AMI2 (Calcul Formel) : Partiel du 18 Mars 2013.

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours. —

L'ensemble $\mathcal{A}$ des arbres binaires est construit par la grammaire **(G1)**

$$\mathcal{A} \;=\; \square + \begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{A} & & & & \mathcal{A} \end{array}$$

Pour une arbre $t \in \mathcal{A}$, on notera $w_1(t)$, le nombre de feuilles de t, $w_2(t)$, le nombre de nœuds internes de t, et $w_3(t)$ la profondeur de t.
1) Montrer que pour toutes ces notions de taille, le nombre d'arbres d'une taille donnée est fini. Et que, si l'on note (t_l, t_r) les sous-arbres gauches et droits de t, on a

$$w_1(t) = w_1(t_g) + w_1(t_d) \; ; \; w_2(t) = w_2(t_g) + w_2(t_d) + 1 \; ; \; w_3(t) = sup(w_3(t_g), w_3(t_d)) + 1 \quad (1)$$

2) a) Donner la série génératrice des arbres binaires complets

$$S = \sum_{t \in \mathcal{A}} z^{w_1(t)} = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \quad (2)$$

b) Montrer que a_n est le nombre d'arbres binaires à n feuilles.
c) Montrer que S vérifie

$$S = z + S^2 \quad (3)$$

d) Résoudre $S^2 - S + z = 0$ (3) par la méthode habituelle.
e) Comment déterminer la bonne racine parmi

$$S_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2}; \; S_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2} \quad (4)$$

3) a) Montrer la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (5)$$

b) En déduire que

$$(1+X)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} X^k \quad (6)$$

c) Puis, en développant

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{k \geq 0} \begin{pmatrix} 1/2 \\ k \end{pmatrix} (-4z)^k \quad (7)$$

que

$$a_n = \frac{\begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}}{n} \quad (8)$$

II) Exercices. —
1) Mettre les nombres binaires suivants sous forme décimale
a) $(1010)_2$ b)$(10101010)_2$ c) $(\underbrace{10 \cdots 10}_{2n \text{ chiffres}})_2$ (pour le (c), on montrera que la réponse dépend

de la conversion d'un nombre plus simple)
2) Mettre les fractions suivantes sous forme décimale
a) $(0,605)_8$ b) $(12,324)_5$ c) $(0,\underbrace{3333333333}_{10 \text{ chiffres}})_4$

3) Calculer
a) $f_1 = (0,(2857)^\infty)$
b) le développement décimal illimité de
c) 22/7   d) 7/11   e) 1/98

III) Petit problème "Balls and bars" (BB). —
On appelle ainsi des structures du type

$$\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet \tag{9}$$

c'est à dire des points équidistants et horizontaux séparés par des | de façon que :

Toutes les barres ont (au moins) un point qui les précède et un point qui les suit.

1) a) Montrer que ces structures sont engendrées par la grammaire suivante :

$$BB \;=\; \bullet \;+\; BB\bullet \;+\; BB|\bullet \tag{10}$$

Si $s \in BB$, on note $t_1(s)$, le nombre de points noirs de s et $t_2(s)$ le nombre de barres.
b) Dessiner les structures pour $t_1(s) \leq 4$ (15 en tout).
c) Expliquer pourquoi le nombre de structures telles que $t_2(s) = k$ est infini et pourquoi

$$\sum_{s\in BB} z^{t_2(s)} \tag{11}$$

n'est pas sommable.
Soit a_n, le nombre de ces structures avec n points. Expliquer pourquoi a_n vérifie la récurrence

$$a_1 = 1;\; a_{n+2} = 2a_{n+1} \tag{12}$$

2) Expliquer les égalités

$$S = \sum_{n\geq 1} a_n z^n = \sum_{s\in BB} z^{t_1(s)}\;;\; S = z + 2zS \tag{13}$$

3) Résoudre (13) et montrer que $a_n = 2^{n-1}$ pour $n > 0$.
4) Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1, i_2, \cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

$\mathbf{I}$	$[1,4]$	$[3,1,1]$	$[2,1,3]$	$[1,2,1,3]$
$poids(\mathbf{I})$	5	5	6	7

a) Donner une correspondance naturelle entre

$$BB_n := \{s \in BB \,|\, t_1(s) = n\} \tag{14}$$

et les vecteurs d'entiers de poids n.
b) Montrer que la série

$$T(z,y) = \sum_{s\in BB} z^{t_1(s)} y^{t_2(s)} \tag{15}$$

vérifie

$$T = z + zT + zyT \tag{16}$$

c) Résoudre (16) et montrer que

$$T = \frac{z}{1-(z+z\,y)} = \frac{z}{1-z(1+y)} \tag{17}$$

5) Déduire des questions précédentes que, si $\beta(n,k)$ est le nombre de $s \in BB$ telles que

$$t_1(s) = n\;;\; t_2(s) = k$$

on a

$$\beta(n,k) = \binom{n-1}{k} \tag{18}$$