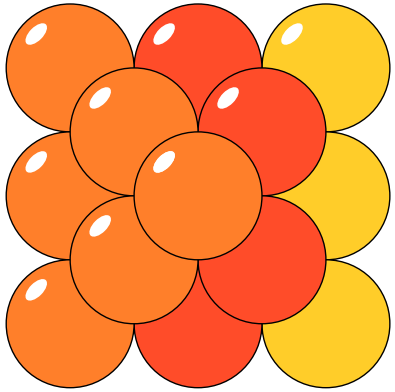
Comment maximiser la densité ?

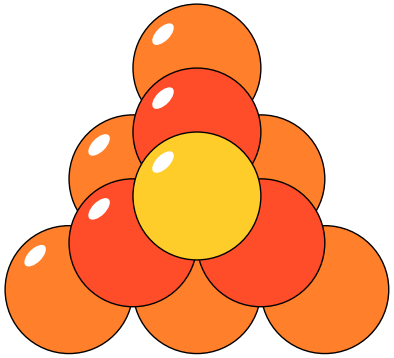




Couches carrées *vs* couches triangulaires

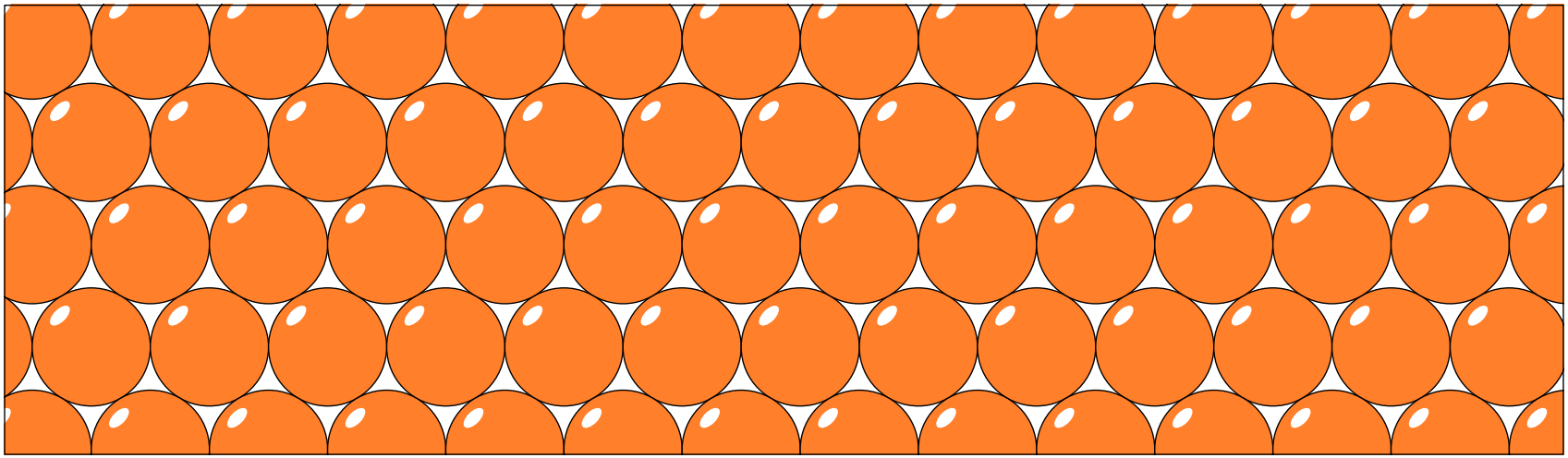
Comment maximiser la densité ?





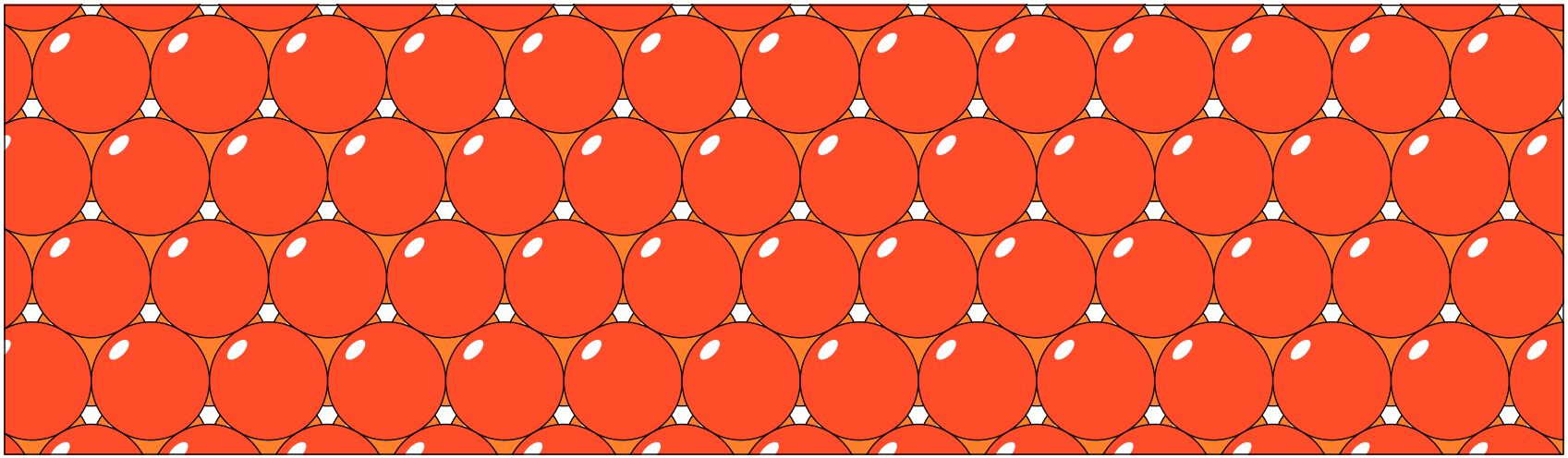
Couches carrées $\lhd$ couches triangulaires

Comment maximiser la densité ?



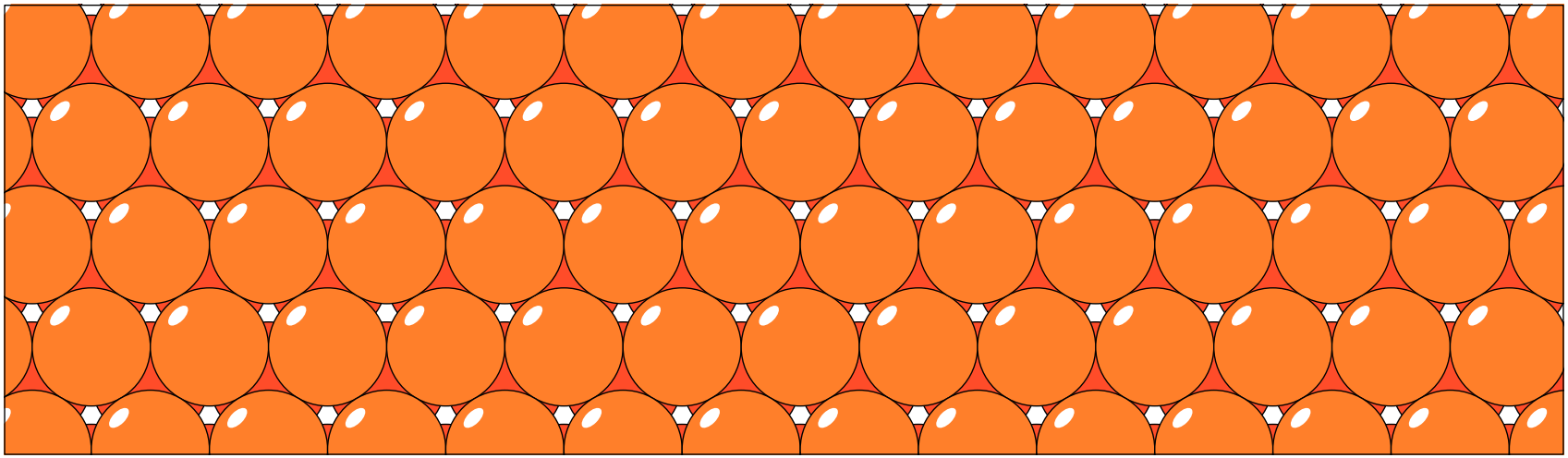
Infinité indénombrable d'empilements tous de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Comment maximiser la densité ?



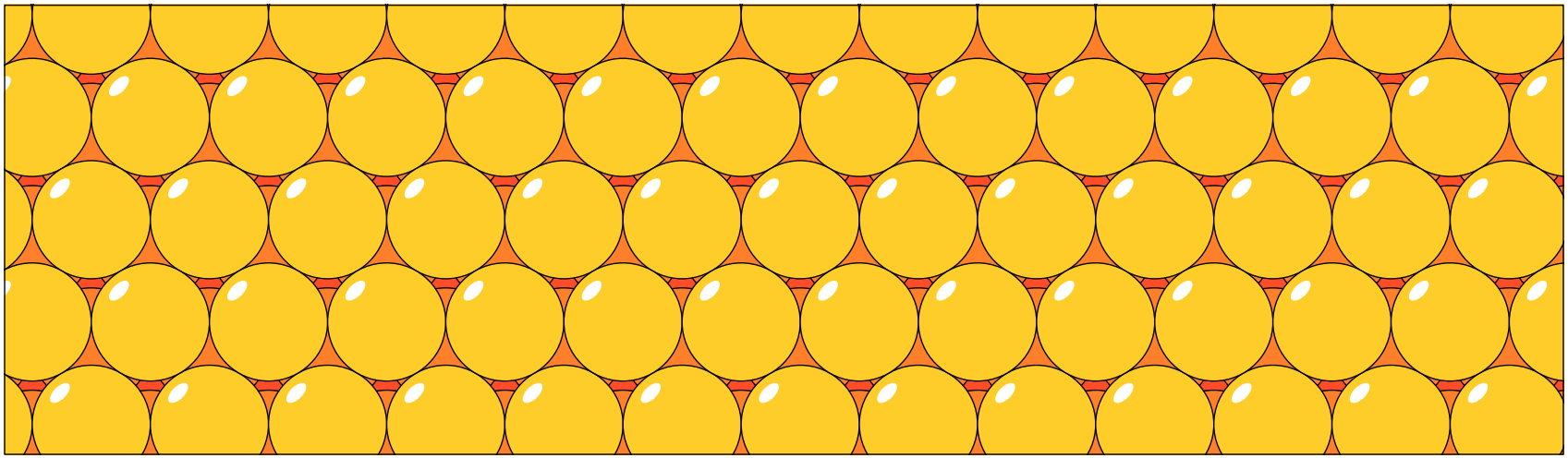
Infinité indénombrable d'empilements tous de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Comment maximiser la densité ?



Infinité indénombrable d'empilements tous de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Comment maximiser la densité ?



Infinité indénombrable d'empilements tous de densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

La conjecture de Kepler

Conjecture (Kepler, 1611)

La densité d'un empilement de sphères identiques est au plus $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

La conjecture de Kepler

Conjecture (Kepler, 1611)

La densité d'un empilement de sphères identiques est au plus $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

- Gauss (1831) : cas régulier (centres sont sur un réseau)

La conjecture de Kepler

Conjecture (Kepler, 1611)

La densité d'un empilement de sphères identiques est au plus $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

- Gauss (1831) : cas régulier (centres sont sur un réseau)
- Hales & Ferguson (1998–2006) : cas général

La conjecture de Kepler

Conjecture (Kepler, 1611)

La densité d'un empilement de sphères identiques est au plus $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

- Gauss (1831) : cas régulier (centres sont sur un réseau)
- Hales & Ferguson (1998–2006) : cas général
- Hales & al. (2014) : preuve formelle

Première approche

Idée : majorer la densité par $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ dans chaque cellule de Voronoï.

Cela revient à minorer le volume d'une cellule de Voronoï par $4\sqrt{2}$.

Première approche

Idée : majorer la densité par $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ dans chaque cellule de Voronoï.

Cela revient à minorer le volume d'une cellule de Voronoï par $4\sqrt{2}$.

Conjecture du dodécaèdre (Fejes Tóth, 1943)

La plus petite cellule de Voronoï est un dodécaèdre régulier.

Première approche

Idée : majorer la densité par $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ dans chaque cellule de Voronoï.

Cela revient à minorer le volume d'une cellule de Voronoï par $4\sqrt{2}$.

Conjecture du dodécaèdre (Fejes Tóth, 1943)

La plus petite cellule de Voronoï est un dodécaèdre régulier.

Démontré par Fejes Tóth quand la cellule a au plus 12 faces.

Première approche

Idée : majorer la densité par $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ dans chaque cellule de Voronoï.

Cela revient à minorer le volume d'une cellule de Voronoï par $4\sqrt{2}$.

Conjecture du dodécaèdre (Fejes Tóth, 1943)

La plus petite cellule de Voronoï est un dodécaèdre régulier.

Démontré par Fejes Tóth quand la cellule a au plus 12 faces.

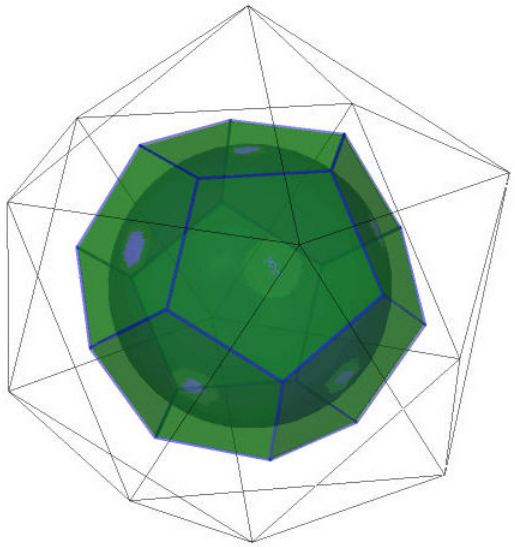
Démontré par Hales & McLaughlin dans le cas général :

- 1998 : v1 (arXiv, 89 p.)
- 2002 : v2 (arXiv, 54 p., renvoie à sphere packings I & II)
- 2008 : v3 (arXiv, 49p, renvoie à v1 & v2)
- 2010 : v4 (J. American Mathematical Society, 45 p.)

Frustration

Volume d'un dodécaèdre régulier circonscrit à une sphère unité :

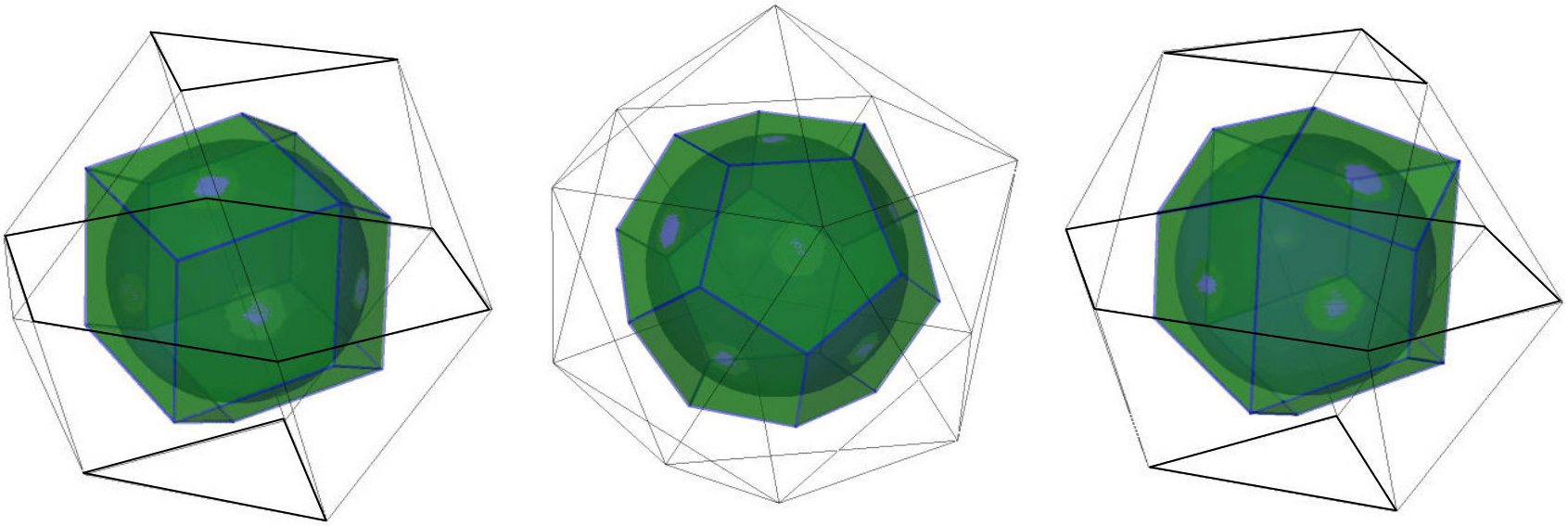
$$10\sqrt{130 - 58\sqrt{5}} \approx 5.55 < 4\sqrt{2} \approx 5.66$$



Frustration

Volume d'un dodécaèdre régulier circonscrit à une sphère unité :

$$10\sqrt{130 - 58\sqrt{5}} \approx 5.55 < 4\sqrt{2} \approx 5.66$$

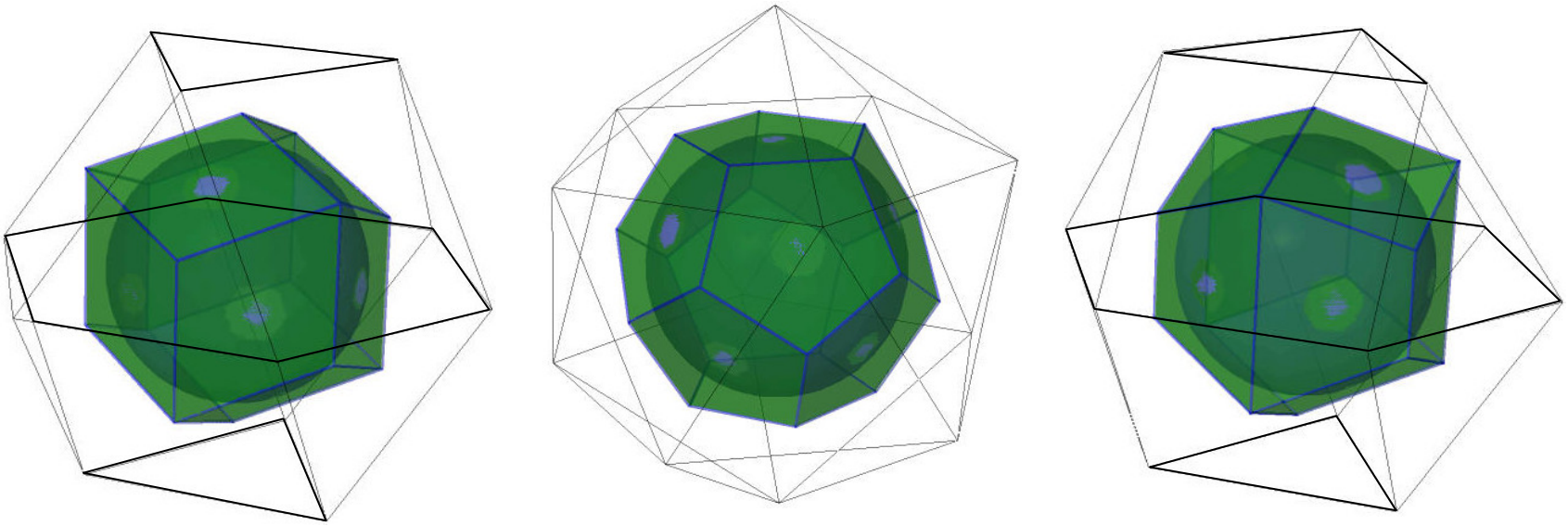


Dans un empilement compact : dodécaèdres (trapézo-)rhombiques.

Frustration

Volume d'un dodécaèdre régulier circonscrit à une sphère unité :

$$10\sqrt{130 - 58\sqrt{5}} \approx 5.55 < 4\sqrt{2} \approx 5.66$$



Dans un empilement compact : dodécaèdres (trapézo-)rhombiques.
Le dodécaèdre régulier ne pave pas $\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow$ optimum local $\neq$ global.

Deuxième approche

Idée : définir des règles pour répartir les densités entre cellules de Voronoï voisines de sorte à minorer localement par la densité cible.

Deuxième approche

Idée : définir des règles pour répartir les densités entre cellules de Voronoï voisines de sorte à minorer localement par la densité cible.

Pas évident que ce soit possible !

Deuxième approche

Idée : définir des règles pour répartir les densités entre cellules de Voronoï voisines de sorte à minorer localement par la densité cible.

Pas évident que ce soit possible !

Preuve de Hales & Ferguson :

- 1992-1993 : 2 articles (premières tentatives)
- 1997 : Sphere packings I & II (Discr. Comput. Geom., 78 p.)
- 1998 : Sphere packings III–VI + 2 (arXiv, 230 pages)
- 1998-2004 : relecture (équipe de 12 chercheurs) et corrections
- 2005 : version abrégée (Ann. Maths, 21 p., *new statement*)
- 2006 : version complète (Discr. Comput. Geom., 260 p.)
- 2014 : preuve formelle (*Flyspeck*, HOL Light & Isabelle)

Plan

Thue a un problème

Empilements d'oranges

Variations

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$ (Vyazovska *et al*, semaine suivante)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$ (Vyazovska *et al*, semaine suivante)
- cas régulier pour $n = 4, 5, 6, 7$ (Korkine & Zolotareff, 1870's)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$ (Vyazovska *et al*, semaine suivante)
- cas régulier pour $n = 4, 5, 6, 7$ (Korkine & Zolotareff, 1870's)
- $\delta_n \geq 2^{-n}$, facile mais non constructif (la saturation suffit)
- $\delta_n \geq 2n \cdot 2^{-n}$ avec un réseau explicite (Ball, 1992)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$ (Vyazovska *et al*, semaine suivante)
- cas régulier pour $n = 4, 5, 6, 7$ (Korkine & Zolotareff, 1870's)
- $\delta_n \geq 2^{-n}$, facile mais non constructif (la saturation suffit)
- $\delta_n \geq 2n \cdot 2^{-n}$ avec un réseau explicite (Ball, 1992)
- $\delta_n \leq 2^{-0.599n}$ (Kabatiansky & Levenshtein, 1978)

Hyperoranges

Densité maximale δ_n des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^n$?

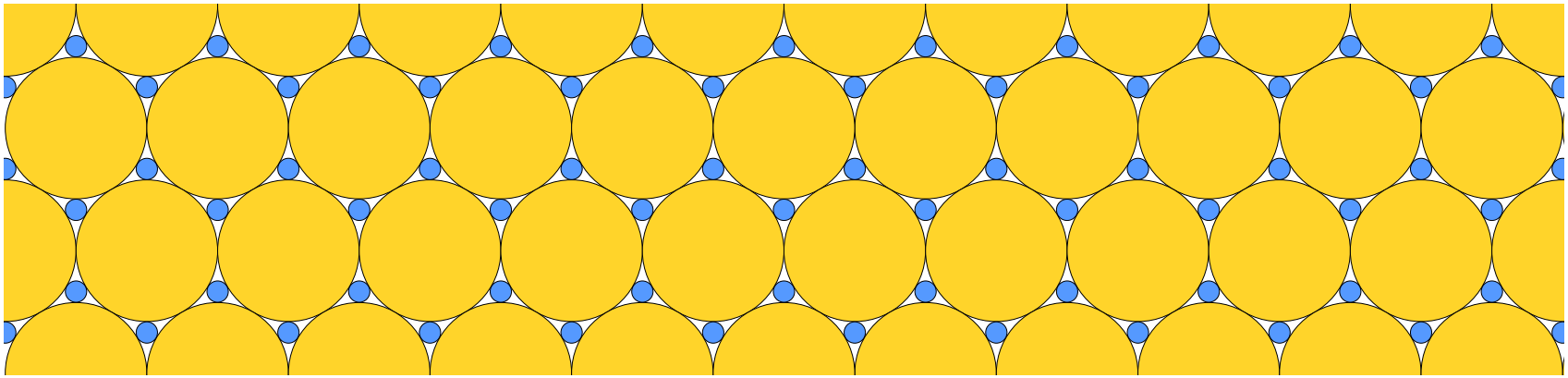
- $\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.91$ (Fejes Toth, 1943)
- $\delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74$ (Hales & Ferguson, 1998)
- $\delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25$ (Vyazovska, 2016)
- $\delta_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$ (Vyazovska *et al*, semaine suivante)
- cas régulier pour $n = 4, 5, 6, 7$ (Korkine & Zolotareff, 1870's)
- $\delta_n \geq 2^{-n}$, facile mais non constructif (la saturation suffit)
- $\delta_n \geq 2n \cdot 2^{-n}$ avec un réseau explicite (Ball, 1992)
- $\delta_n \leq 2^{-0.599n}$ (Kabatiansky & Levenshtein, 1978)

Une application concrète du cas régulier : codes correcteurs.

$\rightsquigarrow$ Conway & Sloane, *Sphere Packings, lattices and groups*.

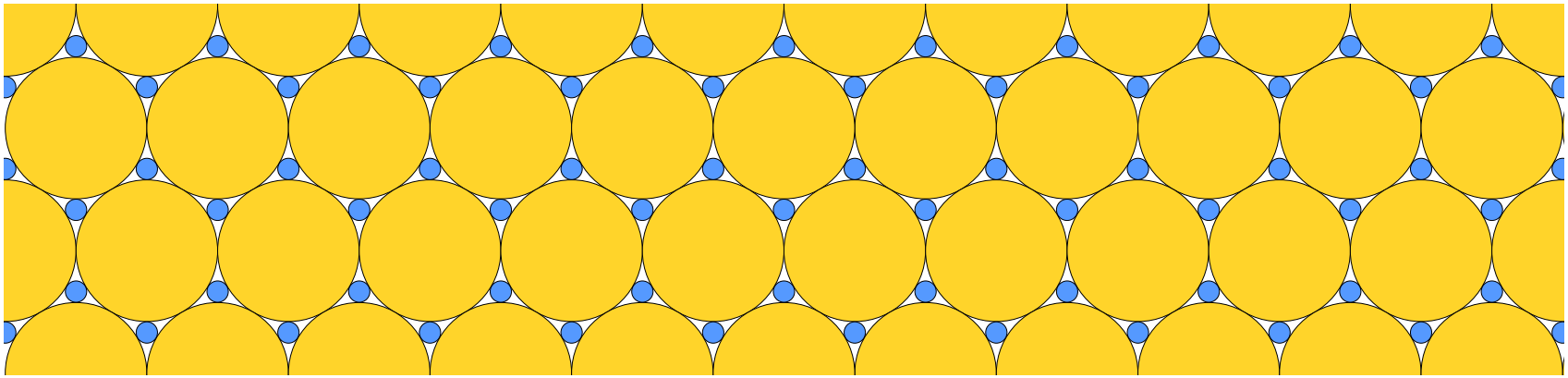
Deux disques

On a toujours besoin d'un plus petit que soi :



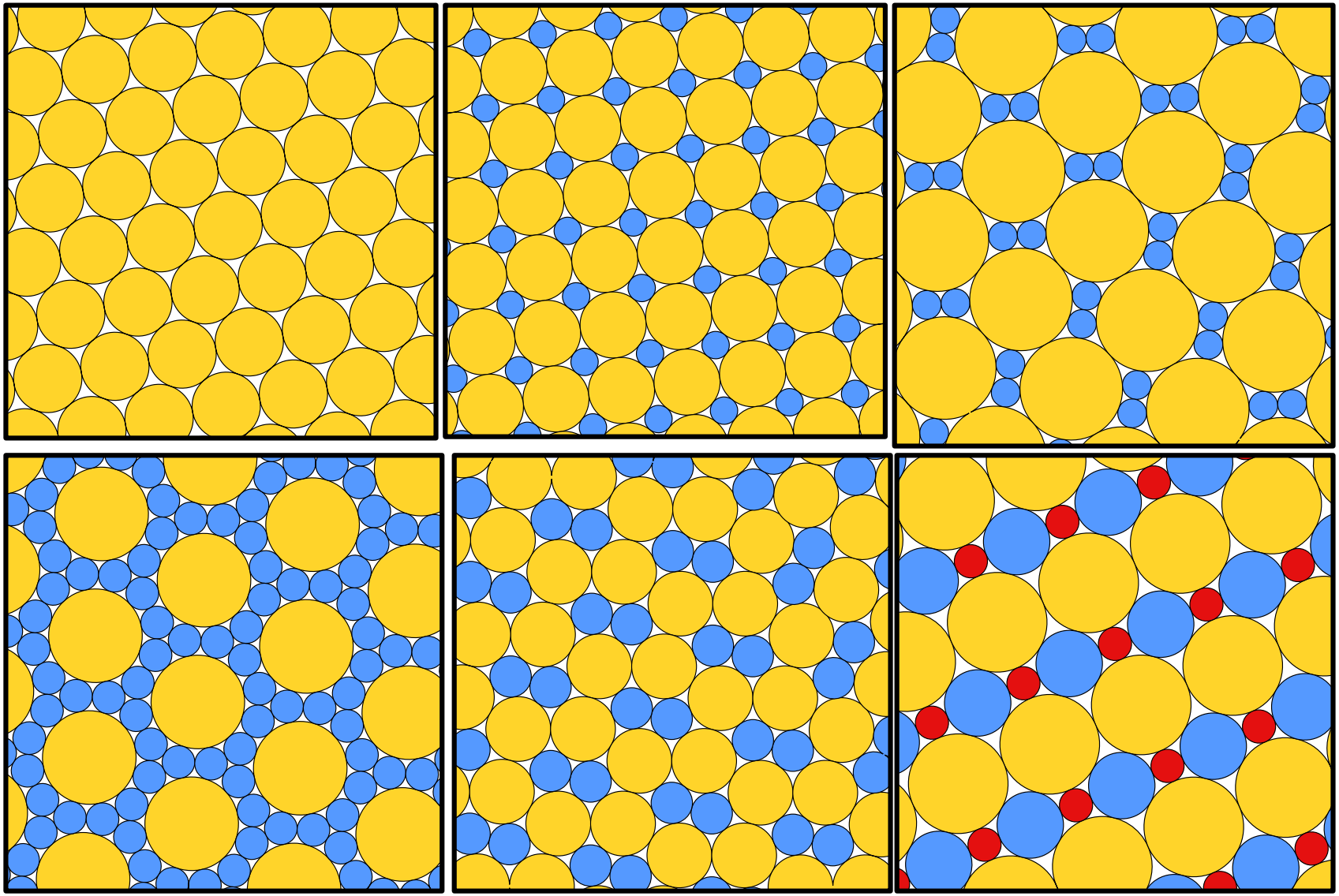
Deux disques

On a toujours besoin d'un plus petit que soi :

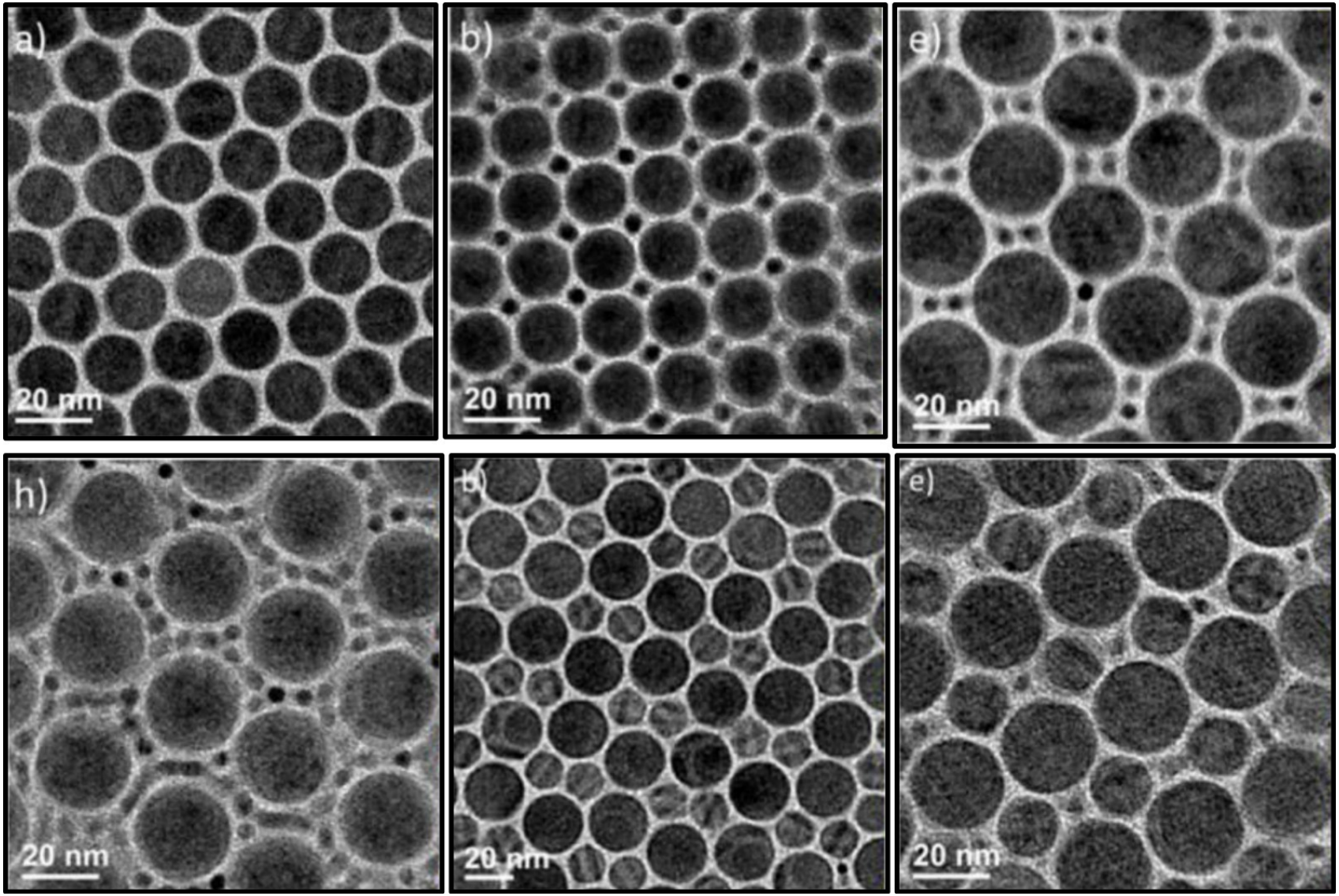


Pour quels ratios r des tailles des disques ?

Quelques exemples

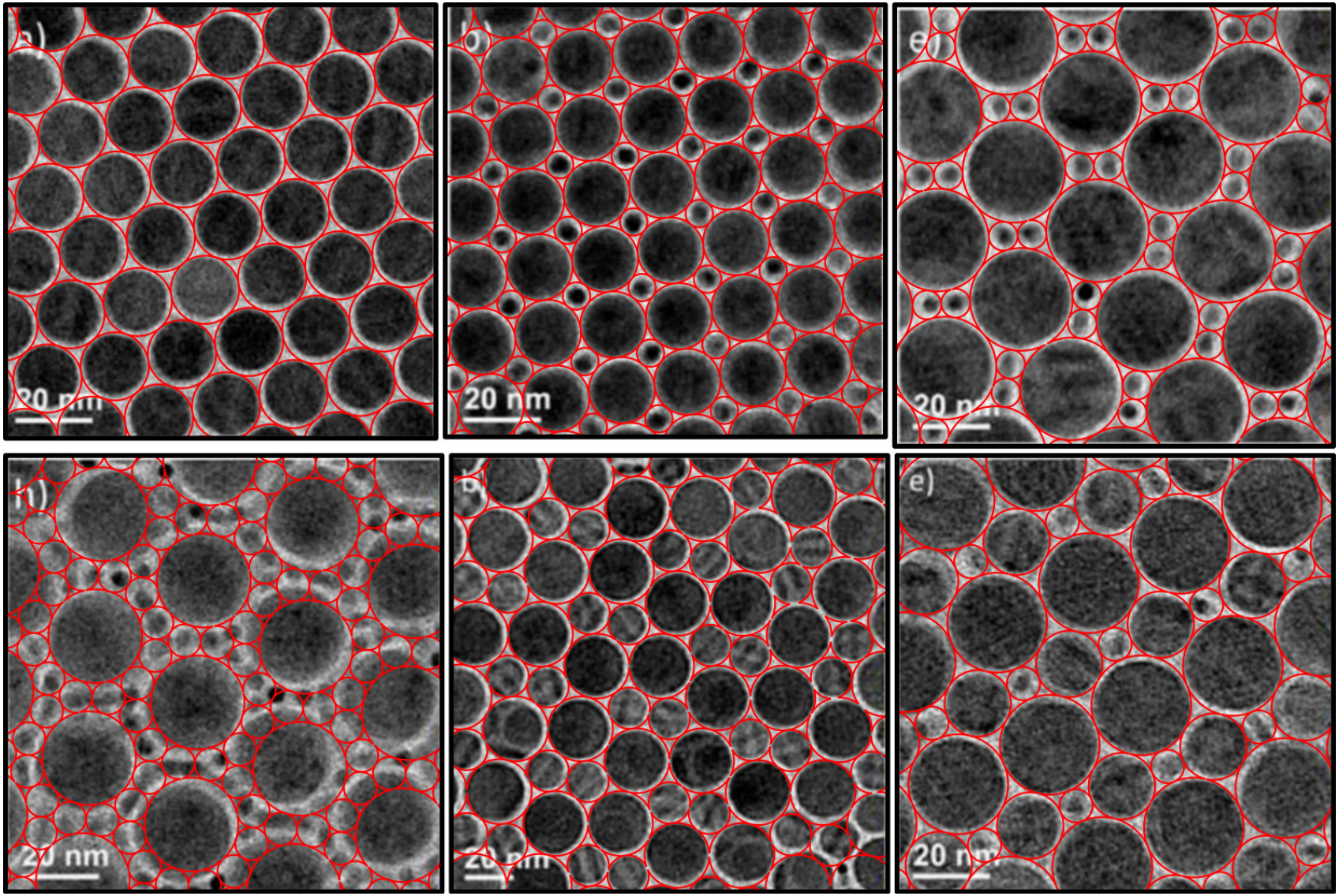


Quelques exemples



T. Paik, B. Diroll, C. Kagan, Ch. Murray J. Am. Chem. Soc. **137**, 2015.
Binary and ternary superlattices self-assembled from colloidal nanodisks and nanorods.

Quelques exemples



T. Paik, B. Diroll, C. Kagan, Ch. Murray J. Am. Chem. Soc. **137**, 2015.
Binary and ternary superlattices self-assembled from colloidal nanodisks and nanorods.

Séparation de phase

Deux disques font aussi bien qu'un seul : chacun son demi-plan.

Séparation de phase

Deux disques font aussi bien qu'un seul : chacun son demi-plan.

Theorem (Blind, 1969)

Deux disques ne font pas mieux qu'un seul pour

$$r \geq \sqrt{\frac{7\tan\frac{\pi}{7} - 6\tan\frac{\pi}{6}}{6\tan\frac{\pi}{6} - 5\tan\frac{\pi}{5}}} \approx 0.74$$

Séparation de phase

Deux disques font aussi bien qu'un seul : chacun son demi-plan.

Theorem (Blind, 1969)

Deux disques ne font pas mieux qu'un seul pour

$$r \geq \sqrt{\frac{7\tan\frac{\pi}{7} - 6\tan\frac{\pi}{6}}{6\tan\frac{\pi}{6} - 5\tan\frac{\pi}{5}}} \approx 0.74$$

Theorem (Fejes Tóth, 1964)

Deux disques font mieux qu'un seul pour $r = 0.6457072159\cdots$

Séparation de phase

Deux disques font aussi bien qu'un seul : chacun son demi-plan.

Theorem (Blind, 1969)

Deux disques ne font pas mieux qu'un seul pour

$$r \geq \sqrt{\frac{7\tan\frac{\pi}{7} - 6\tan\frac{\pi}{6}}{6\tan\frac{\pi}{6} - 5\tan\frac{\pi}{5}}} \approx 0.74$$

Theorem (Fejes Tóth, 1964)

Deux disques font mieux qu'un seul pour $r = 0.6457072159\cdots$

Theorem (F.)

Deux disques ne font pas mieux qu'un seul pour $r \geq 0.647$.

Densité paramétrée

Plus généralement : quelle densité maximale pour deux disques ?

Densité paramétrée

Plus généralement : quelle densité maximale pour deux disques ?

Theorem (Florian, 1960)

La densité dans *majore celle d'un empilement de* *et* .

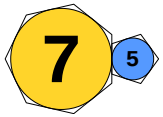
Densité paramétrée

Plus généralement : quelle densité maximale pour deux disques ?

Theorem (Florian, 1960)

La densité dans *majore celle d'un empilement de* *et* .

Theorem (Blind, 1969)

La densité dans 

majore celle d'un empilement de *et* .

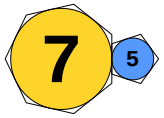
Densité paramétrée

Plus généralement : quelle densité maximale pour deux disques ?

Theorem (Florian, 1960)

La densité dans *majore celle d'un empilement de* *et* .

Theorem (Blind, 1969)

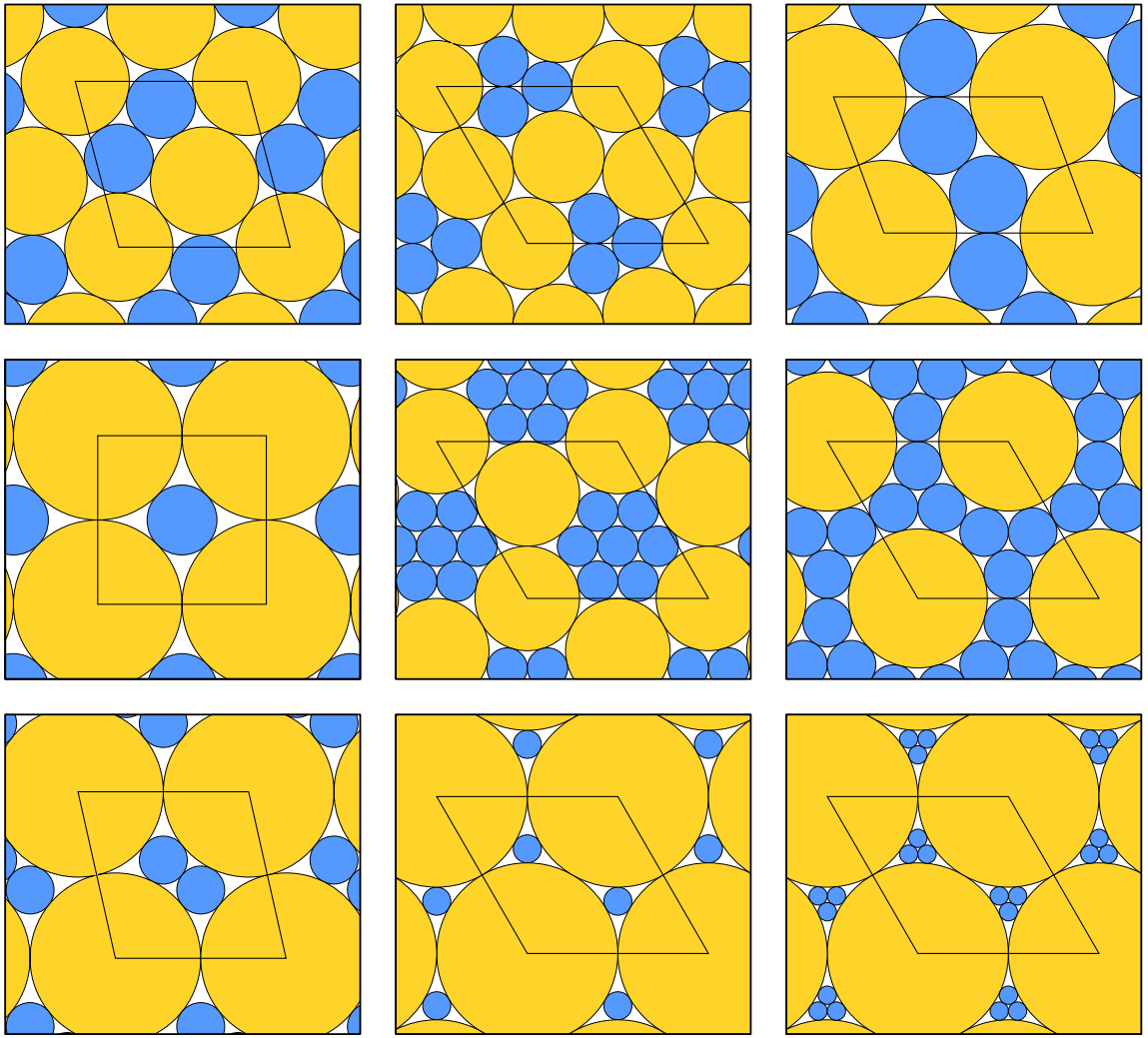
La densité dans 

majore celle d'un empilement de *et* .

Theorem (Heppes 2000/'03, Kennedy '04, Bédaride & F. '20)

La densité maximale exacte est connue pour 9 *ratios de rayons.*

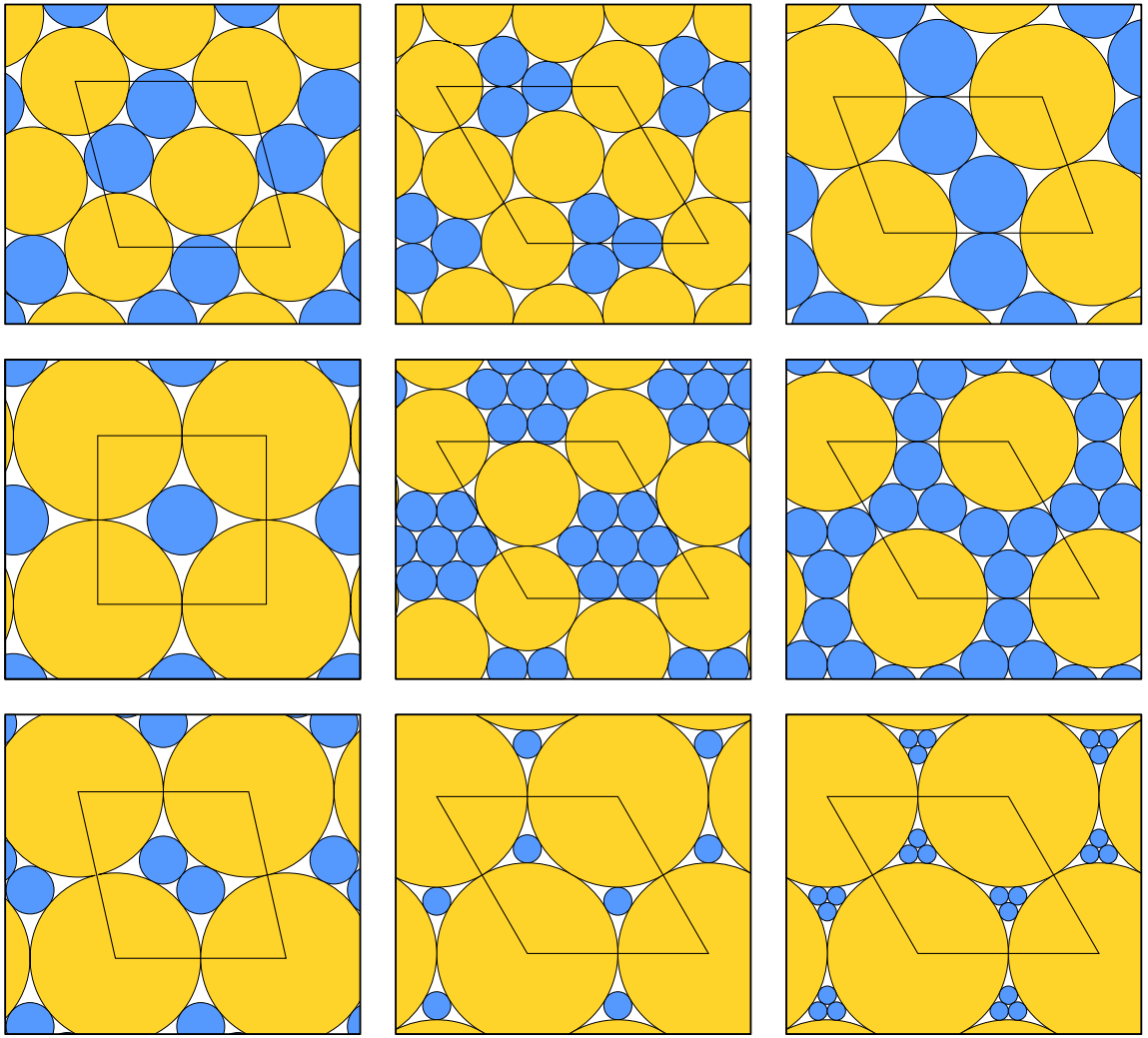
Les 9 ratios "magiques"



ratio r	densité δ
0.6376	0.9106
0.5452	0.9116
0.5333	0.9141
0.4142	0.9201
0.3861	0.9200
0.3492	0.9246
0.2808	0.9319
0.1547	0.9503
0.1010	0.9624

(r et $\frac{\delta}{\pi}$ algébriques)

Les 9 ratios "magiques"

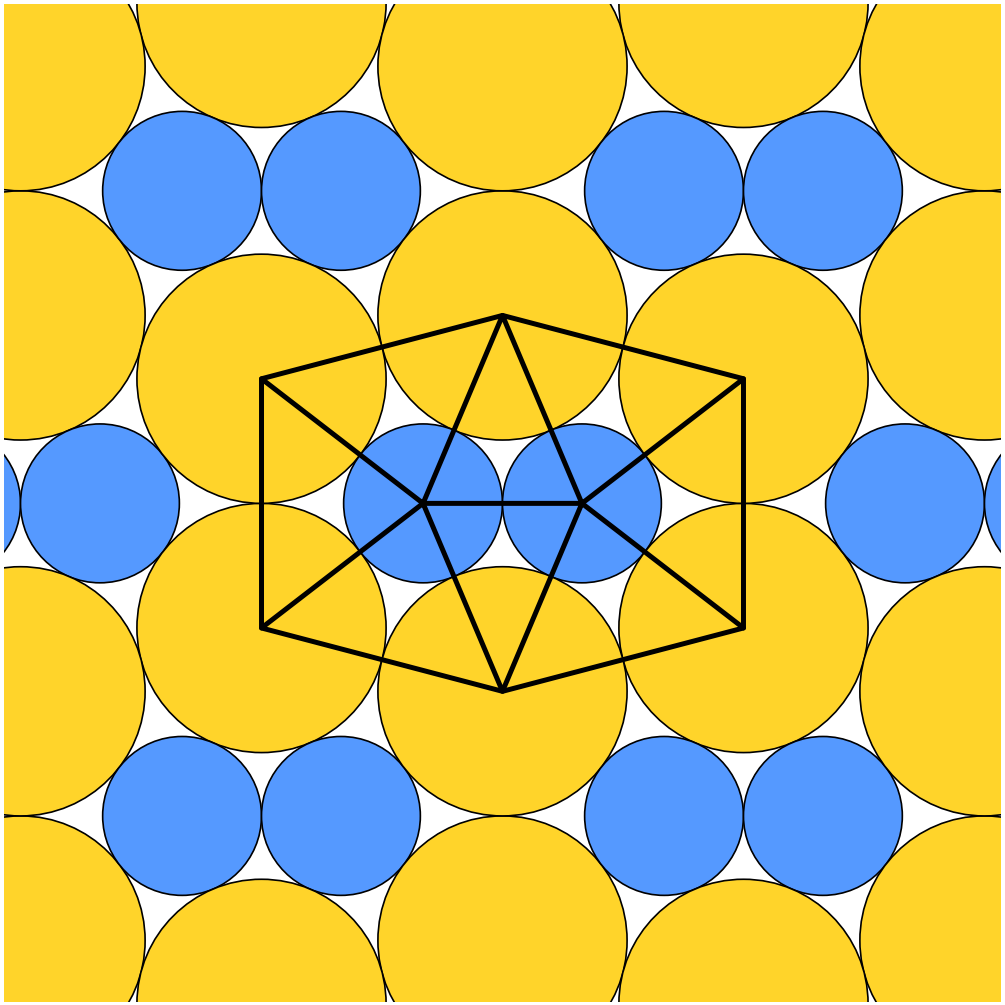


ratio r	densité δ
0.6376	0.9106
0.5452	0.9116
0.5333	0.9141
0.4142	0.9201
0.3861	0.9200
0.3492	0.9246
0.2808	0.9319
0.1547	0.9503
0.1010	0.9624

(r et $\frac{\delta}{\pi}$ algébriques)

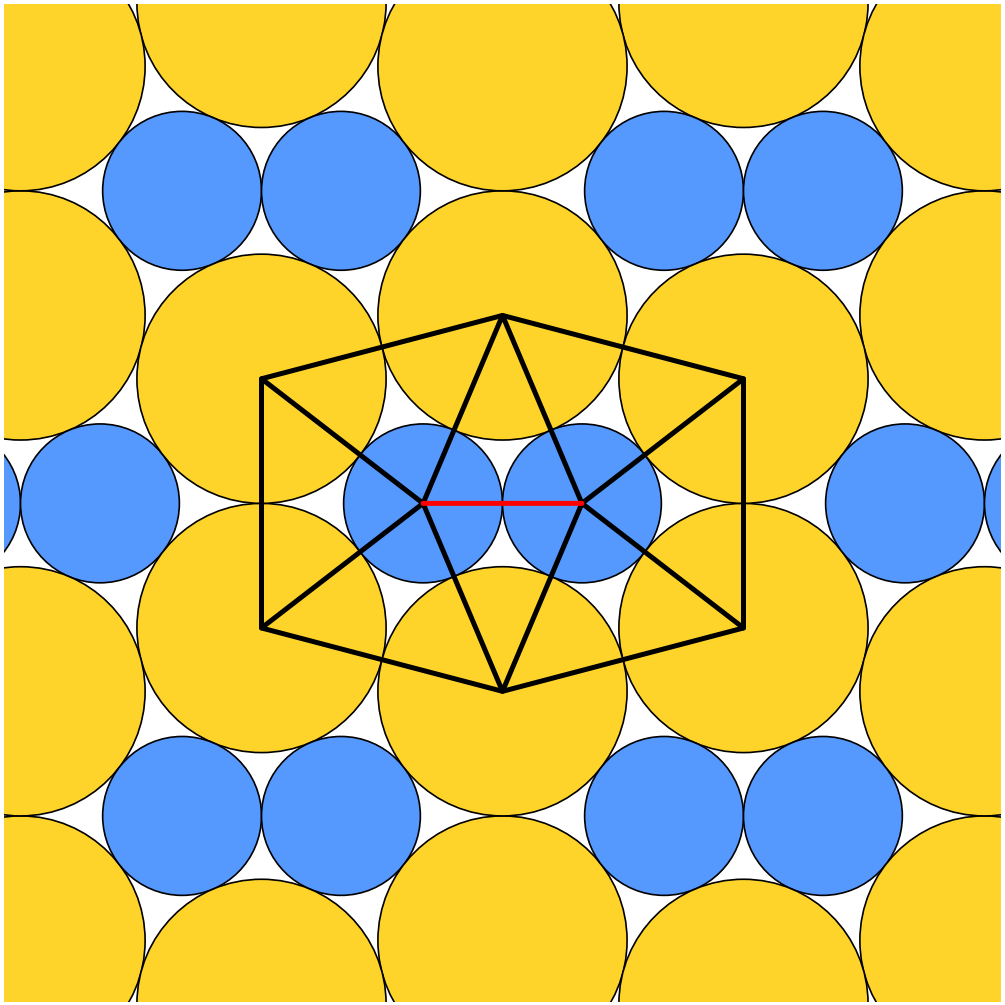
Ce sont exactement les ratios permettant un empilement triangulé.

Quand la magie n'opère pas



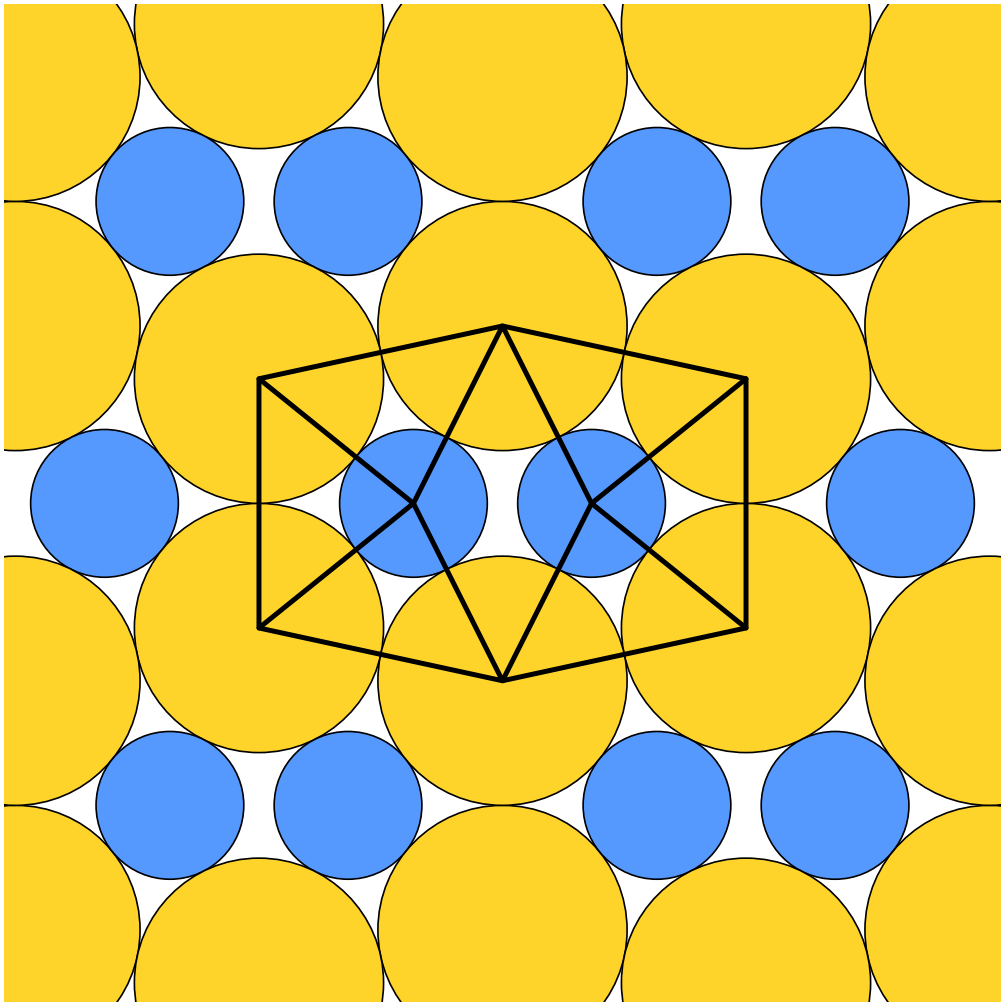
Credo : plus il y a de disques en contact, plus la densité est forte.

Quand la magie n'opère pas



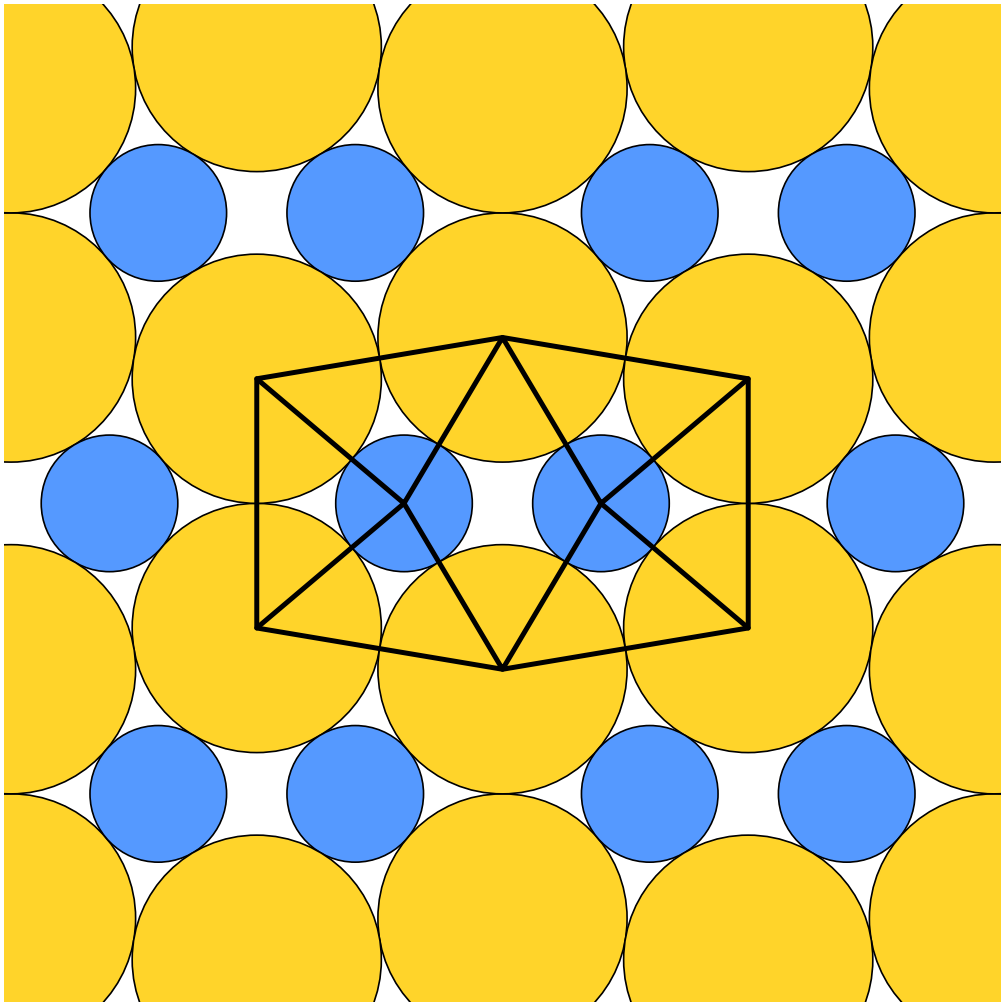
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



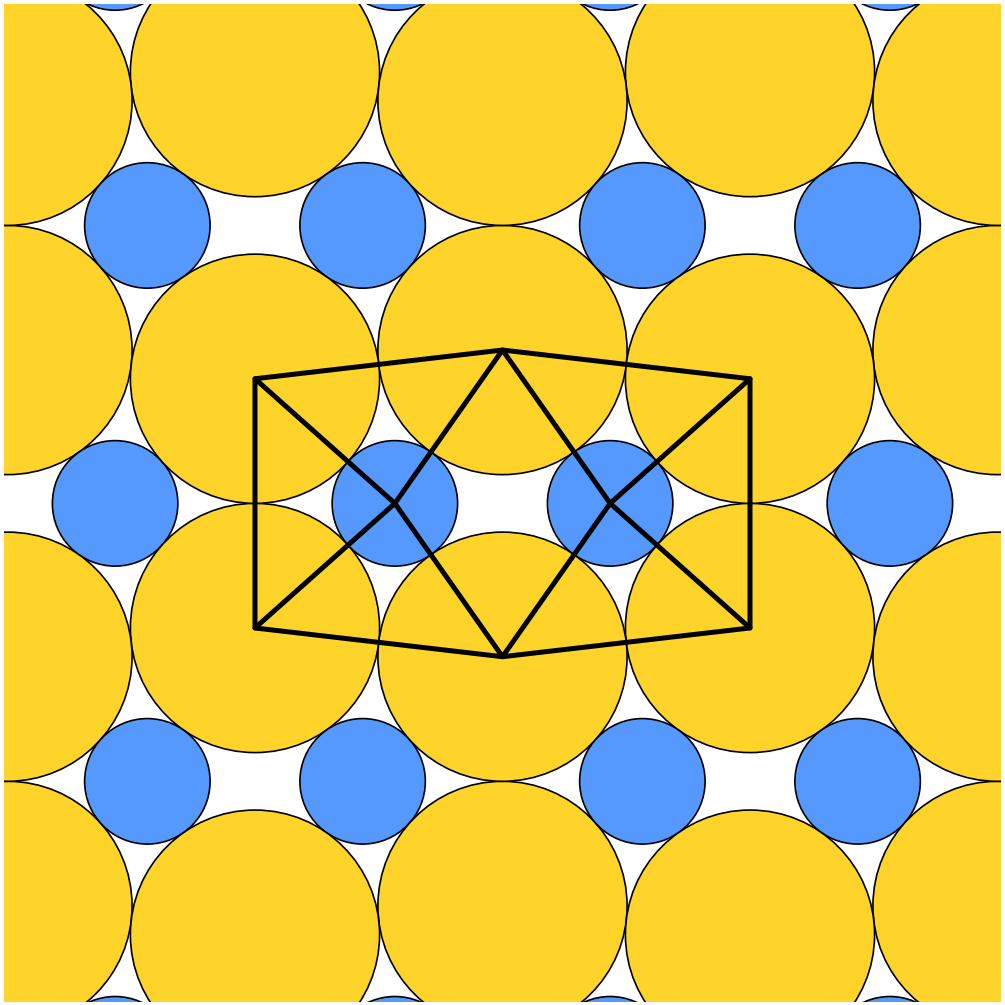
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



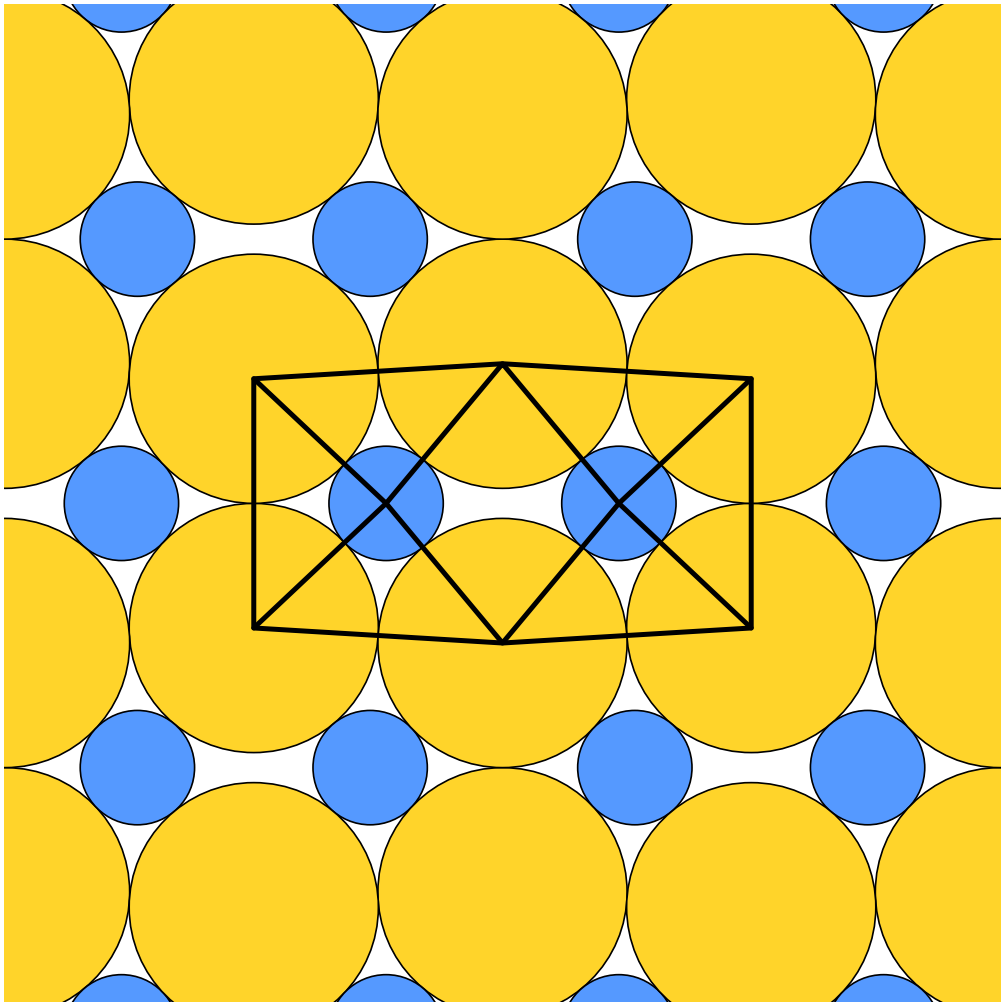
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



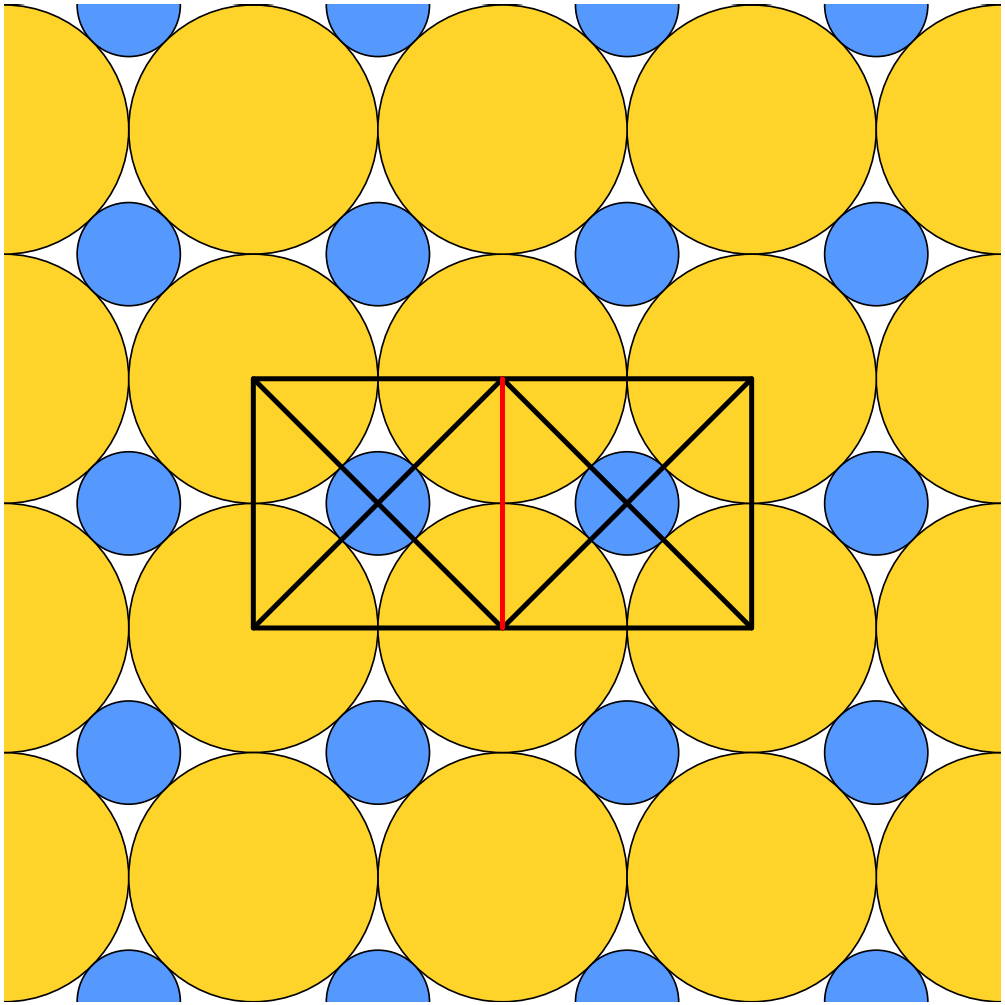
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



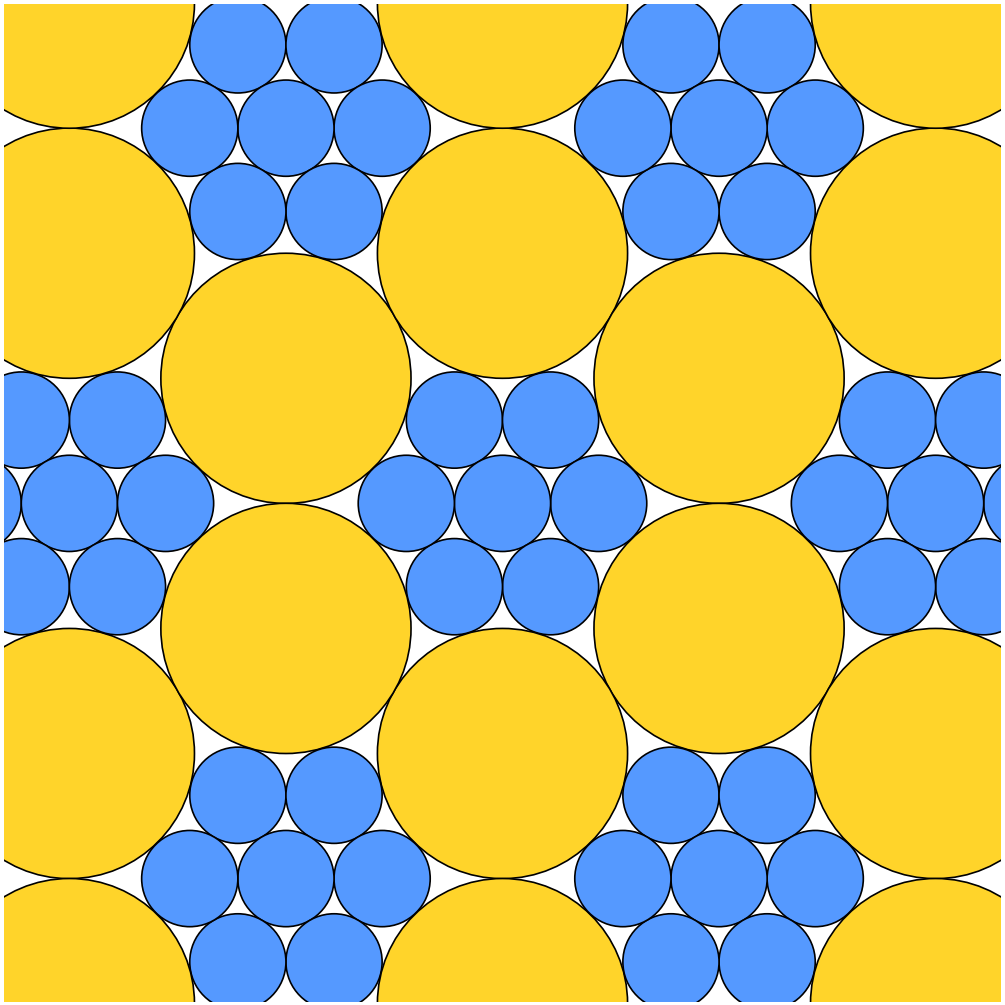
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



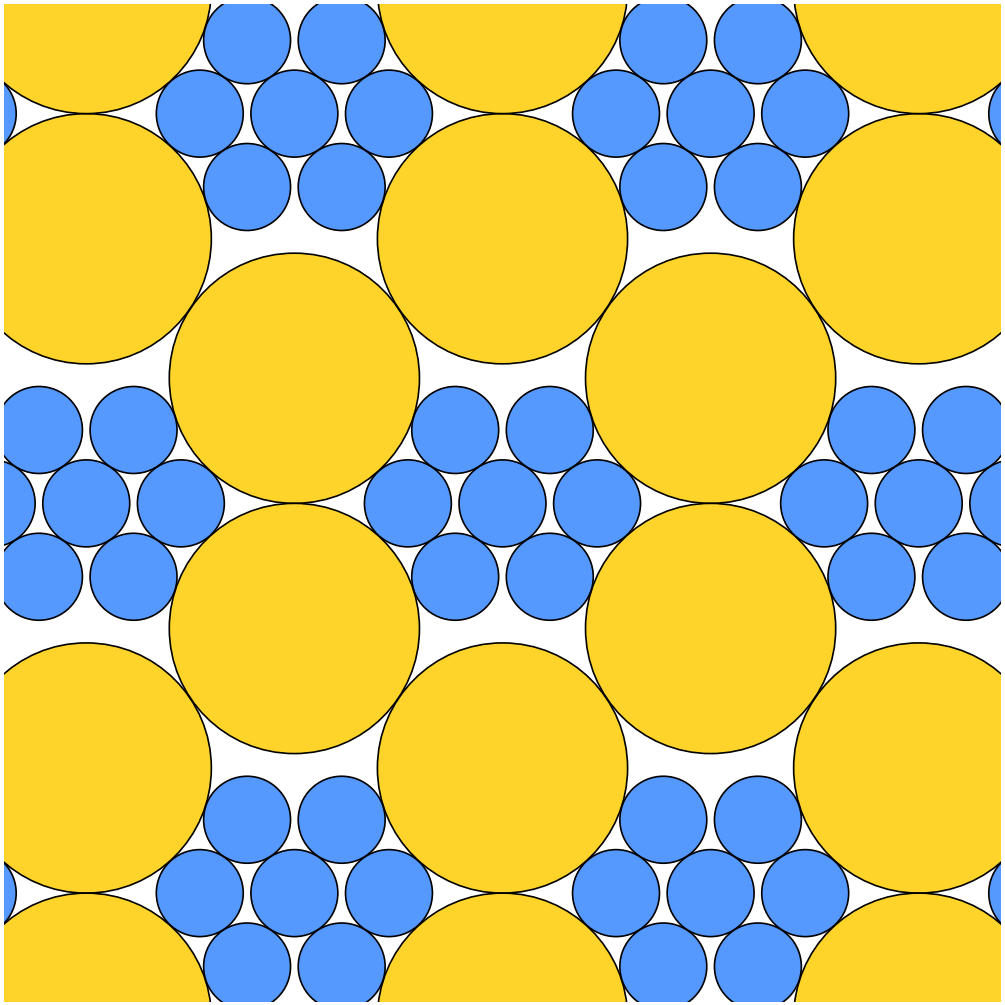
Relâcher certains contacts permet de modifier r.

Quand la magie n'opère pas



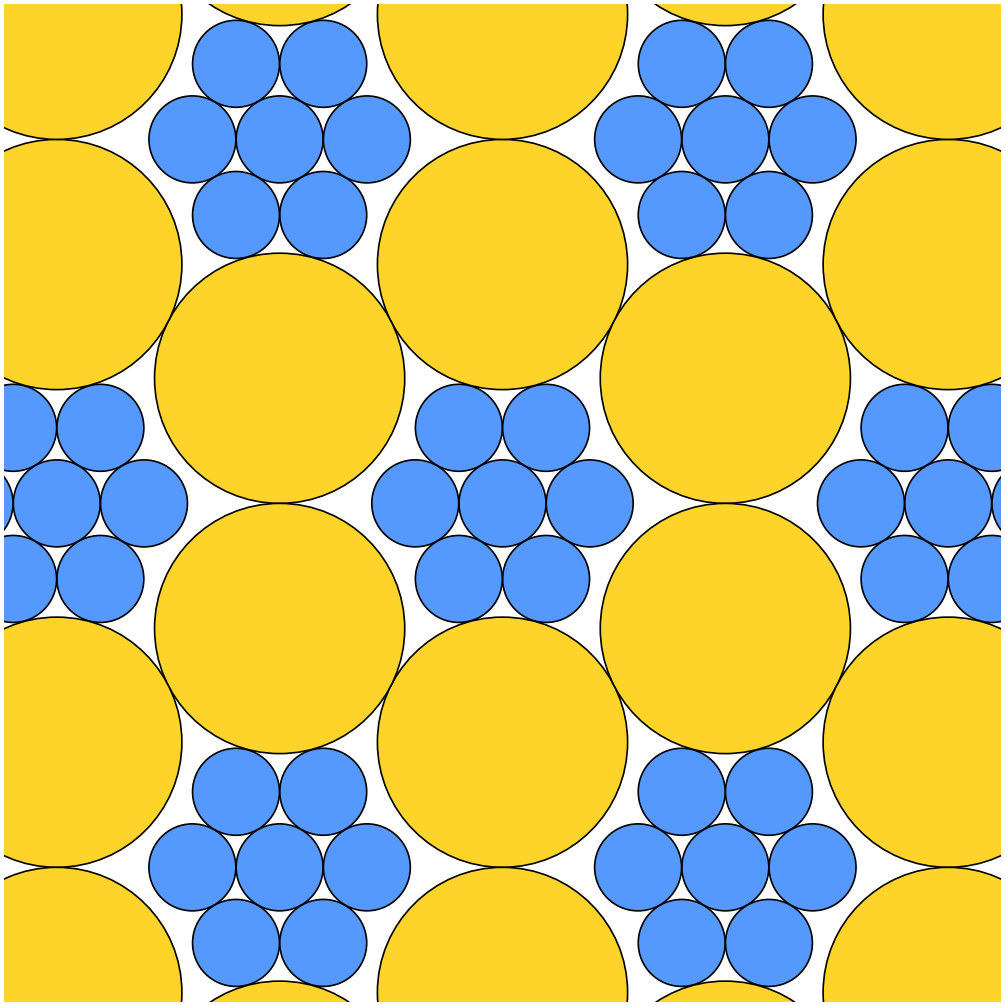
Quels contacts relâcher pour limiter la perte de densité ?

Quand la magie n'opère pas



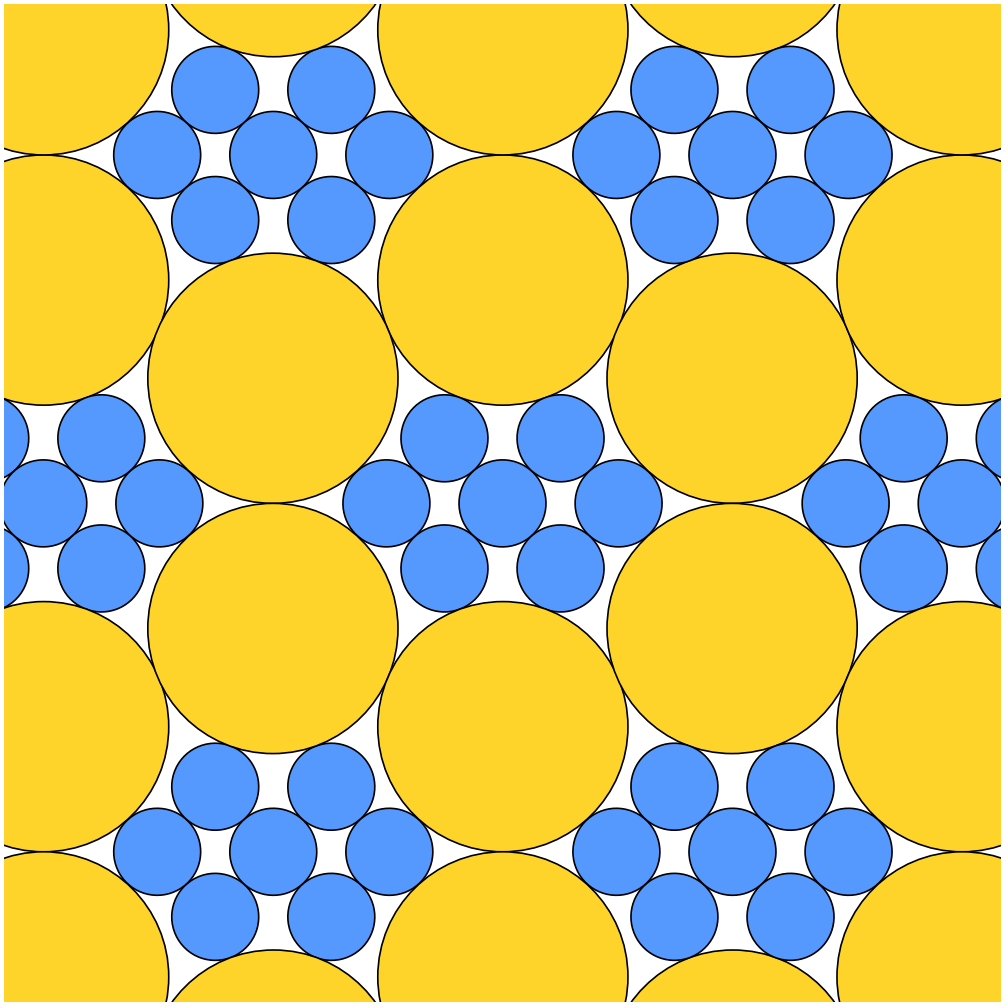
Quels contacts relâcher pour limiter la perte de densité ?

Quand la magie n'opère pas



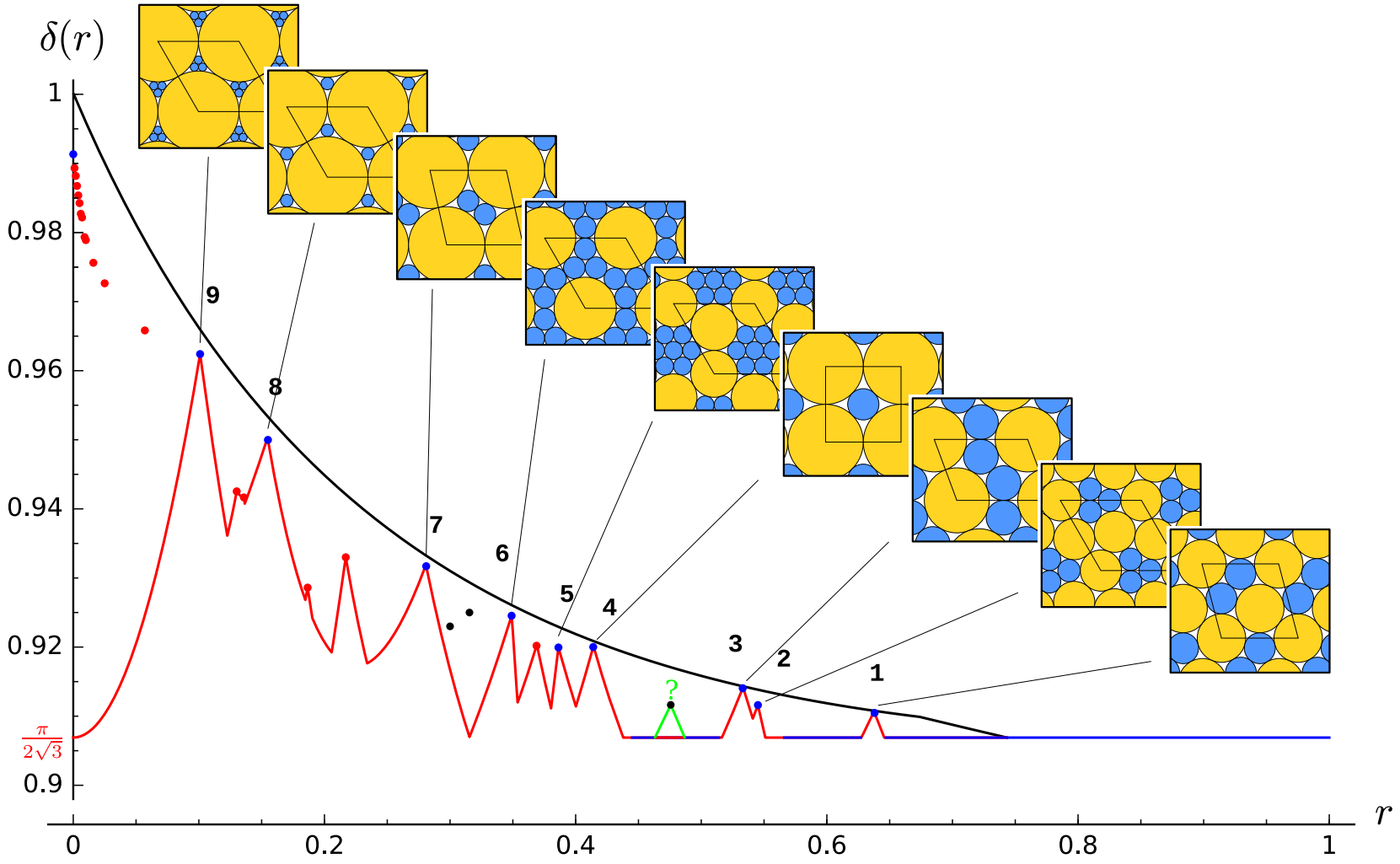
Quels contacts relâcher pour limiter la perte de densité ?

Quand la magie n'opère pas



Quels contacts relâcher pour limiter la perte de densité ?

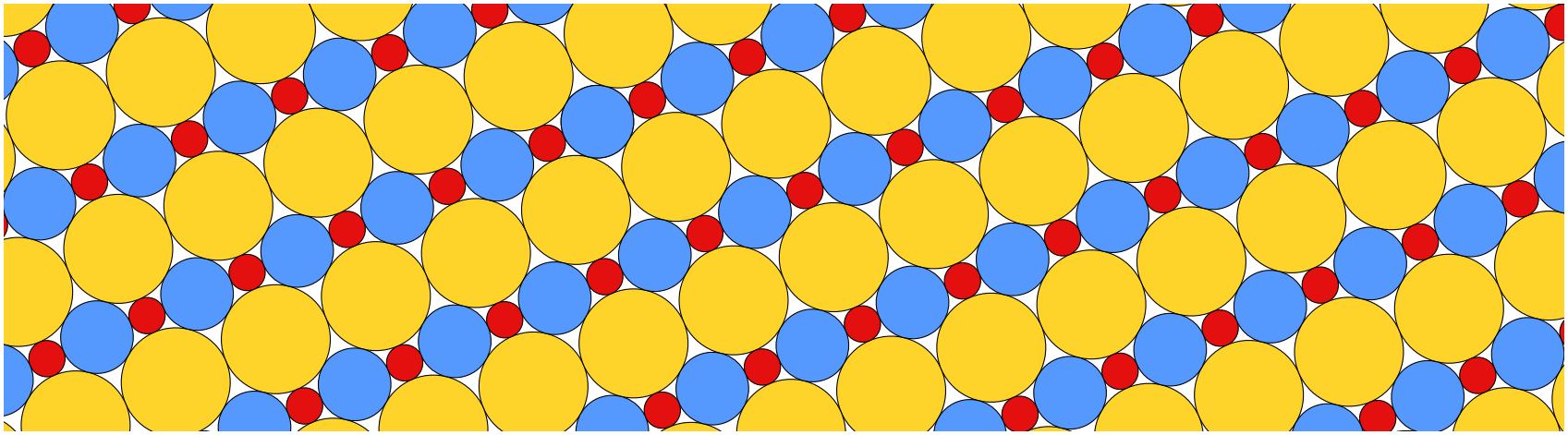
Deux disques (bilan)



Trois disques...

Theorem (F. & Hashemi & Sizova 2019)

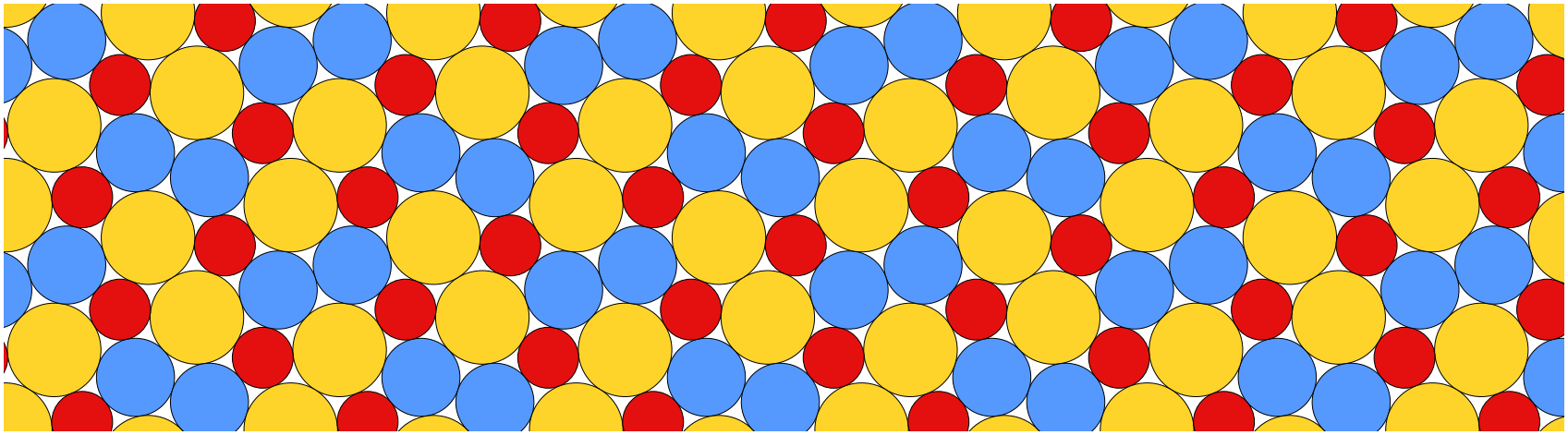
Il y a 164 *triplets de rayons permettant un empilement triangulé.*



Trois disques...

Theorem (F. & Hashemi & Sizova 2019)

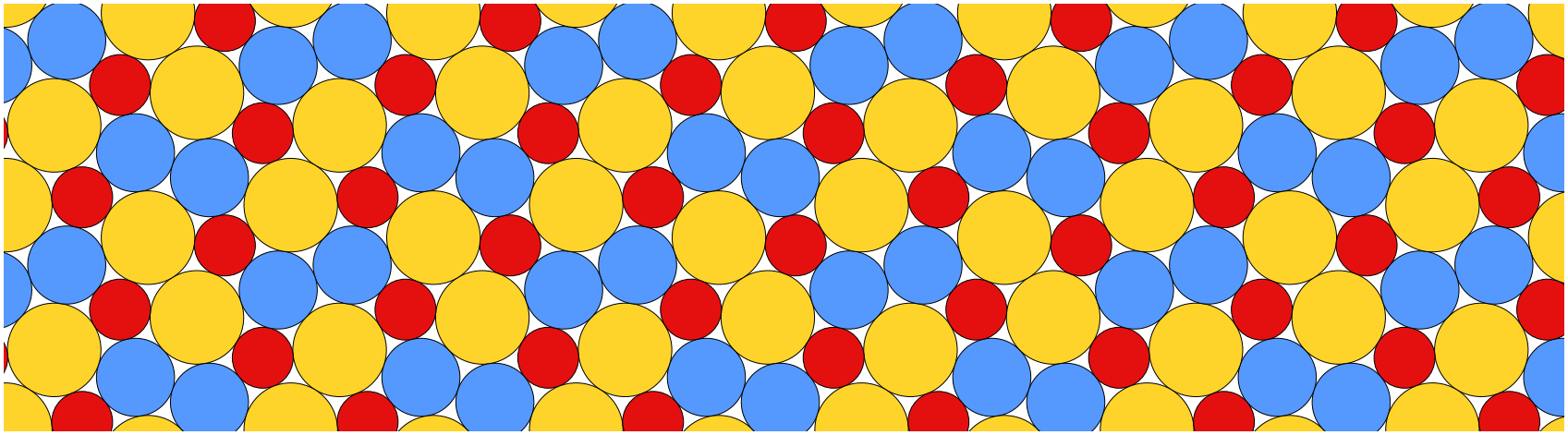
Il y a 164 *triplets de rayons permettant un empilement triangulé.*



Trois disques...

Theorem (F. & Hashemi & Sizova 2019)

Il y a 164 *triplets de rayons permettant un empilement triangulé.*



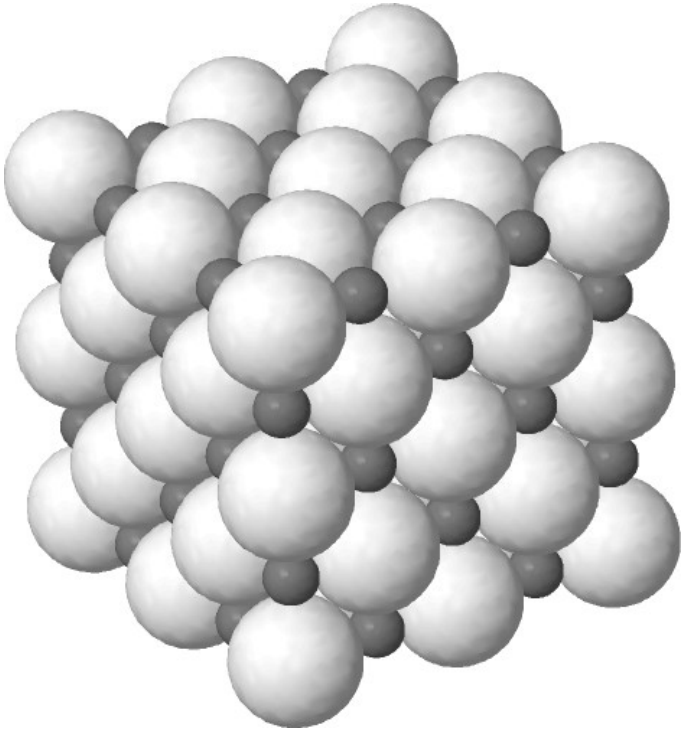
Theorem (F. & Pchelina)

Dans au moins 8 *cas, un empilement triangulé maximise la densité.*

Deux sphères. . .

Theorem (F. 2020)

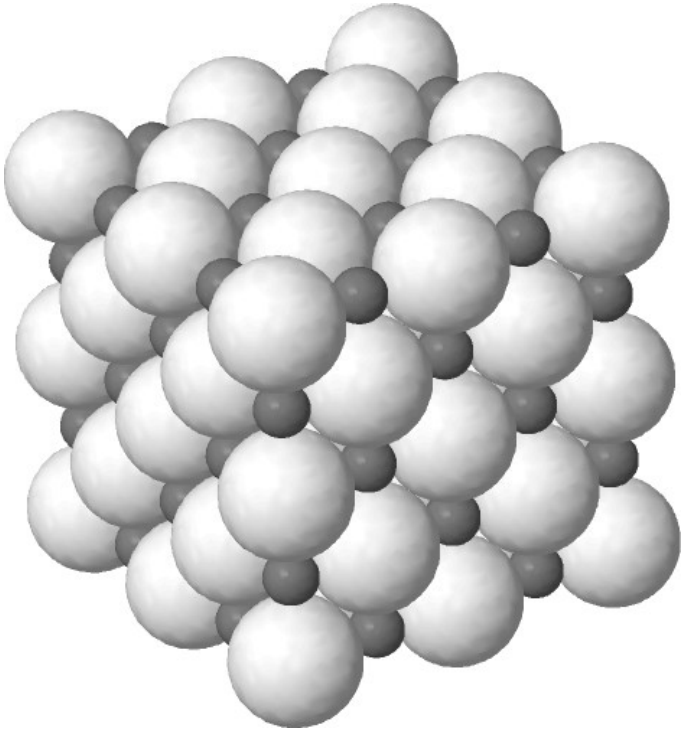
Il existe un seul ratio permettant des empilements "simpliciaux".



Deux sphères...

Theorem (F. 2020)

Il existe un seul ratio permettant des empilements "simpliciaux".



Conjecture

Ces empilements simpliciaux maximisent la densité.

Plan

Thue a un problème

Empilements d'oranges

Variations

Informatique mathématique ?

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées
- Arithmétique d'intervalle : continuum de cas

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées
- Arithmétique d'intervalle : continuum de cas
- Calcul formel : résolution de systèmes polynomiaux

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées
- Arithmétique d'intervalle : continuum de cas
- Calcul formel : résolution de systèmes polynomiaux
- Géométrie algorithmique : triangulations & Cie

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées
- Arithmétique d'intervalle : continuum de cas
- Calcul formel : résolution de systèmes polynomiaux
- Géométrie algorithmique : triangulations & Cie
- Preuves formelles

Informatique mathématique ?

- Études de cas automatisées
- Arithmétique d'intervalle : continuum de cas
- Calcul formel : résolution de systèmes polynomiaux
- Géométrie algorithmique : triangulations & Cie
- Preuves formelles
- Calculabilité : empilements triangulés apériodiques ?